

بکارگیری روش تانژانت فی بهبود یافته برای حل برخی از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی

محمد رضا عظیمی^{۱*}، جلیل منافیان^۲

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

^(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۱/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۳/۱۴

چکیده

در این مقاله، روش بسط تانژانت فی بهبود یافته برای حل معادلات کوندو-اسخائوس و مدل گردجیکوف-ایوانف استفاده شده است. روش بکاربرده شده، روش تحلیلی برای بدست آوردن جواب‌های واقعی از معادلات غیرخطی می‌باشند. در اینجا، روش ذکر شده برای ساخت جواب‌های سالیتمونی، متناوب، کسری، منفرد و موج‌های کوچک برای حل برخی معادلات استفاده شده است. در مقایسه با روش‌های دیگر جواب‌های بیشتری بدست آوردیم. این دسته از معادلات کاربردهای زیاد در مهندسی، فیزیک و ریاضی کاربردی دارند.

این روش پیشنهادی یک روش ساده، دقیق و مؤثر برای حل چنین مسائلی می‌باشد. از نرم افزارهای متلب و میپل برای سادگی روند محاسبات پیچیده استفاده شده است. روش بسط تانژانت فی بهبود یافته یک کاربرد گسترده‌ای برای انجام معادله‌های غیرخطی ارائه می‌کند.

واژه‌های کلیدی: روش بسط تعمیم یافته تانژانت فی؛ معادله کوندو-اسخائوس؛ مدل گردجیکوف-ایوانف؛ جواب‌های موج سالیتمونی.

۱- مقدمه

زیادی برای حل این نوع معادلات استفاده شده که هر کدام دارای مزیت‌ها و معایب خاص می‌باشند اما هنوز یک روش ایده‌آل برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی بدست نیامده که در تمام شرایط یک چنین معادلاتی را بتواند حل کند بدون آنکه عیبی در روش دیده شود. تکنیک‌های عددی همچون روش تبدیل لاپلاس [1]، تجزیه ادمیان [2]، تکرار تغییراتی [3]، هموتوبی انحرافی [4] و هموتوبی تحلیلی [5] وجود دارند. روشهای تحلیلی دیگری همچون روش تابع نمایی [6]، روش تانژانت-کوتانانت [7]، روش بسط F [8] و روش بسط تعمیم یافته G'/G [9] وجود دارند. هدف از این ارائه به دست آوردن جواب‌های واقعی برخی از معادلات دیفرانسیل جزئی بویژه معادلات کوندو-اسخائوس و مدل گردجیکوف-ایوانف می باشد. در ادامه روش تانژانت فی بهبود یافته را برای حل معادلات ذکر شده بکار می‌گیریم و جواب‌های سالیونی حاصل را لیست خواهیم کرد.

ساختار مقاله به صورت زیر سازماندهی خواهد شد در فصل دوم مقدمات روش تحلیلی تانژانت فی بهبود یافته را ارائه می‌نماییم.

در فصل سوم به کمک روش فصل دوم معادله کوندو-اسخائوس را حل می‌نماییم.

در فصل چهارم به کمک روش تانژانت فی بهبود یافته مدل گردجیکوف-ایوانف را مورد ارزیابی قرار داده و جواب‌های واقعی از آن را بدست می‌آوریم.

در فصل پنجم تفسیر فیزیکی از جوابها را خواهیم آورد. در فصل ششم نتایج بکارگیری از روش فوق‌الذکر را خواهیم آورد.

۲- روش تانژانت فی بهبود یافته

روش بسط تانژانت فی بهبود یافته، یک روش تحلیلی می‌باشد که اولین بار توسط نویسندگانی در [10]، ارائه و توسعه داده شده است. این روش یک روش توانا برای حل معادله‌های دیفرانسیل جزئی می‌باشد. جزئیات روش را با گام‌های زیر به طور مفصل توضیح می‌دهیم:

گام ۱. شکل معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی با متغیرهای مستقل $X=(x,y,t)$ تابع وابسته $u(x,y,t)$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

معادلات غیر خطی در مدل‌بندی بسیاری از مسائل فیزیک و مهندسی ظاهر می‌شوند و از این رو سهم وسیعی از معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات مشتقات جزئی که در حیطه ریاضیات کاربردی مطرح می‌شوند به این خانواده اختصاص یافته است. پیشرفت‌هایی که در بیشتر شاخه‌های ریاضیات کاربردی صورت گرفته مرهون تلاش‌هایی بوده است که برای شناخت و حل مدل‌های غیرخطی صورت گرفته است. هرچند روش‌های عددی مانند روش تفاضلات متناهی، روش اجزا متناهی و روش‌های تبدیل انتگرال (مانند لاپلاس و فوریه) توانسته‌اند در معادلات تابعی خطی به کار گرفته شوند ولی در معادلات غیر خطی، مشکلات عدیده‌ای در اجرای این روشها وجود دارد. ویژگی مناسب روش‌های عددی و تبدیلات انتگرال آن است که قادر هستند مسائل پیچیده را به صورتی ساده‌تر تبدیل و در چارچوبی جدید حل کنند، با این وجود هر دو دسته معایبی نیز دارند. مشکل استفاده از تبدیلات انتگرال محدود بودن حوزه کارایی آنها است زیرا این تبدیل باید توانایی عمل روی تمام مولفه‌های معادله مورد بررسی را داشته باشد و نیز با اعمال این تبدیل باید بتوانیم به معادله‌ای ساده‌تر برسیم که در بسیاری از موارد این نتیجه حاصل نمی‌شود. روش‌های عددی نیز جواب را به صورت نقاط گسسته در اختیار ما قرار می‌دهند و نتیجه اعمال یک فرایند عددی روی مساله‌ای خاص، یک تابع جدولی تقریبی است که در بسیاری از موارد درک کلی از جواب را مشکل می‌کند. قبل از پرداختن به اصل موضوع لازم است اشاره کنیم که هیچ یک از رویکردهای عددی و تحلیلی یا نیمه تحلیلی برتری کلی نسبت به یکدیگر ندارند بلکه این مسائل و معادلات موجود هستند که میزان بهتر بودن یک روش نسبت به دیگری را تعیین می‌کنند. آن چه مسلم است پویایی تحقیقات در زمینه پیدا کردن روش‌های جدیدتر و موثرتر است. دانشمندان به دنبال روش‌های جدیدی هستند که بتوانند حداقل در حیطه‌های خاصی، کاراتر از روش‌های شناخته شده عمل کنند. اساساً معادلات دیفرانسیل جزئی کاربرد زیادی در علوم مهندسی، فیزیک و... دارد. کاربرد معادلات دیفرانسیل جزئی باعث شده که این نیز همچون معادلات دیفرانسیل معمولی دارای اهمیت خاصی باشد. روش‌های عددی، نیمه عددی، تحلیلی و نیمه تحلیلی

$$\varphi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{-a + \sqrt{c^2 - a^2}}{c} \tan \left(\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{2} (\xi + C) \right) \right]$$

دسته ۵. وقتی $b - c \neq 0, a = 0$ و $\Delta = b^2 - c^2 > 0$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{b+c}{b-c}} \tan \left(\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{2} (\xi + C) \right) \right]$$

دسته ۶. وقتی $c = 0$ و $a = 0$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = \tan^{-1} \left[\frac{e^{2b\xi} - 1}{e^{2b\xi} + 1}, \frac{2e^{b\xi}}{e^{2b\xi} - 1} \right]$$

دسته ۷. وقتی $c = 0$ و $b = 0$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = \tan^{-1} \left[\frac{e^{2a\xi} - 1}{e^{2a\xi} + 1}, \frac{2e^{a\xi}}{e^{2a\xi} - 1} \right]$$

دسته ۸. وقتی $a^2 + b^2 = c^2$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{a\xi + 2}{(b-c)a\xi} \right]$$

دسته ۹. وقتی $a = b = c = ka$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = \tan^{-1} [e^{ka\xi} - 1]$$

دسته ۱۰. وقتی $b = -ka$ و $a = c = ka$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{e^{ka\xi}}{1 - e^{2a\xi}} \right]$$

دسته ۱۱. وقتی $c = a$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{(a+b)e^{b\xi} - 1}{(b-a)e^{b\xi} + 1} \right]$$

دسته ۱۲. وقتی $a = c$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{(b-c)e^{b\xi} - 1}{(b+c)e^{b\xi} + 1} \right]$$

دسته ۱۳. وقتی $b = -c$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{(b-c)e^{b\xi} - 1}{(b+c)e^{b\xi} + 1} \right]$$

دسته ۱۴. وقتی $b = -c$ **آنگاه**

$$P = (u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots)$$

که با استفاده از متغیر موج $\xi = x + y - ct$ که C ثابتی است که بعداً مشخص خواهد شد، به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌گردد:

$$Q(u, -cu', u'', u''', u''', \dots) = 0$$

گام ۲. جواب موج رفت و برگشتی می‌تواند به صورت زیر بیان گردد

$$u(\xi) = \sum_{k=-m}^m A_k [p + \tan(\phi/2)]^k \quad (۲)$$

که p و A_k و $B_k = A_{-k}$ ثابت‌هایی هستند که بعداً مشخص خواهند شد، چنانچه $B_m \neq 0, A_m \neq 0$ و $\phi(\xi)$ در معادله دیفرانسیل معمولی زیر صدق می‌کند:

$$\phi'(\xi) = a \sin(\phi(\xi)) + b \cos(\phi(\xi)) + c \quad (۳)$$

جواب‌های خاص از معادله بالا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

دسته ۱. وقتی $\Delta = a^2 + b^2 - c^2 < 0$ و $b - c \neq 0$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{a}{b-c} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{b-c} \tan \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} (\xi + C) \right) \right]$$

دسته ۲. وقتی $\Delta = a^2 + b^2 - c^2 > 0$ و $b - c \neq 0$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{a}{b-c} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{b-c} \tanh \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} (\xi + C) \right) \right]$$

دسته ۳. وقتی $\Delta = a^2 + b^2 > 0$ و $C = 0, b \neq 0$ **آنگاه**

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \tanh \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} (\xi + C) \right) \right]$$

دسته ۴. وقتی $\Delta = a^2 + b^2 < 0$ و $C \neq 0, b = 0$ **آنگاه**

گام ۵. معادلات جبری بدست آمده از گام ۳ را حل کرده، سپس ضرایب A_0, A_k, B_k, a, b, c را در (۲) قرار می‌دهیم. سپس می‌توانیم یک سری از جواب‌های اساسی از (۳) بدست آوریم.

۳- حل معادله کوندو-اسخائوس

در این بخش معادله کوندو-اسخائوس [11,12,13] را در نظر می‌گیریم

$$iu_t + u_{xx} - 2\sigma|\mu|^2 u + \delta^2|\mu|^4 u + 2i\delta u(|\mu|^2)_x = 0, \sigma < 0$$

که σ و δ ثابت‌های غیرصفر هستند. برای یافتن جواب واقعی از معادله کوندو-اسخائوس از تبدیل‌های زیر استفاده می‌کنیم

$$u(x, t) = u(\xi)e^{i\theta}, \theta = \alpha x + \beta t, \xi = ik(x - 2\alpha t)$$

که α عدد موج سالیتون و β بسامد سالیتون است. با استفاده از تبدیل داده شده معادله موردنظر به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌گردد

$$-(\beta + \alpha^2) - k^2 u'' - 2\sigma u^3 + \delta u^3 + \delta^2 u^5 - 4\delta k u^2 u' = 0$$

با استفاده از اصل تعادل بدست می‌آوریم $m = \frac{1}{2}$ برای رسیدن به جواب به فرم بسته از تبدیل زیر استفاده می‌کنیم معادله به ODE زیر تبدیل می‌گردد

$$-4(\beta + \alpha^2)v + kv^{12} - 2k^2 v^2 v'' - 8\sigma v^3 + 4\sigma^2 v^4 - 8\delta k v^2 v' = 0$$

که بدست خواهد آمد: $m=1$ بنابراین با در نظر گرفتن $p=0$ فرض می‌کنیم جواب معادله دیفرانسیل معمولی بدست آمده می‌تواند به صورت زیر بیان گردد:

$$u(\xi) = A_0 + A_1 \tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right) + B_1 \cot\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)$$

با انتخاب هر ضریب از چند جمله‌ای بر حسب $\tan(\phi/2)$ مساوی صفر، یک مجموعه از معادلات جبری شامل $B_1, a, b, c, \alpha, \beta, k, A_0, A_1$ را حل می‌کنیم.

$$Y = \tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)$$

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{ae^{a\xi}}{1 - ce^{a\xi}} \right]$$

دسته ۱۵. وقتی $b=0$ و $a=c$: آنگاه:

$$\phi(\xi) = -2 \tan^{-1} \left[\frac{c\xi + 2}{c\xi} \right]$$

دسته ۱۶. وقتی $a=0$ و $b=c$: آنگاه

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} [c\xi + C]$$

دسته ۱۷. وقتی $a=0$ و $b=-c$: آنگاه

$$\phi(\xi) = -2 \tan^{-1} \left[\frac{1}{c\xi + C} \right]$$

دسته ۱۸. وقتی $a=0$ و $b=0$: آنگاه

$$\phi(\xi) = c\xi + C$$

دسته ۱۹. وقتی $b=c$: آنگاه

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{e^{a\xi} - c}{a} \right]$$

که A_0, A_k, B_k, a, b, c ثابت‌هایی هستند که بعداً مشخص خواهند شد.

$$A_0, A_k, B_k, a, b, c$$

گام ۳. مقدار m را مشخص می‌کنیم. و این مقدار با در نظر گرفتن تعادل همگن بین بالاترین مرتبه مشتق و جملات غیرخطی که در معادله دیفرانسیل معمولی بدست آمده ظاهر می‌شود مشخص می‌گردد. سپس هر ضریب را مساوی صفر قرار می‌دهیم، می‌توانیم معادلات غیرخطی شامل با استفاده از نرم‌افزار میپل ۱۳ حل کنیم.

گام ۴. مقدار m بدست آمده از گام ۳ و (۳) را در (۲) جایگذاری می‌کنیم. ضرایب مربوطه به $\tan(\phi/2)^k$ و $\cot(\phi/2)^k$ را انتخاب می‌کنیم، سپس هر ضریب را مساوی صفر قرار می‌دهیم، می‌توانیم معادلات غیرخطی شامل ضرایب موثر با استفاده از نرم‌افزار میپل ۱۳ حل کنیم. و جواب‌های بدست آمده شامل ضرایب را در سری جواب قرار می‌دهیم و جواب واقعی بدست می‌آید.

$$\begin{cases}
 Y^0 : -B_1^2(3k^2c^2 + 3k^2b^2 + 6k^2cb - 16B_1\delta kb - 16B_1\delta kc - 16B_1^2\delta^2) = 0 \\
 Y^1 : -4B_1[8\sigma - 8ka - 16\delta^2A_0]B_1^2 + (2k^2ab - 8A_0\delta kc - 8A_0\delta kb + 2k^2ac)B_1 + k^2(b+c)^2A_0 = 0 \\
 Y^2 : -2B_1[B_1(-8\delta kA_1(b+c) + 2k^2(2a^2 - b^2 + c^2)) - 48\delta^2A_0^2 + 48\sigma A_0 - 32A_0ak\delta + 8a^2 + 8\beta] + \\
 8\delta B_1^2(-4A_1\delta - kc + bk) + k(c+b)(3A_1kb + 6kaA_0 + 3kcA_1 - 8A_0^2\delta) = 0 \\
 Y^3 : -4B_1[6a^5A_1(c+b)] - 8B_1(-\delta kbA_0 + \delta kaA_1 + \delta kcA_0 - 3\sigma A_1 + 6\delta^2A_0A_1) \\
 + A_0(-16\delta^2A_0^2 + 24\sigma A_0 - 8A_0ak\delta - k^2b^2 + 8a^2 + 2k^2a^2 + 8\beta + k^2c^2) = 0 \\
 Y^4 : B_1^2(-2k^2cb + k^2c^2 + k^2b^2 + 96\delta^2A_1^2 - 16\delta kA_1b + 16\delta kA_1c) + k^2A_1^2(b+c)^2 \\
 - 32\alpha^2B_1A_1 + 192\delta^2A_0^2B_1A_1 - 4A_0(-4\delta^2A_0^3 + 8\sigma A_0^2 + 4A_0\delta kbA_1 + \\
 4A_0\delta kcA_1 + 4A_0\alpha^2 + 4A_0\beta + k^2acA_1 + k^2abA_1) - 16\delta k(b+c)B_1A_1^2 + \\
 12k^2b^2B_1A_1 - 12k^2c^2B_1A_1 - 192\sigma A_0B_1A_1 - 4k^2A_0acB_1 + 16\delta kcA_0^2B_1 + 4k^2A_0abB_1 - 16\delta kbA_0^2B_1 = 0 \\
 Y^5 : -4A_1[A_0(-16\delta^2A_0^2 + 24A_0\sigma + 8A_0\delta ka + 8A_1\delta kb + 2a^2k^2 + 8A_1B_1(\delta ka - 6\delta^2A_0 + 3\sigma) \\
 - 6B_1bak^2 + 6B_1cak^2) = 0 \\
 Y^6 : -2A_1[A_1(-8B_1bk\delta + 48A_0\sigma - 48\delta^2A_0^2 + 8\beta + 8a^2 + 2a^2k^2 - k^2b^2 + 32A_0\delta ka + k^2c^2 + 8B_1ck\delta) + \\
 3k^2B_1(b-c)^2 - 2(b-c)kA_0(3ka + 4A_0\delta)] = 0 \\
 Y^7 : -32A_1^3(-2\delta^2A_0 + \sigma + \delta ka) - 4k^2A_0A_1(b-c)^2 + 8kA_1^2(b-c)(ak + 4A_0\delta) = 0 \\
 Y^8 : 16\delta^2A_1^4 - 3k^2A_1^2(b-c)^2 + 16\delta kA_1^3(b-c) = 0
 \end{cases}$$

با حل معادلات جبری از سیستم بالا مجموعه‌ای از ضرایب به صورت زیر بدست می‌آیند.

مجموعه اول:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -\frac{9c\sigma}{2\delta^2B_1(5\pm\sqrt{7})}, b = c, c = c, & k &= \frac{2\delta B_1}{rc}(r \pm \sqrt{v}), \alpha = \alpha, \\
 \Delta &= a^2 + b^2 - c^2, A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = B_1 & \beta &= -\frac{(i\cdot\alpha^i\delta^i + 36\sigma^i)(r \pm \sqrt{v}) + i8\alpha^i\delta^i + 27\sigma^i}{8\delta^i(16 \pm \sqrt{v})}
 \end{aligned}$$

با استفاده از دسته ۱۸ از فصل دوم نگاه جواب به صورت زیر خواهد بود.

$$u_1(x,t) = \left[\frac{-\frac{9c\sigma}{2\delta^2B_1^2(5\pm\sqrt{7})}}{-\frac{9c\sigma}{2\delta^2B_1^2(5\pm\sqrt{7})}e^{\frac{2i\delta B_1}{3c}(2\pm\sqrt{7})(x-2\alpha t)+C}} \right]^{\frac{1}{2}} \times e^{i\left[\alpha x - \frac{(40\alpha^2\delta^2+36\sigma^2)(2\pm\sqrt{7})+48\alpha^2\delta^2+27\sigma^2}{8\delta^2(16\pm\sqrt{7})}t \right]}$$

مجموعه دوم:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{(5 \pm 7\sqrt{7})\sqrt{-3c}}{10 \pm 2\sqrt{7}}, b = -\frac{5}{2}c, c = c, \Delta = a^2 + b^2 - c^2 = -\frac{108c^2}{(5 \pm \sqrt{7})^2}, \\
 B_1 &= \frac{3\sqrt{3}}{16\delta^2}, k = \frac{\sigma(2 \pm \sqrt{7})}{2\delta c\sqrt{-3}}, \alpha = \alpha, \beta = -\frac{(99 \pm 36\sqrt{7})\sigma^2 + (128 \pm 40\sqrt{7})\alpha^2\delta^2}{8\delta^2(16 \pm 5\sqrt{7})} \\
 A_0 &= \frac{3(2 \pm \sqrt{7})\sigma}{16\delta^2}, A_1 = 0
 \end{aligned}$$

مجموعه سوم:

$$a = \frac{9c\sigma}{2\delta^2 A_1 \sqrt{-5 \pm 7}}, b = -c, c = c, \quad \Delta = a^2 + b^2 - c^2 = -\frac{81c^2\sigma^2}{4\delta^4 A_1^2 (5 \pm \sqrt{7})^2}$$

$$k = \frac{2\sigma A_1}{3c}(-2 \pm \sqrt{7}), \alpha = \alpha, \quad \beta = -\frac{(99 \pm 36\sqrt{7})\sigma^2 + (-128 \pm 40\sqrt{7})\alpha^2\delta^2}{8\delta^2(-16 \pm 5\sqrt{7})}$$

$$A_0 = 0, A_1 = A, B_1 = 0$$

با استفاده از دسته‌های ۱ و ۲ از فصل دوم آنگاه جواب‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$u_4(\xi) = \left\{ \frac{9A_1\sigma}{4\delta^2 A_1(-5 \pm \sqrt{7})} + 1 - i \tan\left(\frac{9A_1\sigma}{4\delta^2 A_1(-5 \pm \sqrt{7})}(\xi + c)\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \times e^{i \left[\alpha x - \frac{(99 \pm 36\sqrt{7})\sigma^2 + (128 \pm 40\sqrt{7})\alpha^2\delta^2}{8\delta^2(16 \pm 5\sqrt{7})} t \right]}$$

$$k = \frac{2\delta A_1}{3c}(-2 \pm \sqrt{7}), \alpha = \alpha, \quad \beta = -\frac{(99 \pm 36\sqrt{7})\sigma^2 + (-128 \pm 40\sqrt{7})\alpha^2\delta^2}{8\delta^2(-16 \pm 5\sqrt{7})}$$

$$A_0 = 0, A_1 = A, B_1 = 0$$

با استفاده از دسته‌های ۱ و ۲ از فصل دوم آنگاه جواب‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$u_4(\xi) = \left\{ -\frac{9A_1\sigma}{4\delta^2 A_1(-5 \pm \sqrt{7})} \left[1 - i \tan\left(\frac{-9c\sigma}{4\delta^2 A_1(-5 \pm \sqrt{7})}(\xi + C)\right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \times e^{i \left[\alpha x - \frac{(99 \pm 36\sqrt{7})\sigma^2 + (-128 \pm 40\sqrt{7})\alpha^2\delta^2}{8\delta^2(-16 \pm 5\sqrt{7})} t \right]}$$

$$u_2(\xi) = \left\{ \frac{3(2 \pm \sqrt{7})\sigma}{16\delta^2} + \frac{3\sigma}{16\delta^2} \left[\frac{(4 \pm \sqrt{7})}{21} + \frac{(10 \pm 2\sqrt{7})}{21} \tan\left(\frac{3\sqrt{3}c}{5 \pm \sqrt{7}}(\xi + c)\right) \right]^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times e^{i \left[\alpha x - \frac{(99 \pm 36\sqrt{7})\sigma^2 + (128 \pm 40\sqrt{7})\alpha^2\delta^2}{8\delta^2(16 \pm 5\sqrt{7})} t \right]}$$

$$u_3(\xi) = \left\{ \frac{3(2 \pm \sqrt{7})\sigma}{16\delta^2} + \frac{3\sigma}{16\delta^2} \left[\frac{(4 \pm \sqrt{7})}{21} - \frac{(10 \pm 2\sqrt{7})}{21} \tan\left(\frac{3\sqrt{3}c}{5 \pm \sqrt{7}}(\xi + c)\right) \right]^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times e^{i \left[\alpha x - \frac{(99 \pm 36\sqrt{7})\sigma^2 + (128 \pm 40\sqrt{7})\alpha^2\delta^2}{8\delta^2(16 \pm 5\sqrt{7})} t \right]}$$

که $\xi = \frac{\sigma(2 \pm \sqrt{7})}{2\delta c \sqrt{3}}(x - 2at)$

$$u_5(\xi) = \left\{ \frac{9A_1\sigma}{4\delta^2 A_1(-5 \pm \sqrt{7})} + 1 + \tanh\left(\frac{9A_1\sigma}{4\delta^2 A_1(-5 \pm \sqrt{7})}(\xi + c)\right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times e^{i \left[\alpha x - \frac{(99 \pm 36\sqrt{7})\sigma^2 + (128 \pm 40\sqrt{7})\alpha^2\delta^2}{8\delta^2(-16 \pm 5\sqrt{7})} t \right]}$$

که $\xi = \frac{2\sigma A_1 i}{3c}(-2 \pm \sqrt{7})(x - 2at)$

با استفاده از دسته ۱۴ از فصل دوم آنگاه جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$u_6(x, t) = \sqrt{A_1} \left[\frac{\frac{9c\sigma}{2\delta^2 A_1 (-5 \pm \sqrt{7})} e^{\frac{9c\sigma}{2\delta^2 A_1 (-5 \pm \sqrt{7})} (\zeta + C)}}{1 - ce^{\frac{9c\sigma}{2\delta^2 A_1 (-5 \pm \sqrt{7})} (\zeta + C)}} \right]^{\frac{1}{2}} \times e^{i \left[\alpha x - \frac{(99 \pm 36\sqrt{7})\sigma^2 + (128 \pm 40\sqrt{7})\alpha^2 \delta^2}{8\delta^2 (-16 \pm 5\sqrt{7})} t \right]}$$

که $\xi = \frac{2\delta A_1 i}{3c} (-2 \pm \sqrt{7})(x - 2at)$

۴- حل مدل گردجیکوف-ایوانف

از معادله شرودینگر یک بعدی

$$i\Theta_t(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Theta_{xx}(x, t) + mU(x)\Theta(x, t)$$

و با استفاده از $\Theta(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} e^{i\theta(x, t)}$ معادله شرودینگر به یک جفت از معادلات سیال مادلنگ^۱ تبدیل می شود به:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0$$

$$v_t + vv_x - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} (\sqrt{\rho})_{xx} \right) + U_x = 0$$

که $\rho = |\Theta|^2$ چگال سیال و $v = m^{-1} \Theta_x$ سرعت جریان است. جواب های سالیتون روشن و تاریک برای مدل گردجیکوف-ایوانف توسط لو^۲ و همکاران [14] بدست آمده است. در [15] N، با استفاده از یک تبدیل مساله طیفی و تبدیل داربوکس^۳ برای رسیدن به جواب های صریح سالیتونی ساخته شده است. همچنین فان^۴ در [16] مساله طیفی با معادلات تکامل غیرخطی ساخته شده و ساختار همپلتونی، سیستم های انتگرال پذیر با بعد متناهی و تبدیل داربوکس با گره مورد مطالعه قرار گرفته است. در [17] معادله شرودینگر غیرخطی مکعبی می تواند متناظر با معادله کادی وی استاندارد بیان شود. به علاوه، معادله شرودینگر غیرخطی اصلاح شده با یک غیرخطی درجه چهارم با مدول هایی از تابع موج با ساختاری از سیال مادلنگ مورد مطالعه قرار گرفته است [18]. فدل^۵ وجود جواب هایی از نوع سالیتون برای معادله شرودینگر غیرخطی شامل یک غیرخطی مکعبی به اضافه یک قسمت غیرخطی منظم را بررسی کرده است [19]. مدل مورد نظر را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$i\Theta_t + \Theta_{xx} - i\Theta^2 \Theta_x^* + \frac{1}{2} |\Theta|^4 \Theta = 0$$

که "x" نشانگر مزدوج مختلط و $\Theta = \Theta(x, t)$ تابع موج مختلط می باشد. با استفاده از تبدیل

$$\Theta(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} e^{i\theta(x, t)}$$

معادله پیوسته برای چگالی سیال می تواند به صورت زیر ρ در نظر گرفته شود:

$$\rho_t + \left(\frac{2}{k} \rho v - \frac{1}{2} \rho^2 \right)_x = 0$$

معادله جنبش برای سرعت سیال ($v = \theta_x$) می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$v_t + \frac{2}{k} vv_x = k \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} (\sqrt{\rho})_{xx} \right) + \left(\rho v + \frac{2}{k} \rho^2 \right)_x$$

با ساده سازی و انتگرال گیری از معادله بالا شکل جدیدی از معادله به صورت زیر خوانده می شود:

$$-v \rho_t + \rho v_t - 2\rho v \rho_x - \rho^2 v_x - 2k \rho^2 \rho_x - \frac{k}{2} \rho_{xxx} + 2c_0(t) \rho_x + 2 \left(\int v_t dx \right)_x = 0$$

که $c_0(t)$ یک تابع دلخواه است.

با استفاده از $\xi = x - \mu t$ به ODE زیر تبدیل می گردد:

$$-\mu \rho' + \left(\frac{2}{k} \rho v - \frac{1}{2} \rho^2 \right)' = 0$$

که $\rho' = d\rho/d\xi$ با انتگرال گیری نسبت به ξ خواهیم داشت

1. Madelung
2. Lu
2. Darboux
3. Fan
4. Fedele

با دوبار انتگرال‌گیری از معادله بالا داریم:
 $(\rho')^2 = \left(\mu^2 + \frac{4}{k}c_0\right)\rho^2 - \mu\rho^3 - \frac{11}{12}\rho^4$
 $v = \frac{k}{2}\left(\mu + \frac{1}{2}\rho + \frac{k_0}{\rho}\right)$
 که k_0 ثابت انتگرال‌گیری است. با جایگذاری بدست می‌آوریم

با اصل تعادل همگن بین $(\rho')^2$ ، ρ^4 ، بدست می‌آوریم
 $M = 1$
 جواب واقعی به صورت زیر خواهد بود:
 $\rho(\xi) = A_0 + A_1 \tan(\varphi(\xi)/2) + B_1 \cot(\varphi(\xi)/2)$
 $\left(\frac{k}{2}\mu^2 - \frac{k}{2}k_0 + 2c_0\right)\rho' - \frac{3k}{2}\mu\rho\rho' - \frac{11k}{4}\rho^2\rho' - \frac{k}{2}(\rho^3)''' = 0$

در ادامه انواع متفاوتی از امواج مجرد برای معادله با فرض شرایط مرزی ρ در نظر می‌گیریم.

با انتخاب هر ضریب از چند جمله‌ای بر حسب $\tan(\varphi/2)$ مساوی صفر، یک مجموعه از معادلات جبری شامل $A_0, A_1, B_1, a, b, c, \alpha, \beta, k, A_0, A_1$ را حل می‌کنیم:
 $a = -\frac{\sqrt{-7}}{7} \frac{E + \sqrt{-6c_0E}}{\sqrt{k[S + \sqrt{-12c_0E}]}}$
 شرط مرزی ρ وقتی $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rho(\xi) = 0$ با در نظر گرفتن شرط مرزی ρ وقتی $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rho(\xi) = 0$ خواهیم داشت

$$\left(\frac{k}{2}\mu^2 + 2c_0\right)\rho' - \frac{3k}{2}\mu\rho\rho' - \frac{11k}{4}\rho^2\rho' - \frac{k}{2}(\rho^3)''' = 0$$

$$\begin{cases} Y^0 : 3kb^2B_1^2 + 6kcB_1^2 + 3kc^2B_1^2 + 11kB_1^4 = 0 \\ Y^1 : 12\mu kB_1^3 + 12kacB_1^2 + 12kabB_1^3 + 44kA_0B_1^3 = 0 \\ Y^2 : -12kcbA_1B_1 - 6kc^2A_1B_1 + 36\mu kA_0B_1^2 - 6kb^2A_1B_1 - 48c_0B_1^2 + 6kc^2B_1^2 + 12ka^2B_1^2 + 36\mu kA_0^2B_1 - 12kabB_1^2 + 12kacB_1^2 + 132kA_0A_1B_1^2 = 0 \\ Y^3 : -24kacA_1B_1 - 24kabA_1B_1 + 44kA_0^3B_1 - 96c_0A_0B_1 - 24\mu^2kA_0B_1 + 36\mu kA_1B_1^2 + 36\mu kA_0^2B_1 - 12kabB_1^2 + 12kacB_1^2 + 132kA_0A_1B_1^2 = 0 \\ Y^4 : 72\mu kA_0A_1B_1 + 11kA_0^4 - 48c_0A_0^2 + 12\mu kA_0^3 + kc^2A_1^2 - 12\mu^2kA_0^2 - 96c_0A_1B_1 + 3kc^2B_1^2 + 66kA_1^2B_1^2 + 3kb^2A_1^2 + 3kb^2A_1^2 + 132kA_0^2A_1B_1 + 12kb^2A_1B_1 - 24\mu^2kA_1B_1 - 12kc^2A_1B_1 - 12kc^2A_1B_1 - 6kcbB_1^2 + 6kcbA_1^2 - 24ka^2A_1B_1 = 0 \\ Y^5 : 24kabA_1B_1 - 24kacA_1B_1 + 44kA_0^3A_1 - 96c_0A_0A_1 + 12kacA_1^2 - 24\mu^2kA_0A_1 + 36\mu kA_1^2B_1 + 132kA_0A_1B_1 + 12kabA_1^2 + 36\mu kA_0^2A_1 = 0 \\ Y^6 : 12kcbA_1B_1 + 12ka^2A_1^2 - 12\mu^2kA_1^2 - 6kb^2A_1^2 + 66kA_0^2A_1^2 + 44kA_1^3B_1 + 6kc^2A_1^2 - 48c_0A_1^2 - 6kb^2A_1B_1 + 36\mu kA_0A_1^2 - 6kc^2A_1B_1 = 0 \\ Y^7 : 44kA_0A_1^3 + 12\mu kA_1^3 - 12kabA_1^2 + 12kacA_1^2 = 0 \\ Y^8 : 3kb^2A_1^2 + 3kc^2A_1^2 + 11kA_1^4 - 6kcbA_1^3 = 0 \end{cases}$$

با حل معادلات جبری با استفاده از متلب^۱ به نتایج زیر

می‌رسیم:

مجموعه اول:

$$S = 7k(b^2 - c^2) - 12c_0E, E = S + 6c_0, A_0 = \frac{\sqrt{231k}}{77k} \sqrt{S + 2\sqrt{-6c_0E}}, A_1 = 0, B_1 = \frac{\sqrt{33}}{11}(b+c), \Delta = a^2 + b^2 - c^2 = \frac{6c_0}{7k}$$

$$\mu = -\frac{\sqrt{231}}{21} \frac{-6c_0 + \sqrt{-6c_0E}}{\sqrt{k[S + \sqrt{-24c_0E}]}}$$

با استفاده از دسته ۱ از فصل دوم آنگاه جوابها به صورت

زیر خواهند بود:

$$\rho_1(\xi) = \frac{\sqrt{231k}}{77k} \sqrt{S + 2\sqrt{-6c_0E}} - \frac{\sqrt{33}}{11}(b^2 - c^2) \left[\frac{\sqrt{-7}}{7} \frac{E + \sqrt{-6c_0E}}{\sqrt{k[S + \sqrt{-12c_0E}]}} + \sqrt{-\frac{6c_0}{7k}} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6c_0}{7k}}\xi\right) \right]^{-1}$$

$$v_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{k}{2} \left(-\frac{\sqrt{231}}{21} \frac{-6c_0 + \sqrt{-6c_0E}}{\sqrt{-24c_0E}} + \frac{1}{2} \rho_1 \right)$$

$$\theta_1(\xi) = \frac{k}{2} \mu \xi + \frac{k}{4} \int \rho_1 d\xi - 2c_0t - \theta_{10} = \frac{k}{2} \mu \xi - 2c_0t - \theta_{10} + \frac{k\sqrt{7k}}{4\sqrt{-6c_0}} \left\{ \frac{\sqrt{231}}{77k} \times \sqrt{k(S + 2\sqrt{-6c_0E})} \xi + \frac{2\sqrt{-231}}{77} \right.$$

$$\left. \frac{E + \sqrt{-6c_0E}}{\sqrt{k[S + \sqrt{-12c_0E}]}} \tan^{-1} \left[\tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{6c_0}{7k}} \xi \right) \right] - \frac{2\sqrt{33}}{11} \sqrt{-\frac{6c_0}{7k}} \ln \left[\frac{\sqrt{-\frac{6c_0}{7k}} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{6c_0}{7k}}\xi\right) + \frac{\sqrt{-7}}{7} \frac{E + \sqrt{-6c_0E}}{\sqrt{k[S + \sqrt{-12c_0E}]}}}{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{6c_0}{7k}}\xi\right)} \right] \right\}$$

که $\theta_1(x, t) = \sqrt{\rho_1(x, t)} e^{\frac{i}{k}\theta_1(x, t)}$ و C_0, C و θ_{10} ثابت هستند.

با استفاده از دسته ۲ از فصل دوم آنگاه جوابها به صورت

زیر خواهند بود.

$$\rho_2(\xi) = \frac{231}{77k} \sqrt{k(S + 2\sqrt{-6c_0E})} - \frac{\sqrt{33}}{11}(b^2 - c^2) \left[\frac{\sqrt{-7}}{7} \frac{E + \sqrt{-6c_0E}}{\sqrt{k[S + \sqrt{-12c_0E}]}} - \sqrt{\frac{6c_0}{7k}} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6c_0}{7k}}\xi\right) \right]^{-1}$$

$$\theta_2(\xi) = \frac{k}{2} \mu \xi - 2c_0t - \theta_{20} - \frac{k\sqrt{7k}}{4\sqrt{6c_0}} \left\{ \frac{\sqrt{231}}{77k} \sqrt{k(S + 2\sqrt{-6c_0E})} \xi - \frac{2}{11} \sqrt{\frac{198c_0}{7k}} \ln \left[\sqrt{\frac{6c_0}{7k}} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6c_0}{7k}}\xi\right) - \frac{\sqrt{-7}}{7} \frac{E + \sqrt{-6c_0E}}{\sqrt{k[S + \sqrt{-12c_0E}]}} + \frac{\sqrt{33}}{11} \left(\sqrt{\frac{6c_0}{7k}} - \frac{\sqrt{-7}}{7} \frac{E + \sqrt{-6c_0E}}{\sqrt{k[S + \sqrt{-12c_0E}]}} \right) \ln \left[\tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6c_0}{7k}}\xi\right) - 1 \right] \right] \right\}$$

که

$$\xi = x + \frac{\sqrt{231}}{21} \frac{-6c_0 + \sqrt{-6c_0E}}{k[S + \sqrt{-24c_0E}]} t, \theta_2(x, t) = \sqrt{\rho_2(x, t)} e^{\frac{i}{k}\theta_2(x, t)}$$

θ_{20}, C و C_0 ثابت هستند. با استفاده از دسته ۱۲ از فصل

دوم آنگاه جوابها به صورت زیر خواهند بود:

$$\rho_3(\xi) = c + \frac{2\sqrt{33}}{11}c \left[\frac{-1}{2ce^{c\xi} + 1} \right], \quad v_3 = \frac{\partial \theta_3}{\partial \xi} = \frac{k}{2} \left(\frac{2c_0\sqrt{231}}{7\sqrt{-6c_0k}} + \frac{1}{2}\rho_3 \right)$$

$$\theta_3(\xi) = \frac{kc_0\sqrt{231}}{7\sqrt{-6c_0k}}\xi - 2c_0t + \frac{k}{4} \int \rho_3 d\xi - \theta_{3_0} =$$

$$\frac{kc_0\sqrt{231}}{7\sqrt{-6c_0k}}\xi - 2c_0t + \frac{k}{4} \left[c\xi + \frac{\sqrt{33}}{11} \ln(2c + e^{-2c\xi}) \right]$$

$$\xi = x - \frac{2c_0\sqrt{231}}{7\sqrt{-6c_0k}}t, \quad \theta_3(x, t) = \sqrt{\rho_3(x, t)} e^{\frac{i}{k}\theta_3(x, t)}$$

که

و C, c_0 و θ_{3_0} با استفاده از دسته ۱۵ از فصل دوم آنگاه جواب‌ها به صورت زیر خواهند بود.

$$\rho_4(\xi) = 3\sqrt{\frac{(4\sqrt{2}-6)c_0}{77k}} - 3\sqrt{\frac{2c_0}{77k} \left[\frac{\sqrt{\frac{6c_0\xi}{7k}}}{\sqrt{\frac{6c_0}{7k}+2}} \right]} \quad v_4 = \frac{\partial \theta_4}{\partial \xi} = \frac{k}{2} \left(-\frac{\sqrt{22}(\sqrt{2}-1)c_0}{\sqrt{7k(2\sqrt{2}-3)c_0}} + \frac{1}{2}\rho_4 \right)$$

$$\theta_4(\xi) = -\frac{k\sqrt{22}(\sqrt{2}-1)c_0}{2\sqrt{7k(2\sqrt{2}-3)c_0}}\xi - 2c_0t + \frac{k}{308\sqrt{c_0k}} \left[3\sqrt{154}\sqrt{\sqrt{8}-3c_0\xi} + 14\sqrt{33c_0k} \ln\left(14 + \sqrt{\frac{42c_0}{k}\xi}\right) \right] - \theta_{4_0}$$

$$\xi = x + \frac{\sqrt{22}(\sqrt{2}-1)c_0}{\sqrt{7k(2\sqrt{2}-3)c_0}}t, \quad \theta_4(x, t) = \sqrt{\rho_4(x, t)} e^{\frac{i}{k}\theta_4(x, t)}$$

که

که $\rho'_1 = \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}$ با دوبار انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$(\rho'_1)^2 = (\mu^2 - A_{00} + \frac{4}{k}c_0 - 3\mu\rho_0 \frac{11}{2}\rho_0^2)\rho_1^2 - \left(\mu + \frac{11}{3}\rho_0 \right) \rho_1^3 - \frac{11}{12}\rho_1^4$$

همانند روند قبلی، جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_1(\xi) = A_0 + A_1 \tan(\emptyset/2) + B_1 \cot(\emptyset/2)$$

مساموی صفر، یک مجموعه از معادلات جبری شامل

$\tan(\emptyset/2)$ با انتخاب هر ضریب از چند جمله‌ای بر حسب $a, b, c, \alpha, \beta, k, A_0, A_1$ را حل می‌کنیم.

• شرط مرزی ρ وقتی $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rho(\xi) \neq 0$ با در نظر گرفتن شرط مرزی از ρ وقتی $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rho(\xi) \neq 0$ می‌دهیم $\rho(\xi) = \rho_0 + \rho_1(\xi)$ با:

$$\rho = \text{constant} > 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rho_1(\xi) = 0$$

که مشخص می‌کند:

$$v = \frac{k}{2} \left[\mu + \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_1(\xi)) + \frac{A_{00}}{\rho_0 + \rho_1(\xi)} \right]$$

با جایگذاری $\rho(\xi) = \rho_0 + \rho_1(\xi)$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{k}{2}\mu^2 - \frac{k}{2}A_{00} + 2c_0 - \frac{3}{2}k\mu\rho_0 - \frac{11}{4}k\rho_0^2 \right) \rho'_1 - \left(\frac{3}{2}k\mu + \frac{11}{2}kk\rho_0 \right) \rho_1 \rho'_1 - \frac{11}{4}k\rho_1^2 \rho'_1 - \frac{k}{2}(\rho_1^3)''' = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^0: 3kb^2B_1^2 + 6kcbB_1^2 + 3kc^2B_1^2 + 11kB_1^2 = 0 \\ Y^1: 12\mu kB_1^3 + 12kacB_1^2 + 12kabB_1^2 + 44B_1^3kA_0B_1^3 + 44k\rho_0B_1^3 \\ Y^2: -12kcbA_1B_1 - 6kc^2A_1B_1 + 36\mu kA_0B_1^2 - 6kb^2A_1B_1 - 48c_0B_1^2 + 6kc^2B_1^2 \\ 12ka^2B_1^2 - 6kb^2B_1^2 - 12\mu^2kB_1^2 + 66kA_0^2B_1^2 + 44kA_1B_1^3 + 66\rho_0^2kB_1^2 + 132k\rho_0A_0B_1^2 + 36\mu\rho_0kB_1^2 = 0 \\ Y^3: -24ka(b+c)A_1B_1 + 44kA_0^2B_1 - 96c_0A_0B_1 - 24\mu^2kA_0B_1 + 36\mu kA_1B_1^2 + \\ 36\mu kA_0^2B_1 + 24kA_0^2B_1 - 12kabB_1^2 + 12kacB_1^2 + 132kA_0A_1B_1^2 \\ 72\mu\rho_0kA_0B_1 + 132\rho_0^2kA_0B_1 + 132k\rho_0A_0^2B_1 + 132k\rho_0A_1B_1^2 = 0 \\ Y^4: 72\mu kA_0A_1B_1 + 11kA_0^3 - 48c_0A_0^2 + 12\mu kA_0^3 + 3kc^2A_1^2 - 12\mu^2kA_0^2 - \\ 96c_0A_1B_1 - 3kc^2B_1^2 + 66kA_1^2B_1^2 + 12kA_0^3 + 3kb^2B_1^2 + 3kb^2A_1^2 + \\ 132kA_0^2A_1B_1 + 12kb^2A_1B_1 - 24\mu^2kA_1B_1 - 12kc^2A_1B_1 - 6kcbB_1^2 \\ 6kcbA_1^2 - 132\rho_0^2kA_1B_1 + 44k\rho_0A_0^3 + 66\rho_0^2kA_0^2 + 72\mu\rho_0kA_1B_1 + \\ 24ka^2A_1B_1 + 36\mu\rho_0kA_0^2 + 264k\rho_0A_0A_1B_1 + 24A_0kA_1B_1 = 0 \\ Y^5: 24kabA_1B_1 - 24kacA_1B_1 + 44kA_0^3A_1 - 96c_0A_0A_1 + 12kacA_1^2 - \\ 24\mu^2kA_0A_1 + 36\mu kA_1^3B_1 + 24kA_0^2A_1 + 132kA_0A_1^2B_1 + 36\mu kA_0^2A_1 + \\ 12kabA_1^272\mu\rho_0kA_0A_1 + 132k\rho_0A_0^2A_1 + 132k\rho_0A_0^2A_1 + 132\rho_0^2kA_0A_1 = 0 \\ Y^6: 12kcbA_1B_1 + 12ka^2A_1^2 - 12\mu^2kA_1^2 - 6kb^2A_1^2 + 66kA_0^2A_1^2 + 44kA_1^3B_1 + \\ 6kc^2A_1^2 - 48c_0A_1^2 - 6kb^2A_1B_1 + 36\mu kA_0A_1^2 - 6kc^2A_1B_1 + 36\mu\rho_0kA_1^2 + \\ 132k\rho_0A_0A_1^2 - 66\rho_0^2kA_1^2 = 0 \\ Y^7: 44kA_0A_1^3 + 12\mu kA_1^3 - 12kabA_1^2 + 12kacA_1^2 + 44k\rho_0A_1^3 = 0 \\ Y^8: 3kb^2A_1^2 + 3kc^2A_1^2 + 11kA_1^2 - 6kcbA_1^2 = 0 \end{array} \right.$$

مجموعه اول:

می آوریم:

با حل معادلات جبری به کمک میپل، نتایج زیر را بدست

$$A_0 = \frac{18k - 341k\rho_0 + \sqrt{324k^2 - 12276\rho_0k^2 + 11253k^2\rho_0^2 - 22176kc_0 + 5544(b^2 - c^2)k^2}}{154k}$$

$$A_1 = \sqrt{-\frac{3}{11}}(b - c), \quad B_1 = -\sqrt{-\frac{3}{11}}(b + c),$$

$$\mu = \frac{[(59136k(b^2 - c^2) - 55440c_0 - 52074k\rho_0 + 3240k - 71269k\rho_0^2)A_0] -}{42(-180kA_0 + 1023k\rho_0A_0 + 720c_0 + 768kc^2 - 768kb^2 + 3410k\rho_0^2)}$$

$$\alpha = -\frac{1}{42} \sqrt{-\frac{3}{11 - 180kA_0 + 1023k\rho_0A_0 + 720c_0 + 768kc^2 - 768kb^2 + 3410\rho_0^2k}} \quad (3240k + 59136k(b^2 - c^2) - 79794k\rho_0)A_0 - R$$

که $\Delta = a^2 + b^2 - c^2$ و $R = 3(341\rho_0 - 60)(18k(b^2 - c^2) - 341k\rho_0^2 - 72c_0)$ با در نظر گرفتن $Y = \tan\left(\frac{\xi\sqrt{-\Delta}}{2}\right)$ با استفاده از دسته ۱ خواهیم داشت.

$$\rho_{1_1}(\xi) = A_0 + \sqrt{-\frac{3}{11}}[a - \sqrt{-\Delta}Y] - \sqrt{-\frac{3}{11}}(b^2 - c^2)[a - \sqrt{-\Delta}Y]^{-1}$$

$$v_{1_1} = \frac{\partial\theta_{1_1}}{\partial\xi} = \frac{k}{2}\left(\mu + \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_{1_1}) + \frac{A_{00}}{\rho_0 + \rho_{1_1}}\right), \quad \theta_{1_1}(\xi) = \frac{k}{2}\left(\mu + \frac{1}{2}\rho_0\right)\xi - 2c_0t - \theta_{1_1} +$$

$$\frac{k}{4(b^2 - c^2)\sqrt{-\Delta}} \left\{ (A_0(b^2 - c^2) + aA_1(b + c))\sqrt{-\Delta}\xi - \sqrt{-\Delta}(B_1(b - c) + A_1(b + c)) \times \right.$$

$$\ln\left[\sec^2\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)\right] + 2B_1(b - c)\sqrt{-\Delta}\ln[Y - a] - 2aB_1(b - c)\tan^{-1}\left[\frac{1}{2}Y\right]\left\} + \frac{kA_{00}}{4\alpha}\left\{-2[ac(A_1 + \right.$$

$$B_1) + (b^2 - c^2)(\rho_0 + A_0)](b - c)\sqrt{\Delta((\rho_0 + A_0)^2 - 4A_1B_1)}\tan^{-1}[Y]\right\}$$

$$- 2[(B_1 - A_1)c - b(A_1 + B_1)]\Delta(b - c)\sqrt{4A_1B_1 - (\rho_0 + A_0)^2}\ln\left[\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)\right] +$$

$$[(b + c)A_1 + (b - c)B_1]\Delta(b - c)\sqrt{4A_1B_1 - (\rho_0 + A_0)^2}\ln\left[\psi(\xi) \times \sec^2\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)\right] +$$

$$\lambda \times \tan^{-1}\left[Y(\xi) \times (b - c)^{-1}(\Delta[(\rho_0 + A_0)^2 - 4A_1B_1])^{-1/2}\sec\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)\right]\left\}$$

$$\lambda = (\rho_0 + A_0)[2a^2b^2(A_1 - B_1) + 2(A_1 - B_1)b^4 + 2(A_1 + B_1)c^4 - 4bc^3B_1 - 2a^2c^2(A_1 + B_1) +$$

$$4a^2bcB_1] - 8abA_1B_1(a^2 + b^2) + 4b^2cA_0(bB_1 - cA_1) + 8acA_1B_1(a^2 - c^2) + 8abcA_1B_1(b +$$

$$c) - 4b^2c^2\rho_0A_1$$

$$Y(\xi) = 2A_1\Delta \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right) + [(b - c)(\rho_0 + A_0) + 2aA_1]\sqrt{-\Delta}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)$$

$$\alpha = [(A_1 + B_1)^2 - (A_0 + \rho_0)^2]b^2 + [(A_0 + \rho_0)^2 + (A_1 - B_1)^2]c^2 + 2bc(A_1^2 - B_1^2) + 2ab(\rho_0 +$$

$$A_0)(b(B_1 - A_1) - c(B_1 + A_1)) + 4a^2B_1A_1$$

که $\theta_{1_1}(x, t) = \sqrt{\rho\rho_{1_1}(x, t)}e^{\frac{i}{k}\theta_{1_1}(x, t)}$ و $\xi = c_0, C$ با $Z - tznh\left(\frac{\xi\sqrt{\Delta}}{2}\right)$ با استفاده از دسته ۱ خواهیم داشت: $x - \mu t$ و θ_{1_0} ثابت هستند. با در نظر گرفتن

$$\rho_{1_2}(\xi) = A_0 + \sqrt{-\frac{3}{11}}\left[a + \sqrt{\Delta}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\right] - \sqrt{-\frac{3}{11}}(b^2 - c^2)[a + \sqrt{\Delta}Z]^{-1}$$

$$v_{1_2} - \frac{\partial\theta_{1_2}}{\partial\xi} - \frac{k}{2}\left(\mu + \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_{1_2}) + \frac{A_{00}}{\rho_0 + \rho_{1_2}}\right), \quad \theta_{1_2}(\xi) = \frac{k}{2}\left(\mu + \frac{1}{2}\rho_0\right)\xi - 2c_0t - \theta_{2_0} +$$

$$\frac{k}{4(b^2 - c^2)\sqrt{\Delta}} \left\{ [A_0(b^2 - c^2) + aA_1(b + c)]\sqrt{\Delta}\xi - [\sqrt{\Delta}((b + c)A_1 + (b - c)B_1) - a(b - c)B_1] \ln[Z - 1] - \right.$$

$$(\sqrt{\Delta}((b + c)A_1 + (b - c)B_1) + a(b - c)B_1)\ln[Z + 1] - 2(b - c)B_1\sqrt{\Delta}\ln\left[a + \sqrt{\Delta}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\right]\left\} -$$

$$\frac{kA_{00}(b - c)}{4\pi} \left\{ \Delta^{3/2}A_1qv - \Delta^{3/2}qA_1z - \Delta^{3/2}qA_1w - a^3qA_1z + a^3qA_1w - 2\Delta^2byA_1\rho_0 + 2\Delta\rho_0b^3B_1y - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & b\Delta q A_0 w - c\Delta q \rho_0 z - c\Delta q A_0 z + 8\Delta A_1 a B_1 c^2 y - 2\Delta A_1 a^2 \rho_0 c y - 2\Delta A_1 a^2 A_0 c y - 6b^2 \Delta A_0 B_1 c y - \\
 & 6b^2 \Delta \rho_0 B_1 c y + 6b\Delta A_0 B_1 c^2 y + 6b\Delta \rho_0 B_1 c^2 y 2bcz\sqrt{\Delta}qB_1 + 2bw\sqrt{\Delta}qB_1c - b^2w\sqrt{\Delta}qB_1\} \\
 & |b^2vB_1\sqrt{\Delta}q \quad 2bvB_1c\sqrt{\Delta}q \quad \lambda_1 va^2\sqrt{\Delta}q \quad | \quad 2baqB_1cz \quad 2bcaqB_1w \quad w\sqrt{\Delta}qB_1c^2 \\
 & c^2z\sqrt{\Delta}qB_1 + z\sqrt{\Delta}qA_1a^2 - bdq\rho_0w - 16bdA_1aB_1cy - ca^2qA_0w + 2\Delta bA_1a^2A_0y + \\
 & vB_1c^2\sqrt{\Delta}q - b^2z\sqrt{\Delta}qB_1 + 2\Delta A_0b^3B_1y - 2\Delta^2bA_1A_0y + 8\Delta A_1aB_1b^2y + 2\Delta bA_1a^2\rho_0y + \\
 & w\sqrt{\Delta}qA_1a^2 - ba^2q\rho_0z - b^2aqB_1z - ba^2qA_0z - ca^2q\rho_0w + c^2aqB_1w - 2\Delta\rho_0c^3B_1y - \\
 & 2\Delta A_0c^3B_1y + 2\Delta^2A_1\rho_0cy + 2\Delta^2A_1A_0cy + \Delta qA_0cw - \Delta qA_1aw + \Delta qA_1az + a^2q\rho_0cz \\
 & + a^2qA_0cz - aqB_1c^2z + \Delta q\rho_0cw + b^2aqB_1w + b\Delta qA_0z + ba^2q\rho_0w + ba^2qA_0w\}, \\
 & \Pi = q\sqrt{\Delta}[\sqrt{\Delta}((b-c)(\rho_0 + A_0) + 2aA_1) + 2bcB_1 - A_1(d + a^2) - B_1(b^2 + c^2) - a(b-c)(\rho_0 + A_0)] \\
 & \times [\sqrt{\Delta}((b-c)(\rho_0 + A_0) + 2aA_1) - 2bcB_1 + A_1(b + a^2) + B_1(b^2 + c^2) + a(b-c)(\rho_0 + A_0)] \\
 & v = \ln \left[a(b-c)(\rho_0 + A_0) + A_1(d + a^2) + B_1(b-c)^2 + \sqrt{\Delta}(2aA_1 + (b-c)(\rho_0 + A_0))Z - \frac{A_1\Delta}{\cosh^2(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi)} \right], \\
 & q = \sqrt{\Delta(b-c)^2(4B_1A_1 - (\rho_0 + A_0)^2) + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}[(b-c)(\rho_0 + A_0) + 2aA_1] \sin(\sqrt{-\Delta}\xi)}, \\
 & \psi(\xi) = A_1\Delta + [a(\rho_0 + A_0)(c-b) - 2A_1a^2 - A_1b^2] \\
 & w = \ln[Z + 1], \quad z = \ln[Z - 1], \quad y = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{q}((b-c)(\rho_0 + A_0) + 2aA_1) + \frac{2A_1\Delta}{q}Z \right]
 \end{aligned}$$

که $\theta_{1_2}(x, t) = \sqrt{\rho_{1_2}(x, t)} e^{\frac{i}{k}\theta_{1_2}(x, t)}$ و $\xi = x - \mu t$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:
 با استفاده از دسته ۱ و با استفاده از $(a = 0, b = c)$

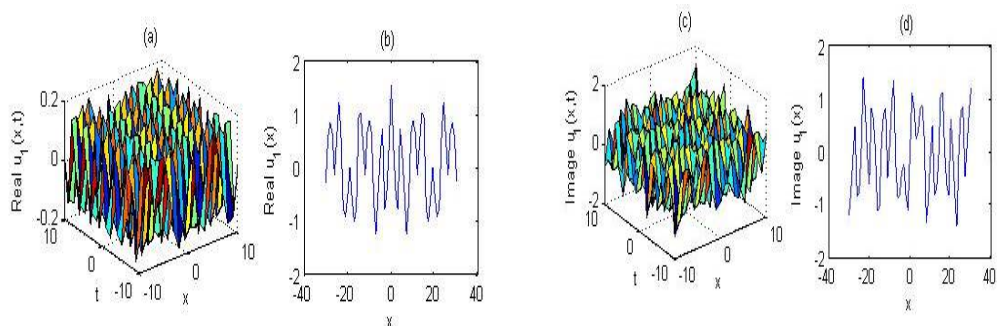
$$\begin{aligned}
 \rho_{1_2}(\xi) &= A_0 - 2\sqrt{-\frac{3}{11}\frac{1}{\xi}}, \quad v_{1_2} = \frac{\partial\theta_{1_2}}{\partial\xi} = \frac{k}{2} \left(\mu + \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_{1_2}) + \frac{A_{00}}{\rho_0 | \rho_{1_3}} \right) \\
 \theta_{1_3}(\xi) &= \frac{k}{2} \left(\mu + \frac{1}{2}\rho_0 \right) \xi - 2c_0t - \theta_{3_0} + \frac{k}{2} [cA_0\bar{\xi} + B_1 \ln(\bar{\xi})] - \\
 & \frac{kA_{00}}{c(\rho_0 + A_0)^2} \{ \ln [c(\rho_0 + A_0)\bar{\xi} + B_1] - c\xi(\rho_0 + A_0) \}, \\
 c &= \pm \sqrt{\frac{-2772k + 52514k\rho_0 - 154\sqrt{3k(108k - 4092k\rho_0 + 3751k\rho_0^2 - 7392c_0)}}{18k - 341k\rho_0 + \sqrt{3k(108k - 4092k\rho_0 + 3751k\rho_0^2 - 7392c_0)}}} \\
 & - 2959539k\rho_0^2 - 1890504c_0\rho_0 + 3784418k\rho_0 - \\
 & 10396\sqrt{3k(108k - 4092k\rho_0 + 3751k\rho_0^2 - 7392c_0)} + \\
 & 132992\mu_0\sqrt{3k(108k - 4092k\rho_0 + 3751k\rho_0^2 - 7392c_0)} - 18712k\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

که $\theta_{1_3}(x, t) = \sqrt{\rho_{1_3}(x, t)} e^{\frac{i}{k}\theta_{1_3}(x, t)}$ و $\xi = x - \mu t, A_1 = 0, B_1 = -\sqrt{-\frac{3}{11}}c$

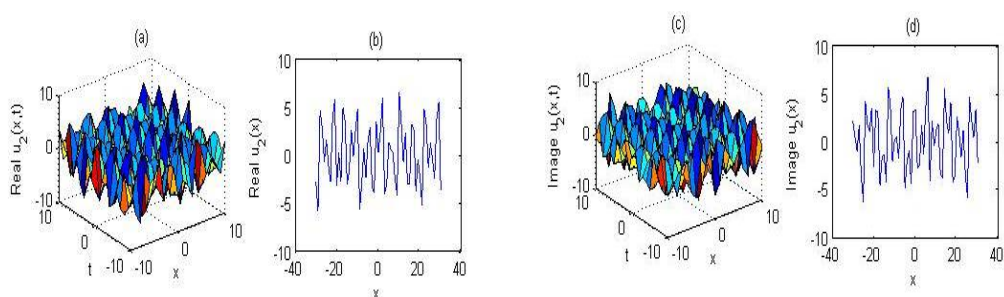
۵- تفسیر فیزیکی از جواب‌ها

گراف‌های سه بعدی و دو بعدی از جواب‌های واقعی و جواب‌های موهومی برای معادله کوندو-اسخائوس کشیده شده‌اند. شکل ۱ جواب موج نمایی منفرد، شکل ۲ جواب موج مثلثاتی متناوب و شکل ۳ جواب موج سالیونی را نشان می‌دهند. همچنین در شکل‌های ۴ تا ۶ گراف‌های سه بعدی از جواب‌های واقعی برای مدل گردجیکف-ایوانف کشیده شده‌اند. شکل ۴ جواب موج مثلثاتی، شکل ۵ جواب موج سالیونی و شکل ۶ جواب موج نمایی را نشان می‌دهند.

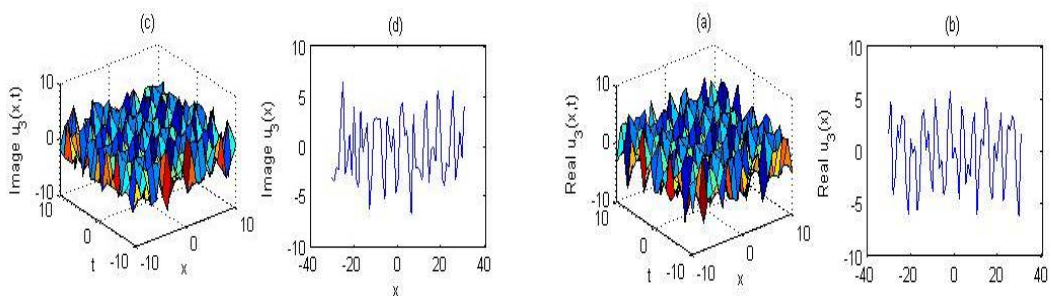
در این بخش، گراف جواب‌های بدست آمده از معادلات کوندو-اسخائوس و مدل گردجیکف-ایوانف را رسم می‌کنیم. اهمیت فیزیکی ممکن برای پارامترهای آزاد را مورد بحث قرار می‌دهیم. به کمک روش بهبود یافته تانژانت فی جواب‌های شامل سالیونی، مثلثاتی، منفرد و کینک رو مورد تحلیل قرار می‌دهیم. این دسته جواب‌های بدست آمده نشانگر آن است که روش ارائه شده یک روش کارا برای حل معادلات پیچیده غیرخطی می‌باشد. در شکل‌های ۱ تا ۳



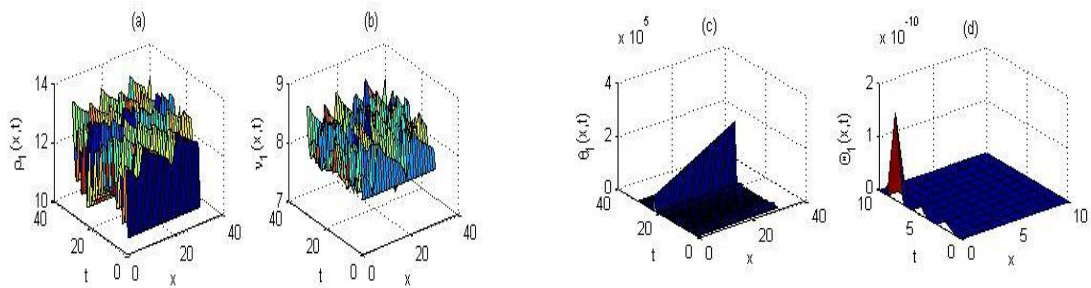
شکل ۱. گرافهای سه بعدی و دوبعدی مربوط به معادله کوندو-اسخائوس



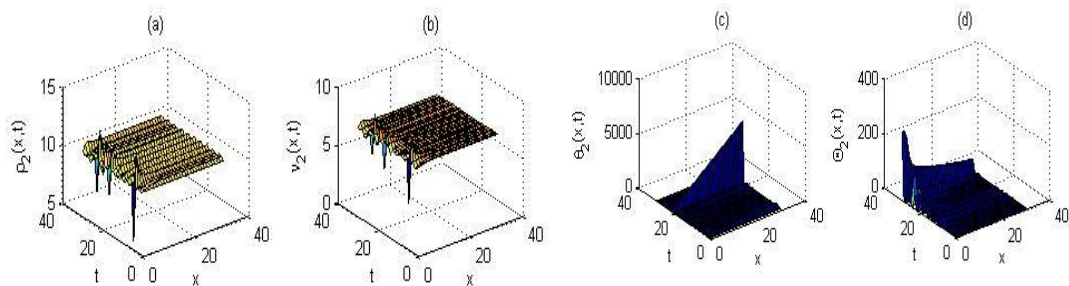
شکل ۲. گرافهای سه بعدی و دوبعدی مربوط به معادله کوندو-اسخائوس



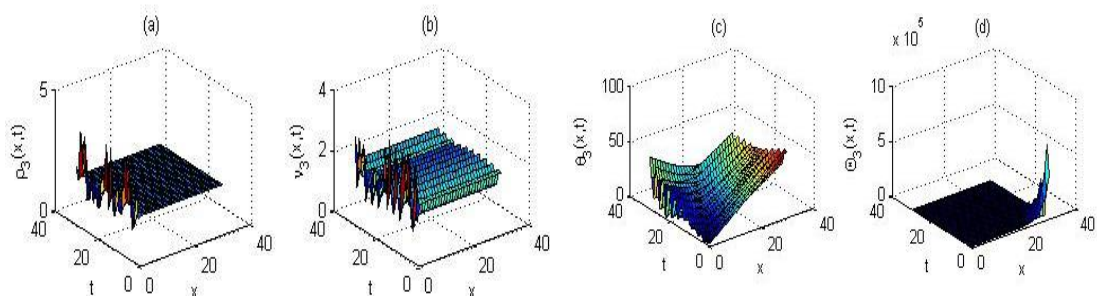
شکل ۳. گرافهای سه بعدی و دوبعدی مربوط به معادله کوندو-اسخائوس



شکل ۴. گرافهای سه بعدی مربوط به مدل گردجیکف-ایوانف



شکل ۵. گراف‌های سه بعدی مربوط به مدل گردجیکف-ایوانف



شکل ۶. گراف‌های سه بعدی مربوط به مدل گردجیکف-ایوانف

نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش بسط تانژانت فی بهبودیافته برای حل معادلات کوندو-اسخائوس و مدل گردجیکوف-ایوانف بکار گرفتیم. روش بکاربرده شده، روش تحلیلی برای بدست آوردن جواب‌های واقعی از معادلات غیرخطی می‌باشند. به کمک روش ذکر شده توانستیم جواب‌های سالیتمی، متناوب، کسری، منفرد و موج‌های کوچک برای معادلات مورد نظر در این مقاله بدست بیاوریم. در مقایسه با روش‌های دیگر جواب‌های بیشتری بدست آوردیم. این دسته از معادلات کاربردهای زیاد در مهندسی، فیزیک و ریاضی کاربردی دارند. این روش پیشنهادی یک روش ساده، دقیق و مؤثر برای حل چنین مسائلی می‌باشد. از نرم افزارهای متلب و میپل برای سادگی روند محاسبات پیچیده استفاده شده است. روش بسط تانژانت فی بهبودیافته یک کاربرد گسترده‌ای برای انجام معادله‌های غیرخطی ارائه می‌کند.

- [8] Md. Shafiqul Islam, Kamruzzaman Khan, M. Ali Akbar, Application of the improved F -expansion method with Riccati equation to find the exact solution of the nonlinear evolution equations, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 25 (2017) 13-18.
- [9] J. Manafian, M. Lakestani, Solitary wave and periodic wave solutions for Burgers, Fisher, Huxley and combined forms of these equations by the G'/G -expansion method, *Pramana- J. Phys.*, 130 (2015) 31-52.
- [10] J. Manafian, M. Lakestani, Application of $\tan(\phi/2)$ -expansion method for solving the Biswas-Milovic equation for Kerr law nonlinearity, *Optik-Int. J. Elec. Opt.*, 127 (2016) 2040-2054.
- [11] A. Kundu, Landau-Lifschitz and higher order nonlinear systems gauge generated from nonlinear Schrödinger type equations, *J. Math. Phys.* 25 (1984) 3433-3438.
- [12] F. Calogero, W. Eckhaus, Nonlinear evolution equations, rescalings, model PDES and their integrability: I, *Inv. Prob.* 3 (1987) 229-262.
- [13] D. Levi, C. Scimiterna, The Kundu-Eckhaus equation and its discretizations, *J. Phys. A* 42 (2009) 465203-465210.
- [14] X. Lü, W.X. Ma, J. Yu, F. Lin, Chaudry Masood Khalique, Envelope bright and dark-soliton solutions for the Gerdjikov-Ivanov model, *Nonlinear Dyn.* 82(2015) 1211-1220.
- [15] E.G. Fan, Darboux transformation and soliton-like solutions for the Gerdjikov-Ivanov equation, *J. Phys. A* 33 (2000) 6925.
- [1] Chirakkal V. Easwaran, Sunday C. Chikwendu, A Laplace-Transform multiple-scale procedure for the asymptotic solution of weakly non-linear partial differential equations, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34 (1999) 117-122.
- [2] Hardik S. Patel, Ramakanta Meher, Analytical Investigation of Jeffery-Hamel Flow by Modified Adomian Decomposition Method, *Ain Shams Engineering Journal*, 2016.
- [3] S.A. Khuri, A. Sayfy, Generalizing the variational iteration method for BVPs: Proper setting of the correction functional, *Applied Mathematics Letters*, 68 (2017) 68-75.
- [4] M. Dehghan, J. Manafian, The solution of the variable coefficients fourth-order parabolic partial differential equations by homotopy perturbation method, *Z. Naturforsch.* 64a (2009) 420-430.
- [5] M. Dehghan, J. Manafian, A. Saadatmandi, Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method, *Num. Meth. Partial Diff.l Eq. J.*, 26 (2010) 448-479.
- [6] J. Manafian, M. Lakestani, Optical solitons with Biswas-Milovic equation for Kerr law nonlinearity, *Eur. Phys. J. Plus*, 130 (2015) 1-12.
- [7] J. Manafian, M. Lakestani, A. Bekir, Comparison between the generalized tanh-coth and the G'/G -expansion methods for solving NPDE's and NODE's, *Pramana . J. Phys.*, 87 (2016) 1-14.

[16] E.G. Fan, Integrable evolution systems based on Gerdjikov-Ivanov equations, bi-Hamiltonian structure, finite-dimensional integrable systems and N -fold Darboux transformation, J. Math. Phys. 41 (2000) 7769.

[17] R. Fedele, H. Schamel, Solitary waves in the Madelung's fluid: connection between the nonlinear Schrödinger equation and the Korteweg-de Vries equation, Eur. Phys. J. B 27 (2002) 313.

[18] R. Fedele, Envelope solitons versus solitons, Phys. Scr. 65 (2002) 502.

[19] R. Fedele, H. Schamel, V.I. Karpman, P.K. Shukla, Envelope solitons of nonlinear Schrödinger equation with an anticubic nonlinearity, J. Phys. A 36(2003) 1169.