دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

توسیع شعاع عددی برای عملگرها در فضای هیلبرت C^*–مدول

محسن شاه حسینی[۱*]، بهارک موسوی[۲]

[۱] استادیار، گروه ریاضی، واحد شهر قدس، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
[۲] استادیار، گروه ریاضی، واحد صفادشت، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۸/۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۰

چکیده

در این مقاله ابتدا تعریف جدیدی از شعاع عددی برای عملگرهای دارای الحاق بر روی یک فضای هیلبرت C^*–مدول ارایه و سپس روابطی بین نرم عملگری با این شعاع عددی جدید معرفی می‌شود. این نامساوی‌ها به عنوان توسیعی از نامساوی‌های مشهور ثابت شده توسط سایر ریاضیدانان برای عملگرهای خطی و کران‌دار تعریف شده بر روی فضای هیلبرت می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: عملگرهای خطی و کران دار، نرم عملگری، برد عددی، شعاع عددی، فضای هیلبرت C^*–مدول.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: mohsen_shahhosseini@yahoo.com

۱- مقدمه

در طول تاریخ علم ریاضی نامساوی‌های کلاسیک در مجموعه های عددی بسیار پرکاربرد و با ارزش می‌باشند. در این چند دهه باتوجه به اهمیت بحث نامساوی‌ها تلاش‌های فراوانی، در راستای توسیع و یافتن روابط نامساوی مشابه در آنالیز ماتریسی به عنوان یکی از شاخه‌های کاربردی آنالیز تابعی صورت پذیرفته است. به ویژه این تلاش‌ها معرفی شعاع عددی برای یک عملگر در مجموعه تمام عملگرهای خطی و کران‌دار بر روی یک فضای هیلبرت می‌باشد. فرض‌کنید C^*-جبر تمام عملگرهای خطی و کران‌دار بر روی فضای هیلبرت H را با $B(H)$ نشان دهیم. اگر T عملگری از $B(H)$ باشد، آن گاه برد عددی برای این عملگر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{w}(\mathrm{T}) = \{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}.$$

یکی از توسیع های مستقیم برد عددی، یافتن کوچکترین کران بالا در بین اندازه اعضای این مجموعه است که به نام شعاع عددی و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega(T) = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}.$$

با توجه به تعریف شعاع عددی نتیجه می‌شود که این تعریف یک نرم است و همچنین این نرم به‌صورت معادل با نرم عملگری می‌باشد. به عبارت دیگر برای عملگر T از $B(H)$، اگر نرم عملگری به صورت

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

باشد، آن‌گاه اولین نامساوی اساسی و مهم بین نرم عملگری و شعاع عددی به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\|T\|}{2} \leq \omega(T) \leq \|T\|. \qquad (۱)$$

همچنین ثابت گردید که مجموعه برد عددی یک عملگر از $B(H)$ شامل بر پوسته محدب مجموعه طیف آن عملگر است. اگر $\rho(T)$ شعاع طیفی عملگر T از $B(H)$ باشد، آن‌گاه می‌توان نامساوی پایه‌ای دیگری را به صورت زیر بیان داشت:

$$\rho(T) \leq \omega(T) \leq \|T\|. \qquad (۲)$$

با توجه به کاربرد وسیع شعاع طیفی، شعاع عددی به عنوان تقریبی از آن می‌تواند در مواردی سودمند باشد. برگر [۱] در سال ۱۹۶۵ ثابت کرد اگر عملگر T عضوی از $B(H)$ و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$\omega(T^n) \leq \omega^n(T).$$

در سال ۱۹۶۹ هال بروک [۵] برای دو عملگر دلخواه A, B از $B(H)$ ثابت کرد

$$\omega(AB) \leq 4\,\omega(A)\omega(B).$$

در صورت جابجایی دو عملگر با هم یعنی $AB = BA$، نامساوی فوق به صورت زیر بهبود می‌یابد

$$\omega(AB) \leq 2\,\omega(A)\omega(B).$$

تلاش‌های زیادی توسط محققین در جهت تظریف نامساوی‌های بیان شده، به ویژه نامساوی‌های موجود در روابط (۱) و (۲) انجام شده است. به عنوان مثال، کیتانه [۶] در سال ۲۰۰۳ نامساوی سمت راست در رابطه شماره (۱) را به صورت زیر بهبود داد

$$\omega(T) \leq \frac{1}{2}\left(\|T\| + \|T^2\|^{\frac{1}{2}}\right).$$

در سال ۲۰۰۵، کیتانه [۷] بهبودی از رابطه شماره (۱) به صورت زیر ارایه نمود.

$$\frac{\|TT^* + T^*T\|}{4} \leq \omega^2(T) \leq \frac{\|TT^* + T^*T\|}{2}.$$

همچنین دراگومیر [۳] در سال ۲۰۰۷، توانست یک نامساوی به صورت زیر ثابت کند

$$\omega^2(T) \leq \frac{1}{2}\left(\omega(T^2) + \|T\|^2\right).$$

برای مطالعه و آشنایی بیشتر با نامساوی‌های مربوط به شعاع عددی می‌توان به منبع [۴] و همچنین در خصوص تعمیم قضایای شعاع عددی به منابع [۲، ۸،۱۰] رجوع کرد. ساختار این مقاله به شرح زیر است.
در فصل دوم تعاریف اولیه برای برد عددی و شعاع عددی مربوط به عملگرهای دارای الحاق تعریف شده بر روی یک فضای هیلبرت C^*-مدول بیان و سپس به بررسی

تعدادی از خواص آنها پرداخته می‌شود. همچنین در این فصل ابزارهای مورد نیاز جهت استفاده در فصل سوم مقاله بیان می‌شود. در فصل سوم تعدادی از نامساوی‌های مشهور برای عملگرهای موجود در $\mathrm{B(H)}$ که در گذشته توسط محققین ثابت شده است به صورت نامساوی‌هایی برای عملگرهای دارای الحاق تعریف شده بر روی یک فضای هیلبرت C^*–مدول توسیع و ثابت می‌شود.

۲- تعاریف اولیه و مقدمات مورد نیاز

در این بخش به بیان تعاریف و مقدمات مورد نیاز برای ادامه این تحقیق پرداخته می‌شود. در تمامی این مقاله $\mathrm{L(E)}$ به عنوان مجموعه تمام عملگرهای دارای الحاق بر روی فضای هیلبرت C^*–مدول E در نظر گرفته می‌شود.

لم۲-۱(کوشی شوارتز). اگر x, y دو عضو از فضای هیلبرت C^*–مدول E باشند، آن‌گاه

$$\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

برهان: به منبع [9] رجوع شود.

اکنون در این قسمت تعریفی جدید از برد عددی و شعاع عددی برای عملگرها در $\mathrm{L(E)}$ به صورت زیر ارایه می‌شود

$$\mathrm{w(T)} = \{\langle \mathrm{T}x, x\rangle : \|x\| = 1\}.$$

تعریف۲-۳. اگر عملگر T در $\mathrm{L(E)}$ باشد، آن‌گاه شعاع عددی این عملگر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(\mathrm{T}) = \sup\{\|\langle \mathrm{T}x, x\rangle\| : \|x\| = 1\}.$$

با توجه به تعریف فوق، به سادگی می‌توان نشان داد که $\delta(.)$ یک نرم است.

لم ۲-۴. فرض کنید عملگر T در $\mathrm{L(E)}$ باشد، در این‌صورت

$$\delta(\mathrm{T}) \leq \|\mathrm{T}\|.$$

برهان: با استفاده از تعریف۲-۳ داریم

$$\delta(\mathrm{T}) = \sup\{\|\langle \mathrm{T}x, x\rangle\| : \|x\| = 1\},$$

و با کمک لم۲-۱ حکم به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\delta(\mathrm{T}) \leq \sup\{\|\mathrm{T}x\| : \|x\| = 1\}.$$

لم۲-۵. اگر عملگر T در $\mathrm{L(E)}$ یک عملگر خود الحاق باشد، آن‌گاه داریم

$$\delta(\mathrm{T}) = \|\mathrm{T}\|.$$

برهان: به منبع [۹] رجوع شود.

۳- تعدادی‌نامساوی‌جدید

در این فصل تعدادی از نامساوی‌های مشهور شعاع عددی برای عملگرهای در $\mathrm{B(H)}$ به صورت نامساوی‌هایی برای عملگرهای موجود در $\mathrm{L(E)}$ توسیع داده می‌شوند.

قضیه۳-۱. اگر عملگر T در $\mathrm{L(E)}$ باشد، آن‌گاه

$$\|\mathrm{T}\| \leq 2\,\delta(\mathrm{T})$$

برهان: فرض کنید x عضوی از E و نیز $\|x\| = 1$ باشد، در این‌صورت می‌یابیم

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{T}x + \mathrm{T}^*x, \mathrm{T}x + \mathrm{T}^*x\rangle &= \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}x\rangle \\ &+ \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}^*x\rangle \\ &+ \langle \mathrm{T}^*x, \mathrm{T}x\rangle \\ &+ \langle \mathrm{T}^*x, \mathrm{T}^*x\rangle\end{aligned}$$

و به‌طور مشابه

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{T}x - \mathrm{T}^*x, \mathrm{T}x - \mathrm{T}^*x\rangle &= \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}x\rangle - \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}^*x\rangle \\ &- \langle \mathrm{T}^*x, \mathrm{T}x\rangle \\ &+ \langle \mathrm{T}^*x, \mathrm{T}^*x\rangle\end{aligned}$$

از مجموع طرفین دو تساوی فوق می‌یابیم

$$\begin{aligned}2(\langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}x\rangle + \langle \mathrm{T}^*x, \mathrm{T}^*x\rangle) &= \\ \langle \mathrm{T}x + \mathrm{T}^*x, \mathrm{T}x + \mathrm{T}^*x\rangle &+ \\ \langle \mathrm{T}x - \mathrm{T}^*x, \mathrm{T}x - \mathrm{T}^*x\rangle&\end{aligned} \quad (۳)$$

و از آنجا که

$$0 \leq \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}x\rangle \leq \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}x\rangle + \langle \mathrm{T}^*x, \mathrm{T}^*x\rangle$$

می‌یابیم

$$2\langle Tx, Tx\rangle \le \langle Tx+T^*x, Tx+T^*x\rangle + \langle Tx-T^*x, Tx-T^*x\rangle,$$

در نتیجه

$$2\|Tx\|^2 \le \|Tx+T^*x\|^2 + \|Tx-T^*x\|^2.$$

با توجه به نامساوی اخیر و با گرفتن سوپریموم بر روی x می‌یابیم

$$2\|T\|^2 \le \|T+T^*\|^2 + \|T-T^*\|^2,$$

و چون $T+T^*$ عملگری خود الحاق است، با کمک لم۲–۵ می‌یابیم.

$$2\|T\|^2 \le \delta^2(T+T^*) + \|T-T^*\|^2.$$

اکنون با توجه به دلخواه بودن عملگر T، با قرار دادن iT در نامساوی قبل می‌یابیم

$$2\|T\|^2 \le \delta^2(T-T^*) + \|T+T^*\|^2,$$

در نتیجه

$$2\|T\|^2 \le \delta^2(T-T^*) + \delta^2(T+T^*).$$

حال از آنجا که $\delta(.)$ نرم می‌باشد، حکم به وضوح برقرار است.

نتیجه۳–۲. اگر A, B دوعملگر از $L(E)$ باشند، آن‌گاه $\delta(AB) \le 4\delta(A)\delta(B)$.

برهان: طبق لم ۲–۴ چون $\delta(AB) \le \|AB\|$ و با کمک خاصیت زیر ضربی برای نرم عملگری نتیجه می‌شود

$$\delta(AB) \le \|A\|\|B\|,$$

و چون $\|A\| \le 2\delta(A)$ و $\|B\| \le 2\delta(B)$، حکم نتیجه می‌شود.

در قضیه بعد تظریفی از نامساوی بیان شده در قضیه۳–۱ نشان داده می‌شود.

قضیه۳–۳. اگر عملگر T در $L(E)$ باشد، آن‌گاه

$$\|TT^* + T^*T\| \le \frac{\|T+T^*\|^2 + \|T-T^*\|^2}{2} \le 4\delta^2(T)$$

برهان: فرض کنید x عضوی از E و نیز $\|x\| = 1$ باشد. با کمک رابطه (۳) داریم

$$2(\langle Tx, Tx\rangle + \langle T^*x, T^*x\rangle) = \langle Tx+T^*x, Tx+T^*x\rangle + \langle Tx-T^*x, Tx-T^*x\rangle,$$

و به طور معادل

$$2(\langle T^*Tx, x\rangle + \langle TT^*x, x\rangle) = \langle Tx+T^*x, Tx+T^*x\rangle + \langle Tx-T^*x, Tx-T^*x\rangle.$$

همچنین

$$2\|\langle (T^*T+TT^*)x, x\rangle\| \le \|Tx+T^*x\|^2 + \|Tx-T^*x\|^2.$$

حال با توجه به نامساوی اخیر و با گرفتن سوپریموم بر روی x می‌یابیم

$$2\|T^*T+TT^*\| \le \|T+T^*\|^2 + \|T-T^*\|^2.$$

مشابه با آن‌چه در روند اثبات قضیه۳–۱ انجام گردید، حکم بدست می‌آید.

در قضیه بعد نشان داده که می‌توان برای عملگرهای خاصی در $L(E)$، یک کران بالا برای مقدار نامنفی $\|T\| - \delta(T)$ به‌دست آورد.

قضیه۳–٤. فرض کنید λ عددی مختلط، I عملگر همانی و T عملگری دلخواه در $L(E)$ باشند، در این صورت اگر $\|T-\lambda I\| \le r$، آن‌گاه

$$\|T\| - \delta(T) \le \frac{r^2}{2|\lambda|}$$

برهان: فرض کنید x عضوی از E و نیز $\|x\| = 1$ باشد. با کمک فرض $\|\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}\| \le \mathrm{r}$ در قضیه می‌یابیم

$$\|\langle(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I})x, (\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I})x\rangle\| \le \mathrm{r}^2$$

به طور معادل

$$\|\langle\mathrm{T}x, \mathrm{T}x\rangle + |\lambda|^2\langle x, x\rangle - 2\mathrm{Re}\langle\mathrm{T}x, x\rangle\lambda\| \le \mathrm{r}^2$$

در نتیجه

$$\|\langle\mathrm{T}x, \mathrm{T}x\rangle + |\lambda|^2\langle x, x\rangle\| \le \mathrm{r}^2 + 2|\lambda|\,\|\mathrm{Re}\langle\mathrm{T}x, x\rangle\|$$

حال چون $\|\mathrm{Re}\langle\mathrm{T}x, x\rangle\| \le \delta(\mathrm{T})$، لذا از نامساوی اخیر داریم

$$\|\langle\mathrm{T}x, \mathrm{T}x\rangle + |\lambda|^2\langle x, x\rangle\| \le \mathrm{r}^2 + 2\delta(\mathrm{T})\,|\lambda|.$$

با توجه به نامساوی آخر و با گرفتن سوپریموم بر روی x از آن، می‌یابیم

$$\|\mathrm{T}^*\mathrm{T} + |\lambda|^2\mathrm{I}\| \le \mathrm{r}^2 + 2\delta(\mathrm{T})\,|\lambda|.$$

در نتیجه

$$\|\mathrm{T}\|^2 + |\lambda|^2 \le \mathrm{r}^2 + 2\delta(\mathrm{T})\,|\lambda|. \qquad (۴)$$

حال از آنجا که $2|\lambda|\,\|\mathrm{T}\| \le \|\mathrm{T}\|^2 + |\lambda|^2$، لذا

$$2|\lambda|\,\|\mathrm{T}\| \le \mathrm{r}^2 + 2\delta(\mathrm{T})\,|\lambda|.$$

حال به وضوح حکم از نامساوی آخر نتیجه می‌شود.

در قضیه بعد تظریفی از نامساوی بیان شده در قضیه ۳−۱ برای عملگرهایی خاص که در فاصله‌ای مناسب با مضاربی از عملگر همانی هستند، نشان داده می‌شود.

قضیه۳−۵. فرض کنید λ عددی مختلط، I عملگرهمانی و T عملگری در L(E) باشند، در این صورت اگر $0 < r \le |\lambda|$ و $\|\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}\| \le \mathrm{r}$، آن‌گاه

$$\sqrt{1 - \frac{\mathrm{r}^2}{|\lambda|^2}} \le \frac{\delta(\mathrm{T})}{\|\mathrm{T}\|}\ (\le 1).$$

برهان: با کمک نامساوی (۴) در قضیه۳−۴ می‌یابیم

$$\|\mathrm{T}\|^2 + |\lambda|^2 \le \mathrm{r}^2 + 2\delta(\mathrm{T})\,|\lambda|,$$

و با تقسیم طرفین نامساوی بر مقدار مثبت $\sqrt{|\lambda|^2 - \mathrm{r}^2}$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\|\mathrm{T}\|^2}{\sqrt{|\lambda|^2 - \mathrm{r}^2}} + \sqrt{|\lambda|^2 - \mathrm{r}^2} \le \frac{2\delta(\mathrm{T})\,|\lambda|}{\sqrt{|\lambda|^2 - \mathrm{r}^2}}.$$

از آن‌جا که

$$2\|\mathrm{T}\| \le \frac{\|\mathrm{T}\|^2}{\sqrt{|\lambda|^2 - \mathrm{r}^2}} + \sqrt{|\lambda|^2 - \mathrm{r}^2},$$

لذا با کمک نامساوی اخیر می‌یابیم

$$2\|\mathrm{T}\| \le \frac{2\delta(\mathrm{T})\,|\lambda|}{\sqrt{|\lambda|^2 - \mathrm{r}^2}},$$

و به طور معادل

$$\|\mathrm{T}\| \le \frac{|\lambda|}{\sqrt{|\lambda|^2 - \mathrm{r}^2}}\,\delta(\mathrm{T}).$$

توجه شود با عنایت به مفروضات قضیه قبل، اگر

$$\frac{1}{2} \le \sqrt{1 - \frac{r^2}{|\lambda|^2}}$$

و یا به طور معادل

$$\frac{\mathrm{r}}{|\lambda|} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

باشد، آن‌گاه نامساوی فوق می‌تواند به عنوان بهبودی از نامساوی بیان شده در قضیه۳−۱ باشد.

فهرست منابع

[1] C. Berger, A strange dilatation theorem. Notices mer. Math. Soc.,**12** (1965) 590.

[2] S. S. Dragomir, Some inequalities for the norm and the numerical radius of linear operators in Hilbert Spaces, Tamkang J. Math. **39**(1) (2008), 1–7.

[3] S. S. Dragomir, Inequalities for the norm and the numerical radius of linear operators in Hilbert space, Demonstratito Math. Soc, **40**(2) (2007), 411-417.

[4] K. E. Gustafson and D. K. M. Rao, Numerical range, The field of values of linear operators and matrices, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] J. A. R. Holbrook, 'Multiplicative properties of the numerical radius in operator theory', J. reine angew. Math. 237 (1969), 166–174.

[6] F. Kittaneh, A numerical radius inequality and an estimate for the numerical radius of the Frobenius companion matrix, Studia Math. **158** (2003), 11–17.

[7] F. Kittaneh, Numerical radius inequalities for Hilbert space operator, Studia Math. **168** (2005), 73–80.

[8] F. Kittaneh, M.S. Moslehian and T. Yamazaki, Cartesian ecomposition and numerical radius inequalities, Linear Algebra Appl. **471** (2015), 46–53.

[9] E.C. Lance, Hilbert C^*-modules, London Mathematical Society Lecture Note Series, 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[10] M. Sattari and M.S. Moslehian, Inequalities for operator space numerical radius of 2×2 block matrices, J. Math. Phys. **57** (2016), 015201, 15pp.