دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره سیزدهم، بهار ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

کارایی قوی در تحلیل پوششی داده‌ها با تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر

سعید شاه قبادی[۱]* فرهاد مرادی[۲]

[۱] گروه ریاضی، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران.
[۲] گروه ریاضی، واحد سنندج، دانشگاه آزاد اسلامی، کردستان، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۷/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۰/۲۲

چکیده

یکی از مسائل اساسی در تحلیل پوششی داده‌های کلاسیک، عدم توان کافی برای تفکیک بین‌اندازه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است که به عنوان یک نقطه ضعف مورد توجه قرار می‌گیرد. اخیرا پارکان و همکاران [۹] تلاش‌هایی برای رفع این مشکل انجام داده‌اند. آنها پیشنهاد کردند برای ارزیابی هر واحد هر دو دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه مورد توجه قرار گیرد. در مقابل ارزیابی سنتی، شاخصی بر پایه کمترین مقدار اندازه کارایی برای هر واحد در نظر گرفته که آن را اندازه کارایی قوی می‌گویند. همچنین در این راستا تکنولوژی جدیدی براساس فرض بازده به مقیاس ثابت ساخته شد. در این مقاله تکنولوزی تولید مذکور با فرض بازده به مقیاس متغیر ساخته می‌شود و مدل‌های متناظر به صورت برنامه‌ریزی خطی فرمول بندی می‌شوند. در پایان نشان داده می‌شود که مدل‌های مبتنی بر اندازه کارایی قوی داری قدرت تمایز به مراتب بیشتری از مدال‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها هستند.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تکنولوژی تولید، کارایی قوی، اندازه کارایی.

* عهده‌دار مکاتبات
Email: s.shahghobadi@gmail.com

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها یک تکنیک غیر پارامتری بر پایه برنامه‌ریزی ریاضی برای ارزیابی کارایی واحده‌های تصمیم‌گیرنده می‌باشد که با مصرف mورودی s خروجی را تولید می‌کنند [۴]. همه می‌دانیم که مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها مقدار ماکزیمم کارایی یک واحد تحت ارزیابی را نسبت به سایر واحدها محاسبه می‌کند به طوری که این مقدار حداکثر یک می‌باشد [۷]. در بسیاری از مسائل عملی این نگاه خوش‌بینانه منجر به بروز مشکلات متعددی می‌شود [۹]. خدابخشی و آریاوش [۸] اندازه کارایی مبتنی بر رویکرد خوش‌بینانه و بدبینانه را ارائه دادند که مجموع این دو مقدار برابر یک باشد. سپس آنها از ترکیب محدب مقدار ماکزیمم و مینیمم آن برای رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرند استفاده کردند. یکی از مشکلات ارزیابی در حالت خوش‌بینانه برآمدن تعداد زیادی واحد بااندازه کارایی یک است که منجر به عدم تفکیک دقیق این واحدها می‌شود. دایسون و همکاران[1] برای این راه‌حلی پیشنهاد کردند [۵]. اخیرا پارکان[2] و همکاران [۹] تلاش‌هایی برای رفع این مشکل انجام داده‌اند. آنها پیشنهاد کردند برای ارزیابی هر واحد هر دیدگاه بدبینانه مورد توجه قرار گیرد. آنها شاخصی بر پایه کمترین مقدار اندازه کارایی برای هر واحد در نظر گرفتند و آن را اندازه کارایی قوی می‌نامیدند. همچنین تکنولوژی جدیدی براساس فرض بازده به مقیاس ثابت ساخته شد. این موضوع به عنوان یک مفهوم مهم در ارزیابی کارایی قوی به منظور تمایز بیشتر مقدار کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده مورد توجه می‌باشد. در [۹] روابط جدید و مرجعی ایجاد شد به طوری که براساس آن مجموعه امکان تولید ساخته می‌شود همچنین تفسیری ویژه از آن ارائه گردید که کاربرد فراوانی دارد. لازم به ذکر است تکنولوژی تولید مذکور دارای خاصیت بازده به مقیاس ثابت می‌باشد. اما در این مقاله تکنولوزی تولید مذکور با فرض بازده به مقیاس متغیر ساخته می‌شود و مدل‌های متناظر به صورت برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی می‌شوند. در پایان نشان داده می‌شود که مدل‌های مبتنی بر اندازه کارایی قویداری قدرت تمایز به مراتب بیشتری از مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها هستند. این رویکرد را برای بهبود تمایز بین اندازه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده مورد استفاده قرار می‌دهیم که یکی از مشکلات عمده ارزیابی عملکرد به شمار می‌رود. همچنین با استفاده از مثال‌های عملی کاربرد این مدل‌ها نشان داده می‌شود.

این مقاله به بخش‌های زیر تفکیک می‌شود: در بخش دوم اندازه کارایی قوی و مجموعه امکان تولید معرفی شده در [۹] شرح داده می‌شود. در بخش سوم توسعه مدل‌های مذکور و مجموعه امکان تولید در حالت بازده به مقیاس متغیر ارائه می‌گردند. در پایان یک مثال برای روشن شدن بیشتر روش و مقایسه آن با روش‌های دیگر آورده شده است.

۲.اندازه کارایی قوی با فرض بازده به مقیاس ثابت

در این بخش تعاریف و اصول لازم در بحث مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها بیان می‌شود و سپس خلاصه‌ای از آنچه که پارکان و همکاران در [۹] ارائه کردند آورده می‌شود. لازم به ذکر است اساس این مقاله بر پایه تحقیق پر اهمیت [۹] است که در این جا یک توسیع مهم و کاربردی از آن بیان می‌شود.

فرض کنیم n واحد تولید کننده داریم که با مصرف m ورودی s خروجی تولید می‌کنند. همچنین مجموعه‌های O, I, K به ترتیب نشان دهنده مجموعه DMUها، اندیس ورودی و اندیس خروجی باشند. بردار ورودی و خروجی DMU_k را $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk})$ و بردار خروجی را با $Y_k = (y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{ks})$ نشان می‌دهیم. به علاوه فرض می‌کنیم همه مولفه‌های ورودی و خروجی اکیدا مثبت باشند همچنان که می‌دانیم این یک فرض محدود کننده است ولی برای مدل‌هایی که در این تحقیق ارائه می‌شود لازم می‌باشد. لذا در سراسر مقاله فرض بر این است که $(X, Y) \in R_+^m \times R_+^s$ و $Z = I \times O$ می‌باشد.

---
[1] Dyson and et al.
[2] Parcan and et al

فرض کنیم بردار $(V,U)\in R_+^m\times R_+^s$ باشد که در آن V نشان دهنده بردار هزینه ورودی و U نشان دهنده بردار قیمت خروجی است. در تحلیل پوششی داده‌های سنتی اندازه کارایی کامل هر واحد به صورت نسبت وزن‌دار شده خروجی‌ها به ورودی‌ها $E_k(V,U)=\dfrac{UY_k}{VX_k}$ تعریف می‌شود [۳]. همچنین اندازه کارایی نسبی هر واحد با توجه به بردار وزن‌های ورودی و خروجی با استفاده از رابطه $f_k=\dfrac{E_k(V,U)}{max\{E_n(V,U):n\in K\}}$ بیان می‌شود. همچنین اندازه کارایی فارل با استفاده از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$f_k^*=\max_{(V,U)}\{f_k:V\in\Omega_v,U\in\Omega_u\} \qquad (۱)$$

که به آن اندازه کارایی تکنیکی گفته می‌شود و در آن Ω_v,Ω_u مجموعه محدویت‌های وزنی برای بردارهای ورودی و خروجی هستند. همان‌طور که از (۱) آشکار است مقدار اندازه کارایی برای ارزیابی واحد kام در بهترین حالت یعنی از دیدگاه خوش‌بینانه مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. پارکان و همکاران همانند بالا اندازه کارایی واحد kام را از دیدگاه بدبینانه به صورت زیر تعریف کردند:

$$h_k^*=\min_{(V,U)}\{f_k:V\in\Omega_v,U\in\Omega_u\} \qquad (۲)$$

همچنین به ازای هر دو واحد kام و nام مقدار r_{kn}^* به صورت $r_{kn}^*=\min_{(V,U)}\left\{\dfrac{UY_k}{VX_k}\Big/\dfrac{UY_n}{VX_n}\right\}$ تعریف شد. به علاوه ثابت شد که $h_k^*=\min_{n\in K}\{r_{kn}^*\}$ است.

تعریف ۱: یک واحد مانند (X,Y) را غالب قوی بر (X_n,Y_n) گوییم اگر و فقط اگر

$$\frac{y_w}{x_m}\ge\frac{y_{nm}}{x_{nm}}\quad\forall(m,w)\in Z$$

در تعریف بالا هرگاه نامساوی به صورت اکید برقرار باشد گوییم (X,Y) غالب قوی اکید بر (X_n,Y_n) است.

گزاره ۱. هرگاه به ازای واحدهای (X,Y) و (X_n,Y_n) رابطه $(-\theta X_n,Y_n)\ge(-\lambda X,\lambda Y)$ برقرار باشد آنگاه $(\theta X_n,Y_n)$ بر (X,Y) غالب قوی است.

اثبات: با توجه به تعریف بالا مجموعه امکان جدیدی معرفی شد که اندازه کارایی قوی را برآورد می‌کند. می‌دانیم که مجموعه امکان تولید CCR,BCC که به ترتیب با T_c,T_v نشان داه می‌شوند، توسط چارنز و همکاران[3] [۲] و بنکر و همکاران[4] [۱] به صورت تعریف شده‌اند:

$$T_c=\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{X,Y}):\sum_{n\in K}\lambda_n X_n\le X,\ \sum_{n\in K}\lambda_n Y_n\ge Y\\ \lambda_n\ge ۰\end{array}\right\}$$

$$T_v=\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{X,Y}):\sum_{n\in K}\lambda_n X_n\le X,\ \sum_{n\in K}\lambda_n Y_n\ge Y\\ \sum_{n\in K}\lambda_n=۱,\lambda_n\ge ۰\end{array}\right\}$$

مجموعه امکان تولید معرفی شده در [۹] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$GR=\left\{(X,Y):\exists(m,w)\in Z:\frac{y_w}{x_m}\le D(m,w)\right\} \qquad (۳)$$

که در آن $D(\mathrm{m,w})=\underset{k\in k}{Max}\left\{\dfrac{y_{kw}}{x_{km}}\right\}$ است.

قضیه ۱. اندازه کارایی قوی به ازای هر $(\mathrm{X,Y})$ یعنی $h_{(\mathrm{X,Y})}^*$ در رابطه (۲) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h_{(X,Y)}^*=min\{\theta:(\theta X,Y)\in GR,(X,Y)\in GR\}$$

اثبات: اکنون با استفاده از گزاره (۲) و نتایج زیر ارتباط بین مجموعه امکان تولید GR و T_c در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا برای حالتی که DMUها دارای یک ورودی و یک خروجی هستند گزاره زیر بیان می‌شود.

---
3 Charnes and et al.
4 Banker and et al.

گزاره۲: اگر DMUها دارای یک ورودی و یک خروجی باشند آنگاه مجموعه امکان تولید GR با مجموعه امکان تولید T_c یکسان است.

اثبات: فرض کنیم $(X,Y)\in GR$ آنگاه با در نظر گرفتن (۳) اندیس $\bar{k}\in K$ به طوری که $\frac{y}{x}\le\frac{y_{\bar{k}}}{x_{\bar{k}}}$ از این می‌توان گفت $\exists\lambda>0:\lambda x=x_{\bar{k}},\lambda y\le y_{\bar{k}}$ لذا

$$.(\lambda x,\lambda y)\le(x_{\bar{k}},y_{\bar{k}})\Rightarrow(\mathrm{x,y})\in\mathrm{T}_C$$

اکنون فرض کنیم $(\mathrm{x,y})\in\mathrm{T}_c$. از آن جا که $y_k\le D(۱,۱)\,\mathrm{x}_k$ داریم:

$$y\le\sum_{k\in K}\lambda_k y_k\le\sum_{k\in K}\lambda_k D(۱,۱)\,\mathrm{x}_k\le D(۱,۱)x$$

و این یعنی $(x,y)\in GR$ است.

گزاره۳: مجموعه GR یک مجموعه محدب نیست.

اثبات: فرض کنیم واحدهای مشاهده شده ما با یک ورودی (مولفه اول) و دو خرجی (مولفه‌های دوم و سوم) به صورت $A=(۱,۳,۲),B=(۲,۱,۲)$ باشند آنگاه داریم:

$D(۱,۱)=\max\{۳/۱,۱/۲\}=۳$ و

$D(۱,۲)=\max\{۲/۱,۲/۲\}=۲$ می‌باشد. لذا واحدهای مجازی $(۱,۱۰,۲),(۲,۶,۱۰)$ متعلق به GR هستند. از آن جایی که

$$\frac{۱۰-۴\lambda}{۱+\lambda}>D(۱,۱)=۳$$

$$\frac{۲+۸\lambda}{۱+\lambda}>D(۱,۲)=۲$$

لذا هر ترکیب محدب A و B یعنی $(۱+\lambda,۱۰-۴\lambda,۲+۸\lambda),۰<\lambda<۱$ متعلق به GR نیست.

۳. اندازه کارایی قوی در تکنولوژی با بازده به مقیاس متغیر

در این بخش ابتدا ما متناظر مجموعه امکان تولید GR، مجموعه امکان تولید $\overline{GR}$ را با حذف اصل بی‌کرانی اشعه می‌سازیم. سپس‌اندازه کارایی قوی را تحت تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر گسترش می‌دهیم و مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای محاسبه آن بدست می‌آوریم.

گزاره٤: مجموعه امکان تولید GR را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$GR=\bigcup_{(\mathrm{m,w})\in Z}\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{X,Y}):\sum_{n\in K}\lambda_n x_{nm}\le x_m\\ ,\sum_{n\in K}\lambda_n y_{nw}\ge y_w,\lambda_n\ge۰\end{array}\right\}$$

اثبات: فرض کنیم (X,Y) متعلق به مجموعه بالا باشد آنگاه $(m,w)\in Z$وجود دارد به طوری که :

$$\sum_{k\in K}\lambda_k x_{mk}\le x_m,\sum_{k\in K}\lambda_k y_{wk}\le y_w,\lambda_k\ge۰$$

با توجه به تعریف $D(m,w)$ داریم:

$$y_w\le\sum_{k\in K}\lambda_k y_{kw}\le\sum_{k\in K}\lambda_k D(\mathrm{m,w})\,\mathrm{x}_{km}\le D(\mathrm{m,w})x_m$$

لذا $(X,Y)\in GR$ است. برای اثبات قسمت عکس نیز فرض کنیم بردار $(X,Y)\in GR$، آنگاه $(m,w)\in Z$ وجود دارد به طوری که : $\frac{y_w}{x_m}\le D(m,w)=\frac{y_{\bar{k}w}}{x_{\bar{k}m}}$ می‌باشد. از آنجا $\lambda_{\bar{k}}\ge۰$ وجود دارد به طوری که $\lambda_{\bar{k}}x_m=x_{\bar{k}m},\lambda_{\bar{k}}y_w\le y_{\bar{k}w}$ است. اکنون بردار $\bar{\lambda}$ را طوری در نظر می‌گیریم که مولفه $\bar{k}$ام آن برابر $\lambda_{\bar{k}}$ وبقیه مولفه‌های آن صفر باشند آنگاه

$$\sum_{k\in K}\bar{\lambda}_k x_{mk}\le x_m,\sum_{k\in K}\bar{\lambda}_k y_{wk}\le y_w,\bar{\lambda}_k\ge۰$$ و

این یعنی (X,Y) متعلق به مجموعه بالا می‌باشد.

تعریف ۲: فرض کنیم $X,Y\in R_+^n$ آنگاه X را غالب بر Y گوییم و با $X\succeq Y$ نشان می‌دهیم اگر به ازای حداقل یک مولفه مانند m، $x_m\ge y_m$ باشد.

در تعریف بالا در صورتی که نامساوی به صورت اکید برقرار باشد آنگاه X را غالب اکید بر Y گوییم و با $X\succ Y$ نشان می‌دهیم.

گزاره۵: هرگاه $A=(X_A,Y_A)$ غالب قوی بر واحد (X,Y) باشد آنگاه $\bar{\lambda}>0$ وجود دارد به طوری که (X_A,Y_A) غالب بر $(\bar{\lambda}X,\bar{\lambda}Y)$ است، یعنی:

$$(X_A,Y_A)\succeq(X,Y)\Rightarrow\exists\bar{\lambda}>0:(X_A,Y_A)\geq(\bar{\lambda}X,\bar{\lambda}Y)$$

اثبات: فرض کنیم (X_A,Y_A) غالب قوی بر واحد (X,Y) است، آنگاه

$$\frac{y_{Aw}}{x_{Am}}\geq\frac{y_w}{x_m}\quad\forall(m,w)\in Z$$

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که:

$$x_m\leq x_{Am},y_w\geq y_{Aw}\ \forall(m,w)\in Z$$

بنابراین با در نظر گرفتن $\bar{\lambda}=1$ گزاره برقرار است. اکنون فرض کنیم به ازای برخی $I'\subseteq I$ ، $i\in I'$ ، $x_{Ai}\geq x_i$ یا برخی $J'\subseteq J$ ، $j\in J'$، $y_{Aj}\leq y_j$ باشد. با قرار دادن:

$$\bar{\lambda}=Max\{\frac{x_{Ai}}{x_i}:i\in I'\}=\frac{x_{Ak}}{x_k}$$

داریم $x_{Ai}\leq x_i$ به ازای هر $i\in I'$ و از آن جایی که $\bar{\lambda}>1$ آنگاه $x_{Ai}\leq x_i$ به ازای هر $i\in I$ است.

اکنون کافی است نشان دهیم $y_{Aj}\geq\bar{\lambda}y_j$ به ازای هر $j\in J$. با برهان خلف فرض کنیم اندیس $j'\in J$ وجود داشته باشد به طوری که $y_{Aj'}<\bar{\lambda}y_{j'}$ آنگاه:

$$y_{Aj'}<\frac{x_{Ak}}{x_k}y_{j'}\Rightarrow\frac{y_{Aj'}}{x_{Ak}}<\frac{y_{j'}}{x_k}$$

و این با غالب قوی بودن (X_A,Y_A) بر (X,Y) در تناقض است. با استدلالی مشابه در حالت $j\in J',y_{Aj}<y_j$ و با قرار دادن:

$$\bar{\lambda}=Min\{\frac{y_{Aj}}{y_j}:j\in J'\}=\frac{y_{Ak}}{y_k}$$

گزاره اثبات می‌شود.

با توجه به تعریف بالا ما مجموعه امکان تولید GR را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و از این فرم برای ساخت مجموعه امکان تولید در حالت بازده به مقیاس متغیر استفاده می‌کنیم.

$$GR=\{(X,Y):\exists(m,w),y_w\leq D(m,w)x_m\}$$

$$=\left\{(X,Y):\exists(m,w),\exists n\in K:y_w\leq\frac{y_{nw}}{x_{nm}}x_m\right\}$$

$$=\bigcup_{n\in K}\left\{(X,Y):\exists(m,w),y_w\leq\frac{y_{nw}}{x_{nm}}x_m\right\}$$

$$=\bigcup_{n\in K}\left\{\begin{array}{l}(X,Y):\exists\lambda\geq 0:\\ \lambda x_{nm}\leq x_m,\lambda y_{nw}\geq y_w\end{array}\right\}$$

$$=\bigcup_{n\in K}\left\{\begin{array}{l}(X,Y):\lambda X_n\preceq X,\lambda Y_n\succeq Y\\ ,\lambda\geq 0\end{array}\right\}\qquad(٤)$$

همان‌طور که در قبل اشاره شد مجموعه امکان تولید GR در اصول معروف شمول مشاهدات و بی‌کرانی اشعه صدق می‌کند ولی اصل تحدب برای آن برقرار نیست لذا می‌توان گفت GR متناظر مجموعه امکان تولید FDH_c است البته با حفظ تفاوت اساسی در اصل امکان‌پذیری که در GR با اصل امکان پذیری در حالت استاندارد وجود دارد. اما در مورد اصل امکان پذیری می‌توان گفت که این اصل به صورت گسترده‌تری برای GR برقرار است. ابتدا لازم به ذکر است که یادآور شویم اصل امکان‌پذیری در هر مجموعه امکان تولید از تعریف غالب بودن یک واحد بر واحد دیگر (یعنی رابطه "$\leq$") در آن مجموعه، منتج می‌شود. در مجموعه امکان تولید FDH_c [5] [۵] یک واحد $A=(X_A,Y_A)$ غالب بر واحد (X,Y) است اگر

$$\forall(m,w)\in Z\qquad x_{Am}\leq x_m,y_{Aw}\geq y_w$$

اما در مجموعه امکان تولید GR واحد $A=(X_A,Y_A)$ غالب (در این مجموعه غالب بودن را با" $\preceq$ " نشان می‌دهیم و می‌خوانیم غالب قوی) بر واحد (X,Y) است اگر

$$\exists(m,w)\qquad\frac{y_{Aw}}{x_{Am}}\geq\frac{y_w}{x_m}$$

[5] Free Disposal Hull

اکنون ما مجموعه امکان تولید $\overline{GR}$ را با حذف اصل بی‌کرانی اشعه از GR و با استفاده از فرم (۴) به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\overline{GR} = \bigcup_{n\in K}\{(X,Y): \exists(m,w), x_{nm} \le x_m, y_{nw} \ge y_w\}$$
$$= \bigcup_{n\in K}\{(X,Y): X_n \preceq X, Y_n \succeq Y\}$$
$$= \bigcup_{n\in K}\left\{\begin{array}{l}(X,Y): \sum_{n\in K}\lambda X \preceq X, \sum_{n\in K}\lambda Y_n \succeq Y, \\ \lambda \in \{۰,۱\}\end{array}\right\} \quad (۵)$$

نشان می‌دهیم که مجموعه امکان تولید $\overline{GR}$ در خاصیت شمول مشاهدات، اصل امکان‌پذیری ورودی – خروجی صدق می‌کند. این مجموعه همانند GR در خاصیت تحدب صدق نمی‌کند.

گزاره ٦. به ازای تعداد متناهی واحد مشاهده شده مجموعه امکان تولید $\overline{GR}$ زیر مجموعه GR است.

اثبات: فرض کنیم $(X,Y) \in \overline{GR}$ آنگاه $n \in K, (\mathrm{m},\mathrm{w}) \in Z$ وجود دارد به طوری که $x_{nm} \le x_m, y_{nw} \ge y_w$ بنابراین از این $\frac{y_w}{x_m} \le \frac{y_{nw}}{x_{nm}} \Rightarrow (X,Y) \in GR$ گزاره اثبات می‌شود.

گزاره ۷: مجموعه امکان تولید $\overline{GR}$ در خاصیت: الف) تحدب ب) بی‌کرانی اشعه، صدق نمی‌کند.

اثبات: الف) ابتدا با توجه تعریف $\overline{GR}$ سر راست است که این مجموعه در اصل شمول مشاهدات صدق می‌کند. لذا با در نظر گرفتن مثال (۱) و گزاره (۵) می‌توان گفت که واحدهای $A=(۱,۳,۲), B=(۲,۱,۲)$ متعلق به $\overline{GR}$ می‌باشد. اما ترکیبات محدب این دو واحد متعلق به GR نیست بنابراین متعلق به $\overline{GR}$ هم نیست.

ب) فرض کنیم $x_{km} = \min_{n\in K}\{x_{nm}\}$ آنگاه سر راست است که $\lambda(\mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k)$, به ازای $\lambda \in (0,1)$ متعلق به $\overline{GR}$ نیست.

تعریف: اندازه کارایی شعایی واحد $(\mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k) \in \overline{\mathrm{GR}}$ در ماهیت ورودی تحت مجموعه امکان تولید $\overline{GR}$ را با θ_k^* نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta_k^* = \min\theta$$
$$s.t: \quad (\theta X, Y) \in \overline{GR} \qquad (٦)$$

برای محاسبه‌اندازه کارایی بالاو ارتباط آن با اندازه کارایی قوی تعریف شده در (۲) ابتدا اندازه کارایی قوی را با استفاده از تعریف کارایی در تکنولوژی متغیر بدست می‌آوریم.

اندازه کارایی کامل واحد Kام با توجه به فرض بازده به مقیاس متغیر از رابطه $E_k(V,U) = \frac{UY_k + \sigma}{VX_k}$ محاسبه می‌شود. آنگاه می‌توان گفت که‌اندازه کارایی نسبی این واحد به ازای بردار وزنی (U,V) به صورت $\min_{n\in K}\{\frac{UY_k+\sigma}{VX_k}\Big/\frac{UY_n+\sigma}{VX_n}\}$ است. لذا اندازه کارایی قوی مطرح شده در [۹] با تکنولوژی با بازده به مقیاس متغیر از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$h_k^* = \min_{(V,U)}\min_{n\in K}\{\frac{UY_k+\sigma}{VX_k}\Big/\frac{UY_n+\sigma}{VX_n}\} \qquad (۷)$$

اکنون به ازای هر دو واحد kام و nام قرار می‌دهیم:

$$\bar{r}_{kn}(\mathrm{V},\mathrm{U}) = \{\frac{UY_k+\sigma}{VX_k}\Big/\frac{UY_n+\sigma}{VX_n}\} \qquad (۸)$$

گزاره ۸: اگر $\bar{r}_{kn}^* = \min_{(V,U)}\{\frac{UY_k+\sigma}{VX_k}\Big/\frac{UY_n+\sigma}{VX_n}\}$ باشد آنگاه $\bar{h}_k^* = \min_{n\in K}\{\bar{r}_{kn}^*\}$ است.

اثبات: ابتدا به برهان خلف فرض کنیم به ازای واحد q ام $\bar{h}_k^* > \bar{r}_{kq}^*$ باشد، قرار می‌دهیم

$\bar{r}_{kq}^* = \bar{r}_{kq}(V_1, U_2)$ و این با مینیمم بودن $\bar{h}_k^*$ در تناقض است. بلعکس فرض کنیم $\bar{r}_{kq}^* > \bar{h}_k^*$ باشد

اکنون فرض کنیم $\bar{h}_k^* = \dfrac{\bar{U}Y_k + \sigma}{VX_k} \Big/ \dfrac{\bar{U}Y_l + \sigma}{VX_l}$

از این جا داریم $\bar{r}_{kl}^*(\bar{V}, \bar{U}) = \bar{h}_k^* > \bar{r}_{kq}^*$ و این با مینیمم بودن $\bar{r}_{kq}^*$ در تناقض است، لذا $\bar{h}_k^* = \min_{n \in K}\{\bar{r}_{kn}^*\}$ است.

با به کار بردن تبدیلات کسری رابطه (۸) به مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\bar{r}_{kn}^* = \min\ & UY_k + \sigma \\
s.t.\ & VX_k = ۱ \\
& UY_n - VX_n + \sigma = ۰ \\
& V, U \geq 0
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

همچنین دوگان مدل بالا به صورت مدل (۱۰) است:

$$
\begin{aligned}
\bar{r}_{kn}^* = \max\ & \theta \\
s.t.:\ & X_n \geq \theta X_k \\
& Y \leq Y_k \\
& \theta \ \text{آزاد}
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

در صورتی که $Y_n \leq Y_k$ باشد آنگاه

$\bar{r}_{kn}^* = \min\{\frac{x_{nm}}{x_{km}}, m \in I\}$ و لذا

$$\bar{h}_k^* = \min_{n \in K}\{\min\{\frac{x_{nm}}{x_{km}}, m \in I\}\} \tag{۱۱}$$

و هرگاه $Y_n \leq Y_k$ بر قرار نباشد مساله (۱۰) نشدنی است. اما در محاسبه $\bar{h}_k^*$ در رابطه (۱۱) خللی ایجاد نمی‌شود از آن جایی که $\bar{r}_{kk}^* = 1$ همواره برقرار است لذا $\bar{h}_k^* = \min_{n \in K}\{\bar{r}_{kn}^*\} \leq 1$ می‌باشد بنابراین در حالت $Y_n > Y_k$ با حذف این قیدها مقدار $\bar{h}_k^*$ همواره قابل محاسبه و دست نخورده باقی می‌ماند.

می‌دانیم که رابطه‌ای صریح برای محاسبه اندازه کارایی مطرح شده در (۶) بیان نشده است. اما رابطه (۱۱) فرم دیگر اندازه کارایی قوی با بازده به مقیاس متغیر را بیان می‌کند. از این جا برای محاسبه کارایی در مجموعه امکان تولید $\overline{GR}$ رابطه (۱۱) فراهم شده است.

مثال ۱. فرض کنیم ۶ واحد تصمیم‌گیرنده داریم که با مصرف دو ورودی یک خروجی را تولید کنند که در جدول (۱) نشان داده شده‌اند از کارایی معمولی و اندازه کارایی قوی این واحدها در جدول (۲) محاسبه شده است.

جدول ۱ – داده‌های ورودی و خروجی در مثال (۱)

DMU	A	B	C	D	E	F
ورودی۱	۲	۱	۱	۳	۵	۴
ورودی۲	۷	۲	۱	۳	۴	۵
خروجی۱	۸	۵	۱	۴	۷	۸
خروجی۲	۵	۸	۸	۷	۴	۱

جدول ۲ – اندازه کارایی و کارایی قوی برای واحدهای داده شده در مثال (۱) تحت مدل‌های مورد نظر

DMU / $Models \downarrow$	A	B	C	D	E	F
CCR	۰.۸۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰.۵۵۲۱	۰.۷۰۰۰	۰.۶۴۰۰
BCC	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰.۵۸۳۳	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰
FDH_C	۰.۸۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰.۵۸۳۳	۰.۷۰۰۰	۰.۶۴۰۰
FDH_V	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰.۶۶۶۷	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰
GR	۰.۰۸۹۳	۰.۵۰۰۰	۰.۲۰۰۰	۰.۲۶۶۷	۰.۱۰۰۰	۰.۲۵۰۰
$\overline{GR}$	۰.۴۰۰۰	۰.۲۰۰۰	۰.۱۴۲۹	۰.۴۲۸۶	۰.۵۷۱۴	۰.۷۱۴۳

می‌دانیم که مدل GR متناظر مدل‌های CCR و FDH_c ساخته شده است یعنی اصل بی‌کرانی اشعه همچنان در این سه مجموعه امکان تولید برقرار است. از داده‌های جدول (۲) یعنی نتایج اندازه‌های کارایی معمولی برای مدل‌های CCR و FDH_c در سطر اول و دوم نشان دهنده آن است که واحدهای B و C کارا هستند در حالی که هیچ کدام از واحدهای تحت ارزیابی تحت مدل GR کارا نیستند و این به خاطر دیدگاه بدبینانه مورد استفاده در ساخت این مدل است. همچنین اندازه‌های کارایی قوی برای همه واحدها به شدت افت کرده است و این به خاطر گسترش مجموعه امکان تولید جدید GR است که شامل مجموعه‌های امکان تولید معمول تحلیل پوششی داده‌ها است. در مقایسه اندازه کارایی قوی واحدها تحت $\overline{GR}$ با انداز کارایی تحت BCC و FDH_v می‌بینیم همه واحدها به جز واحد D تحت BCC و FDH_v کارا هستند اما هیچ یک از واحدها تحت $\overline{GR}$ کارا نمی‌باشند. همان‌طور که در چکیده گفته شده یکی از اهداف اصلی [۹] و این تحقیق ایجاد تمایز بین اندازه کارایی واحدهای تحت ارزیابی بود آشکارا این ویژگی در مدل ارایه شده وجود دارد زیرا در نظر گرفتن کمترین اندازه کارایی ممکن برای واحدها همواره باعث می‌شود، واحدها اندازه کارایی کمتر از یک داشته باشند و این خود منجر به قدرت تفکیک بالا برای مدل می‌شود.

فهرست منابع

[1] Banker RD, Charnes A, Cooper WW (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis.Management Science..

[2] Charnes A, Cooper WW and Rhodes E (1978). 'Measuring the Efficiency of Decision Making Units', European Journal of Operational Research.

[3] Charnes A, and Cooper WW (1962). Programming with linear fractional functionals, Naval Research Logistics Quarterly.

[4] Cooper William, W.Seiford Lawrence M, Tone Kaoru (2007). Data Envelopment Analysis a Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software, Springer Science Business Media.

[5] Deprins D, Simar L, Tulkens H (1984). Measuring labor-efficiency in post offices. In: Marchand M, Pestieau P, Tulkens H, editors. The performance of public enterprises. Amsterdam: Elsevier Science Publishers.

[6] Dyson RG, Allen R, Camanho AS, Podinovski VV, Sarrico CS, Shale EA (2001). Pitfalls and protocols in DEA, European Journal of Operational Research.

[7] Keeney RL, Raiffa H (1976). Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs, New York, NY: John Wiley & Sons.

[8] Khodabakhshi M and Aryavash K (2012). 'Ranking All Units in Data Envelopment Analysis', Applied Mathematics Letters.

[9] Parkan C, Wang J, Wu D, Wei G (2012). Data envelopment analysis based on maximin relative efficiency criterion. Comput. Oper.