دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره هفتم، پاییز ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

خواص تابع مقدار ویژه

حسین علیزاده نظرکندی

(۱) گروه ریاضیات، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مرند، مرند، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۸/۱۴   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۰۹/۳۰

چکیده

خواص تابع مقدار ویژه برای ماتریس‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌ایم و یک تعداد از خواص آن را جمع‌آوری کرده‌ایم. نشان می‌دهیم که این تابع پیوسته، اکیدا پیوسته، دیفرانسیل پذیر سویی، دیفرانسیل پذیر فرشه و به‌طور دیفرانسیل پذیر پیوسته می‌باشد. در مرحله بعد تابع مقدار ویژه را به یک مجموعه بزرگتر از ماتریس‌ها تعمیم داده و نشان خواهیم داد که خواص مذکور مجددا برقرار است.

واژه‌های کلیدی: پیوستگی اکید، دیفرانسیل پذیری سویی، دیفرانسیل پذیری فرشه، بطور دیفرانسیل پذیر پیوسته، تجزیه طیفی، تابع مقدار ویژه.

*. halizadeh@marandiau.ac.ir

۱- مقدمه

توابع ماتریس مقدار متقارن[1] در سال‌های أخیر از جنبه‌های مختلف مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. یکی از ابزارهای اصلی در این مطالعات توابع طیفی[2] هستند. این توابع در ریاضیات کاربردی از اهمیت بالایی برخوردارند. برای دیدن کاربردهای از آنها در برنامه‌های نیمه معین؛ مسایل مهندسی و مکانیک کوانتم و بهینه‌سازی مدرن به منابع [۱۸، ۱۰، ۹، ۷] مراجعه نمایید. در این کار خواص پیوستگی، پیوستگی اکید، مشتق پذیری سویی، دیفرانسیل پذیری فرشه و دیفرانسیل پذیری پیوسته تابع مقدار ویژه را که روی فضای ماتریس‌های متقارن حقیقی تعریف شده را بررسی می‌کنیم. ماتریس‌های متقارن و گروه ماتریس‌های متعامد روی اعداد حقیقی را به ترتیب با $O(n,R),S(n,R)$ نشان خواهیم داد.

برای هر $a\in S(n,R)$، مقادیر ویژه (تکراری) $\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_n$ حقیقی هستند و به ازای $p\in O(n,R)$ یک تجربه طیفی به شکل

$$a = pdiag[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]pt \qquad (۱)$$

می‌پذیرد که در آن $diag[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]$ یک ماتریس قطری است که درایه iام آن λ_i است. توجه کنید که (۱) مستقل از انتخاب $p\in O(n,R)$ است [۶] را ببینید.

فرض کنید $R^n_{\geq}$ نشانگر همه بردارهای $x\in R^n$ باشد بطوری‌که $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n$.

تابع مقدار ویژه را به صورت $\lambda(.):S(n,R)\to R^n_{\geq}$ تعریف می‌کنیم بطوری‌که $\lambda_i(a),i=1,\ldots n$ مقادیر ویژه $a\in S(n,R)$ هستند و به صورت غیر نزولی مرتب شده‌اند یعنی $\lambda_1(a)\geq\ldots\geq\lambda_n(a)$. این تابع در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است.

برای هر $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in R^n$ ماتریس قطری $diag[\lambda]=diag[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]$ که درایه iام آن λ_i است در نظر می‌گیریم.

در تمام این مقاله $\|.\|$ نشانگر نرم فروبینیوس برای ماتریس‌ها و ۲- نرم برای بردارها خواهد بود. برای هر $x\in R^n$ و هر اسکالر $r>0$ گوی به مرکز x و شعاع $r>0$ را به صورت $N(x,r)=\{y\in R^n:\|y-x\|\leq r\}$ و برای هر $a\in S(n,R)$ گوی به مرکز a و شعاع $r>0$ را به صورت $B(a,r)=\{b\in S(n,R):\|b-a\|\leq r\}$ نشان خواهیم داد. یادآوری می‌کنیم ([۱۷] راببینید) که نگاشت $L:R^n\to R^n$ در $x\in R^k$ پیوسته است هرگاه $L(y)\to L(x)$ وقتی‌که $y\to x$ و L پیوسته است هرگاه در هر نقطه $x\in R^k$ پیوسته باشد. L در هر نقطه $x\in R^k$ اکیداً پیوسته است هرگاه اسکالرهای $\delta>0$ و $K>0$ موجود باشد بطوری‌که

$$\|L(y)-L(z)\|\leq K\|y-z\|$$

$$\forall y,z\in R^n \ \ with \ \ y,z\in N(x,\delta).$$

L اکیداً پیوسته هرگاه در هر نقطه $x\in R^n$ اکیداً پیوسته باشد. اگر برای δ مقدار $+\infty$ مجاز باشد، در آن صورت L پیوسته لیپ شوتس با ثابت K نامیده می‌شود.

تابع $lipL:R^n\to[0,+\infty]$ را به صورت

$$lipL(x)=\limsup_{\substack{y,z\to x\\ y\neq z}}\frac{\|L(y)-L(z)\|}{\|y-z\|}$$

تعریف می‌کنیم. در آن صورت L اکیداً پیوسته است اگر و تنها اگر $lipL(x)$ متناهی باشد.

یادآوری می‌کنیم که L دیفرانسیل پذیرسویی در $x\in R^n$ است هرگاه

$$L'(x,h)=\lim_{t\to 0}\frac{L(x+th)-L(x)}{t} \quad \forall h\in R^k,$$

موجود باشد و L دیفرانسیل پذیر سویی است هرگاه در هر نقطه $x\in R^n$ دیفرانسیل پذیرسویی باشد. بسادگی می‌توانیم ببینیم که اگر حد فوق موجود باشد با $L'(x,h)$ برابر است. می‌گوییم که L دیفرانسیل پذیر (به معنی فرشه) در $x\in R^n$ است هرگاه نگاشت خطی $\nabla L(x):R^n\to R^l$ موجود باشد بطوری‌که

$$L(x+h)-L(x)-\nabla L(x)h=o(\|h\|),$$

که در اینجا $\alpha\in R,z=o(\alpha)$ به این معنی است که وقتی $\alpha\to 0$ در آن صورت $\frac{\|z\|}{\|a\|}$ به صفر میل

1. Symmetric matrix valued function
2. Spectral function

می‌کند. همچنین می‌نویسیم $\alpha \in R, z = O(\alpha)$ وقتی‌که $\alpha \to 0$ در آن صورت $\frac{\|z\|}{\|a\|}$ اکیدا کراندار باشد.

L دیفرانسیل پذیر پیوسته نامیده نامیده می‌شود هرگاه L در هر نقطه $x \in R^n$ دیفرانسیل پذیر و ∇L پیوسته باشد.

در ادامه چند نتیجه اختلال[۳] در ارتباط با تجزیه طیفی ماتریس‌های متقارن حقیقی را می‌آوریم. فرض کنید E نشانگر فضای ماتریس‌های قطری $n \times n$ حقیقی با درایه‌های قطر اصلی غیر نزولی باشد. برای هر $x \in S(n,R)$ مجموعه همه ماتریس‌های متعامد که تجزیه طیفی مرتب x را بدست می‌دهند را به شکل

$$O_x(n,R) = \{p \in O(n,R) : pxp^t \in E\}$$

نشان می‌دهیم. واضح است که $O_x(n,R)$ به ازای هر $x \in S(n,R)$ غیر تهی است لم زیر یک نتیجه اختلال کلیدی برای ماتریس‌های متعامد یک ماتریس متقارن بدست می‌دهد([۳]).

لم ۱،۱ به ازای هر $x \in S(n,R)$ اسکالرهای $\eta > 0$ و $\varepsilon > 0$ موجودند بطوری‌که

$$\min_{a \in O_x(n,R)} \| a-b \| \le \eta \| x-y \|$$

$$\forall y \in B(x,\varepsilon),\ \forall b \in O_x(n,R). \quad (**)$$

نتیجه اختلال زیر از وایل برای مقادیر ویژه ماتریس‌های متقارن را داریم([۱]).

لم ۲،۱ برای هر $x, y \in S(n,R)$ داریم

$$\| \lambda(x) - \lambda(y) \| \le \| x-y \|$$

و

$$\| \lambda_i(x) - \lambda_i(y) \| \le \| x-y \|_2$$

$$\forall i = 1,\ldots,n,$$

که در اینجا $\|.\|_2$ ۲-نرم است

برای آنالیز دیفرانسیلی نتیجه زیر را ارایه می‌کنیم ([۸،۱۶]) که نشان می‌دهد که برای هر $x, h \in S(n,R)$ بردارهای متعامد $x+th$ می‌توانند بشکل یک سری توانی در t انتخاب شوند.

لم ۳،۱ برای هر $x, h \in S(n,R)$ بردار $u(t) \in O(n,R), (t \in R)$ وجود داردکه درایه یشان سری‌های توانی از t است و در یک همسایگی از $t=0$ همگرا هستند و $u(t)^t(x+th)u(t)$ یک ماتریس قطری است.

۲- خواص $\lambda(0)$

در این بخش تعدادی از خواص $\lambda(0)$ را اثبات خواهیم کرد. نشان می‌دهیم که $\lambda(0)$ دارای خاصیت پیوستگی، پیوستگی اکیداً، دیفرانسیل پذیری سویی، دیفرانسیل پذیر فرشه و دیفرانسیل پذیر پیوسته می‌باشد. اگر مقادیر ویژه یک ماتریس را به شکل یک ماتریس قطری نشان دهیم در آن صورت می‌توانیم فرض کنیم که $\lambda(0)$ یک تابع ماتریس مقدار از $S(n,R)$ به $S(n,R)$ می‌باشد.

گزاره ۱،۲ فرض کنید $\lambda(0): S(n,R) \to S(n,R)$ تابع مقدار ویژه باشد بطوریکه $\lambda_i, i = 1,\ldots,n$ مقادیر ویژه x به ازای هر $x \in S(n,R)$ می‌باشد و به صورت غیر نزولی مرتب شده‌اند در آن صورت احکام زیر برقرارند:

۱) $\lambda(0)$ پیوسته است

۲) $\lambda(0)$ دیفرانسیل پذیرسویی است.

۳) $\lambda(0)$ دیفرانسیل پذیر است.

۴) $\lambda(0)$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است.

۵) $\lambda(0)$ اکیداً پیوسته است.

برهان.

۱) بند اول از لم ۲،۱ بدست می‌آید.

۲) $x \in S(n,R)$ را ثابت در نظر بگیرید و فرض کنید $h \in S(n,R)$. بنابه لم ۳،۱ $p(t) \in O(n,R), (t \in R)$ موجود است به طوریکه درایه هایشان سری‌های توانی از t بوده و در همسایگی N از $t=0$ همگرا و $p(t)^t x(t) p(t)$ قطری است و $x(t) = x + th$.

در این صورت ما بسط $p(t) = p(0) + tp'(0) + o(t),$ را داریم که در آن $p'(0)$ دیفرانسیل نسبت به t می‌باشد. لذا داریم:

$$diag[\lambda(x+th)] = p(t)(x+th)p(t)^t$$

$$= p(t)xp(t)^t + tp(t)hp(t)^t =$$

---

3. perturbation

$$(p(0)+tp'(0)+o(t))x\,(p(0)+tp'(0)+o(t))^t +$$
$$t > (p(0)+tp'(0)+o(t))h\,(p(0)+tp'(0)+o(t))^t =$$
$$p(0)xp^t(0)+tp(0)xp'^t(0)+tp'(0)xp^t(0)+$$
$$t^2p'(0)xp'^t(0)+o(t)$$
$$+tp(0)hp^t(0)+t^2p(0)hp'^t(0)+$$
$$t^2p'(0)hp^t(0) > +t^3p'(0)hp'^t(0)+o(t).$$

این نتیجه می‌دهد که

$$diag[\lambda'(x,h)] = \lim_{t\to 0^+}\frac{diag[\lambda(x+th)]-diag[\lambda(x)]}{t} =$$
$$p(0)xp(0)'^t + p'(0)xp^t(0)+p(0)hp^t(0).$$

یعنی λ دیفرانسیل پذیر سویی است.

۳) $x\in S(n,R)$ را ثابت در نظر بگیرید و فرض کنید $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ نشانگر مقادیر ویژه x باشند که $\lambda_1\ge\ldots\ge\lambda_n$ و $\mu_1,\ldots,\mu_n$ نشانگر مقادیر ویژه $x+h$ باشند بطوری‌که $\mu_1\ge\ldots\ge\mu_n$. بنابه لم ۱،۱ اسکالرهای $\eta>0$ و $\varepsilon>0$ موجودند بطوری‌که ×× برقرار است. برای هر $h\in S(n,R)$ با فرض $\|h\|\le\varepsilon$ نشان خواهیم داد که

$$diag[\lambda(x+h)]-diag[\lambda(x)]-\nabla(x)h = o(\|h\|), \qquad (2)$$

که در آن $\nabla(x)h = php^t$ و $o(0),O(0)$ فقط به x و λ وابسته است. این و به اضافه استقلال جمله سوم از p نشان می‌دهد که λ در x دیفرانسیل پذیر است. فرض کنید $q\in O_{x+h}(n,R)$ در آن صورت $P\in O(n,R)$ موجود است و در نامساوی $\|p-q\|\le\eta\|h\|$ صدق می‌کند. برای سهولت فرض کنید m نشانگر طرف راست ۲ باشد یعنی

$$m = diag[\lambda(x+h)]-diag[\lambda(x)]-php^t. \qquad (3)$$

همچنین قرار دهید $\bar{h}=p^thp$ و $g=q^tp$.

چون

$$diag[\lambda_1,\ldots,\lambda_n] = p^txp = g^tdiag[\mu_1,\ldots,\mu_n]g-\bar{h},$$

داریم

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ki}g_{kj}\mu_k-\bar{h}_{ij} = \begin{cases}\lambda_i & if\ i=j\\ 0 & else\end{cases}\quad i,j=1,\ldots,n. \qquad (4)$$

چون

$$\|p-q\|\le\eta\|h\|$$

و $q=q^tp=(q-p)^tp+I$ نتیجه می‌گیریم که

$$g_{ij}=O(\|h\|)\quad \forall i\ne j. \qquad (5)$$

چون $p,q\in O(n,R)$ در نتیجه $g\in O(n,R)$ و لذا $g^tg=I$. این ایجاب می‌کند

$$1=g_{ii}^2+\sum_{k\ne i}^{n} g_{ki}^2 =$$
$$g_{ii}^2+O(\|h\|^2)\quad i=1,\ldots,n, \qquad (6)$$
$$0=g_{ii}g_{ij}+g_{ji}g_{jj}+\sum_{k\ne i,j}^{n} g_{ki}g_{kj} =$$
$$g_{ii}g_{ij}+g_{ji}g_{jj}+O(\|h\|^2)\quad \forall i\ne j. \qquad (7)$$

حال نشان می‌دهیم که $m=o(\|h\|)$ که ۲ را ثابت می‌کند. برای هر $i\in\{1,\ldots,n\}$ از ۳ و ۴ داریم

$$m_{ii}=\mu_i-\lambda_i-\bar{h}_{ii} =$$
$$\mu_i-\lambda_i-(-\lambda_i+\sum_{k=1}^{n} g_{ki}^2\mu_k) =$$
$$\mu_i-\lambda_i+\lambda_i-g_{ii}^2\mu_i+O(\|h\|^2) =$$
$$O(\|h\|^2)\mu_i+O(\|h\|^2)=O(\|h\|^2),$$

که برای تساوی‌ها از ۵ و ۶ استفاده شده است.

برای هر $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ که $i\ne j$ داریم

$$m_{ii}=-\bar{h}_{ii}=\sum_{k=1}^{n} g_{ki}g_{kj}\mu_k = O(\|h\|^2).$$

بنابراین در هردو حالت $m_{ij}=o(\|h\|)$.

۴) بنا به بند شماره ۳، λ روی $S(n,R)$ دیفرانسیل پذیر است. بعلاوه برای هر $x,h,f\in S(n,R)$ داریم

$$\|\nabla\lambda(x)h-\nabla\lambda(x)f\| =$$
$$\|php^t-pfp^t\| \le$$
$$\|p\|\,\|h-f\|\,\|p^t\| \le \|h-f\|.$$

یعنی $\nabla\lambda(x)h$ در x پیوسته است.

۵) این بند از لم ۲،۱ و این حقیقت که λ لیپ شوتس است نیتجه می‌شود.

۳- تعمیم دامنه $\lambda(0)$ به یک مجموعه بزرگتر

فرض کنید $GL(n,R)$ نشانگر فضای ماتریس‌های وارون پذیر باشد. همچنین فرض کنید $M(n,R)$ نشانگر فضای همه ماتریس‌های قطری پذیر $n\times n$ باشد که مقادیر ویژه آنها حقیقی می‌باشد یعنی برای $a\in M(n,R)$ داریم $\lambda(a)\in R^n$. فرض کنید $M'(n,R)$ زیر مجموعه‌ای از $M(n,R)$ باشد بطوری‌که

$$\|\ \lambda(x)-\lambda(y)\|\ \leq$$
$$\|\ \lambda(\frac{x+x^t}{2})-\lambda((\frac{y+y^t}{2})\|$$
$$\forall x,y\in M'(n,R). \quad (8)$$

واضح است که $S(n,R)\subseteq M'(n,R)$. پوسته محدب $M'(n,R)$ را با $M''(n,R)$ نمایش می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که $\lambda(0)$ روی $M''(n,R)$ دارای خاصیت پیوستگی، پیوستگی اکیداً، دیفرانسیل پذیری سویی، دیفرانسیل پذیر فرشه و دیفرانسیل پذیر پیوسته می‌باشد.

گزاره ۳،۱ فرض کنید $\lambda(0):M''(n,R)\to R^n_{\geq}$ تابع مقدار ویژه باشد بطوریکه $\lambda_i(x), i=1,..., n$ مقادیر ویژه x را به ازای هر $x\in M''(n,R)$ بدست می‌دهد و به صورت غیرنزولی مرتب شده است در آن صورت نتایج زیر برقرار است.

۱) $\lambda(0)$ پیوسته است.

۲) $\lambda(0)$ دیفرانسیل پذیر سویی است.

۳) $\lambda(0)$ دیفرانسیل پذیر است.

۴) $\lambda(0)$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است.

۵) $\lambda(0)$ پیوسته اکید است.

برهان

۱) این حکم از ۸ و لم ۲،۱ نتیجه می‌شود.

۲) $x,h\in M''(n,R)$ را ثابت در نظر بگیرید. برای $0\leq t\leq 1$ تعریف می‌کنیم $M(t)=x+th$.

بنا به تعریف $M''(n,R)$، $M(t)\in M''(n,R)$. فرض کنید $M(t)=p(t)diag[\lambda(t)]p^{-1}$ تجزیه طیفی‌اش باشدکه در اینجا $p\in GL(n,R)$. چون $\lambda(t)\in R^n_{\geq}$ بنابراین $A(t)\in S(n,R)$ وجود دارد بطوریکه $A(t)=a(t)diag[\lambda(t)]a^t(t)$ که درآن $a(t)\in O(n,R)$. بنابراین

$$M(t)=P(t)a(t)A(t)a^tp^{-1}(t).$$

چون $GL(n,R)$ یک گروه هست بنابراین $p(t)a(t)\in GL(n,R)$ و وارونش برابر است با $a^t(t)p^{-1}(t)$. چون

$$m(t)=p^{-1}(t)M(t)p(t)=$$
$$a(t)A(t)a^t\in S(n,R). \qquad (***)$$

اینجا برای $t=0$ داریم

$$m(0)=p^{-1}(0)xp(0)$$

بنابه لم ۳،۱ و برای $x=0,h=m(t)$، $v(s)\in O(n,R)$ وجود دارد که درایه‌هایش سری‌های توانی از s بوده و در همسایگی N از $s=0$ همگرا هستند و داریم

$$sm(t)=v^t(s)diag[\lambda(sm(t))]v(s)=$$
$$sv^t(s)diag[\lambda(m(t))]v(s),$$

که مساوی دوم از این حقیقت استفاده می‌کند که $\lambda(sm(t))=s\lambda(m(t)),s>0$. بنابراین

$$m(t)=v^t(s)diag[\lambda(m(t))]v(s)=$$
$$v^t(s)diag[\lambda(p^{-1}(t)m(t)p(t))]v(s)=$$
$$v^t(s)diag[\lambda(M(t))]v(s)=$$
$$v^t(s)diag[\lambda(x+th)]v(s).$$

اگر بسط $v(s)=v+sv'+o(t)$ را بکار ببریم که در آن $v=v(0), v'$ دیفرانسیل $v(s)$ در صفر است آنگاه داریم

$$diag[\lambda(x+th)]=v(s)m(t)v^t(s)=$$
$$(v+sv'+o(s))m(t)(v^t+sv'^t+o(s))=$$

$$(vm(t)+ sv'm(t)+o(t)m(t))(v^t+sv'^t+o(s))= vm(t)v^t+svm(t)v'^t+ sv'm(t)v^t+s^2v'm(t)v'^t+o(s).$$

چون هر دوی s,t نزدیک صفر هستند می‌توانیم فرض کنیم که $s=t$. بنابراین

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda(x+th)-vm(t)v^t}{t}= 2vm(0)v't=2vxv'^t.$$

توجه داریم که بنا به دومین مساوی در (***) داریم $\lim_{t\to 0^+} vm(t)v^t=\lambda(x)$. یعنی $\lambda(0)$ دیفرانسیل پذیرسویی است.

۳) نمادهای بند قبل را در اینجا استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\lambda_1\ge\ldots\ge\lambda_n,\mu_1\ge\ldots\ge\mu_n,$ بترتیب نشانگر مقادیر ویژه x و $x+h$ باشند. درآن صورت

$$diag[\lambda(x)]=v(0)m(0)v^t(0),$$
$$diag[\lambda(x+h)]=v(1)m(1)v^t \qquad (9)$$

و بنا به لم ۲،۱ اسکالرهای

$$\eta>0,\varepsilon>0$$

وجود دارند بطوری‌که

$$\|v(1)-v(0)\|\le\eta\|m(1)-m(0)\|,$$

که در اینجا فرض شده است که $m(0)\in B(m(1),\varepsilon)$.

بنا به ۸ و لم ۲،۱

$$\|\lambda(x+h)-\lambda(x)\|= \|\lambda(m(1))-\lambda(m(0))\|\le\|h\|.$$

بنابراین اگر $\|h\|\to 0$ آنگاه $\lambda(x+h)\to\lambda(x)$ و می‌توانیم فرض کنیم که $m(0)\in B(m(1),\varepsilon)$ و

$$\|v(1)-v(0)\|\le\eta\|h\|. \qquad (10)$$

برای هر $h\in M''$ که $\|h\|\le\varepsilon,$ نشان خواهیم داد که

$$diag[\lambda(x+h)]-diag[\lambda(x)]- \nabla\lambda(x)h=o(\|h\|), \qquad (11)$$

که اینجا $\nabla\lambda(x)h=v(0)p(0)hp^{-1}(0)v^t(0)$.

برای سادگی فرض کنید k نشانگر طرف چپ ۱۱ باشد یعنی

$$k=diag[\lambda(x+h)]- diag[\lambda(x)]-\nabla\lambda(x)h. \qquad (12)$$

از ۹ داریم

$$diag[\lambda(x)]=v(0)p(0)xp^{-1}(0)v^t(0),$$
$$diag[\lambda(x+h)]= v(1)p(1)(x+h)p^{-1}(1)v^t(1).$$

بنابراین از

$$x+h= p^{-1}(1)v^t(1)diag[\lambda(x+h)]v(1)p(1)$$

داریم

$$x=p^{-1}(1)v^t(1) diag[\lambda(x+h)]v(1)p(1)-h.$$

هر دو طرف این را از چپ و راست در $v^t(0)\,p^{-1}(0), v(0)\,p(0)$ ضرب می‌کنیم و بدست می‌آوریم

$$diag[\lambda(x)]=v(0)\,p(0)\,xp^{-1}v^t(0)= v(0)\,p(0)\,p^{-1}v^t(1)\,diag[\lambda(x+ h)]v(1)\,p(1)\,p^{-1}(0)\,v^t(0)- v(0)\,p(0)\,hp^{-1}(0)\,v^t(0).$$

برای سهولت فرض کنید

$$l=v(0)p(0),f=v(1)p(1)$$

چون $GL(n,R)$ یک گروه است لذا $lf\in GL(n,R)$ بنابراین

$$diag[\lambda(x)]= (lf^{-1})diag[\mu_i](lf^{-1})^{-1}-lhl.^{-1}$$

مجددا برای سادگی فرض کنید

$$g=(lf^{-1}),\bar{h}=lfl^{-1}$$

آنگاه داریم $diag[\lambda(x)]=gdiag[\mu_i]g^{-1}-\bar{h}$

و

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{kj}\mu_k-\bar{h}_{ij}= \begin{cases}\lambda_i & if\ i=j\\ 0 & else\end{cases}\quad i,j=1,\ldots,n. \qquad (13)$$

که در اینجا $g=[a_{ij}],\quad g^{-1}=[b_{ij}]$. چون

$$g = lf^{-1} = (l-f)f^{-1} + I,$$
$$g^{-1} = fl^{-1} = (f-l)l^{-1} + I$$

و بنا به ۱۰

$$\| l-f \| =$$
$$\| v(0)p(0) - v(1)p(1) \| =$$
$$\| v(0)p(0) - v(1)p(1) +$$
$$v(1)p(0) - v(1)p(0) \| \leq$$
$$\| v(0) - v(1) \| \| p(0) \| +$$
$$\| v(1)p(0) - v(1)p(1) \| \leq$$
$$\eta \| h \| \| p(0) \| + k,$$

که اینجا $0 < k = \| v(1) \| \| p(0) - p(1) \|$.

این نتیجه می‌دهد که

$$a_{ij} = O(\| h \|). \qquad (14)$$

بطور مشابه داریم

$$b_{ij} = O(\| h \|). \qquad (15)$$

چون $gg^{-1} = I$ این ایجاب می‌کند که

$$1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} =$$
$$a_{ii} b_{ii} + \sum_{k \neq i} a_{ik} b_{ki} =$$
$$a_{ii} b_{ii} + O(\| h \|^2), \ \ i = 1,2,\ldots,n. \qquad (16)$$
$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj} = a_{ii} b_{ij} + a_{ji} b_{jj} +$$
$$\sum_{k \neq i,j} a_{ki} b_{kj} = a_{ii} b_{ij} + a_{ji} b_{jj} +$$
$$O(\| h \|), i \neq j. \qquad (17)$$

حال نشان می‌دهیم $k = O(\| h \|)$ که ۱۱ را ثابت می‌کند. برای هر $i \in \{1,\ldots,n\}$ از ۱۳ و ۱۴ داریم

$$k_{ii} = \mu_i - \lambda_i - \bar{h} =$$
$$\mu_i - \lambda(i) - (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \mu_i - \lambda_i) =$$
$$\mu_i - \lambda_i - (a_{ii} b_{ii} \mu_i - \lambda_i) + O(\| h \|^2) =$$
$$(1 - a_{ii} b_{ii})\mu_i + O(\| h \|^2) =$$
$$O(\| h \|^2) + O(\| h \|^2) = O(\| h \|^2).$$

برای هر $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ که $i \neq j$ از ۱۳و ۱۷ داریم

$$k_{ij} = -\bar{h}_{ij} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj} \mu_k =$$
$$-a_{ii} b_{ij} - a_{ji} b_{jj} + O(\| h \|^2) = O(\| h \|^2).$$

بنابراین در هر حالت داریم $k_{ij} = o(\| h \|)$.

۴) بنا به بند قبلی λ روی $M''(n,R)$ دیفرانسیل پذیر است. بعلاوه برای هر $x, h, f \in M''(n,R)$ داریم

$$\| \nabla\lambda(x)h - \nabla\lambda(x)f \| =$$
$$\| v(0)p(0)hp^{-1}(0)v^t(0)$$
$$-v(0)p(0)fp^{-1}(0)v^t(0) \| \leq$$
$$\| v(0)p(0) \| \| h-f \| \| p^{-1}(0)v^t(0) \| \leq$$
$$|t| \| h-f \|.$$

یعنی $\nabla\lambda(x)h$ در x پیوسته است.

۵) بالاخره این حکم از لم ۲،۱ و ۹ نتیجه می‌شود. در واقع λ روی $M''(n,R)$ لیپ شوتس است.

نتیجه‌گیری

آنالیز توابع ناهموار که روی ماتریس‌های متقارن تعریف شده است با جزییات بیشتر در کارهای لویس و دیگران ظاهر شده است (منابع [۴،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵] را ببینید.) آنها به طور ضمنی خواص تابع مقدار ویژه را بکار برده‌اند، در حالی‌که موضوع از دیدگاه منیفلدها و گروه‌های لی نیز مهم است[۱،۵].

در همه کارهای بالا شرط تقارن و ماتریس‌های متقارن بکار رفته است. در اینجا و در بخش آخر نشان دادیم که نتایج به مجموعه بزرگتر نیز قابل تعمیم است.

فهرست منابع

[1] H.A, Nazarkandi, Lie Group Methods for Eigenvalue Function. J. Of Generalized Lie Theory and Applications(2016). Vol. 10 issue 1

[2] R., BAHATIA, Matrix analysis. Springer-Verlag,(2012)

[3] X. CHEN and P. TSENG, Non-interior continuation methods for solving semidefinte complementarity problems. Math. Program (2003).95:431-474.

[4] X. CHEN, H. D. QI and P. TSENG, Analysis of nonsmooth symmetric-matrix-valued functions with applications to semidefinite complementarity problems. SIAM J. Optimiz. (2003) 13:960-985.

[5] A. DANIILIDIS, J. MALICK, H. SENDOV, Spectral (isotropic) manifolds and their dimension.(2014)hal-0097221, version 1-3.

[6] R. A. HORN and C.R. JOHNSON, Matrix analysis. (1985)2nd. Cambrige University Press, Cambridge.

[7] C. KANZOW and C. NAGEL, Semidefinite programs:new search direction , smoothing-type methods and numerical results.(2002) SIAM J. Optimiz. 13:1-23.

[8] T. KATO, Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[9] E.C.KEMBLE , The fundamental principles of quantum mechanics. Dover, New York (1958).

[10] A. S. LEWIS and M.L. OVERTON, Eigenvalue optimization. In Acta Numerica. Acta Number (1996)5. Cambridge University Press, pp. 149-190.

[11] A.S. LEWIS, Derivatves of spectral function. Math. oper. Res.(1996)21:576-588 . (1996)

[12] A.S. LEWIS, Nonsmooth analysis of eigenvalues,Math. Programming 84 (1999), 1-24.

[13] A.S. LEWIS and H.S. Sendov, Twice differentiable sprctral functions. SIAM J. Matrix Anal.Appl. (2001) 23:368-386

[14] H. MOHEBI and A. SALEMI,Analysis of symmetric matrx valued functions. Num. Functional Analysis and Optimization, 28(5-6):691-715,(2007)

[15] H.D. QI and X. YANG, Semismoothness of spectral functions.SIAM J. Matrix Anal. (2004) 25:766-783.

[16] F.RELLICH, Perturbation Theory of Eigenvalue Problems, Gordon and Breach, New York, 1969.

[17] R.T. ROCKAFELLAR and R.J. WETS Variational Analysis. Springer-Verlag, Berlin (1955).

[18] L.I.SCHIFF Quantum Mechanics. McGraw-Hill, New York (1955).