دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره نهم، بهار ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

حل عددی معادله موج با استفاده از قاب‌های شرلت

مژگان امین خواه[۱]، عطاالله عسکری همت[۲]، ریحانه رئیسی طوسی[۳*]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران
(۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنرکرمان، کرمان، ایران
(۳) گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۲/۰۸   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۳/۱۵

چکیده

در این مقاله، با استفاده از قاب‌های شرلت[۱] یک روش عددی را برای حل معادله موج ارائه می‌دهیم. بدین منظور، ابتدا یک سیستم جدید را با بکارگیری شرلت می‌سازیم سپس با استفاده از قضیه پلانچرل[۲]، ضرایب قاب شرلت را محاسبه می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی: قاب شرلت، معادله موج، قضیه پلانچرل، تبدیل فوریه.

---

*. عهده دار مکاتبات: E-mail: Raisi@um.ac.ir

1.Shearlet frames
2.Plancherel Theorem

۱. مقدمه

برخی مسائل در زمینه‌های الکترونیک، مکانیک و فیزیک، شامل مطالعه معادله موج در ابعاد گوناگون می‌باشند. انواع مختلفی از امواج- صوتی، کشسانی و الکترومغناطیس- و دیگر پدیده‌های نوسانی به معادله موج منتج می‌گردد. حالت کلی معادله موج دو بعدی بصورت زیر داده می‌شود

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad (۱)$$

که در آن c سرعت انتشار موج در محیط داده شده است [۱]. در سال‌های اخیر، برای حل (۱) روش‌های متنوعی با استفاده از سیستم‌های موجک[1]، کرولت[2] و شرلت توسط کیسر[3] [۲]، پرل[4] [۳] و برخی دیگر از محققین[۴،۵] پیشنهاد شده‌اند. سیستم‌های موجک توسط ویس[5] [۶]، برتولوزا[6] [۷] و پژوهشگران دیگر[۸] در حل معادله موج مورد استفاده قرار گرفت. البته برای حل مسائل هذلولوی، سیستم‌های کرولت بسیار کاراتر از موجک‌ها بوده‌اند[۹،۱۰]. در عین حال برای حل معادلات مراتب بالا، کرولت‌ها چندان مناسب نمی‌باشند. برای غلبه بر این مشکل شرلت‌ها پیشنهاد گردیدند[۱۱]. شرلت‌ها به سبب داشتن ساختار ریاضی منسجم در ابعاد بالا، ابزار مناسبی در حل معادلات مراتب بالا به صورت تحلیلی و عددی می‌باشند (برای مشاهده جزئیات بیشتر به مراجع [۱۲، ۱۳] مراجعه نمایید).

در این مقاله، ابتدا ساختار شرلت‌ها و برخی خواص آنها را توضیح می‌دهیم. پس از آن، با استفاده از قاب شرلت، یک تابع معرفی می‌کنیم که در ساخت آن ایده کیسر در [۲] را بکار می بریم. در نهایت با توجه به تابع مفروض، معادله موج را به صورت عددی حل می‌کنیم.

در اینجا، خانواده $\{\psi_{j,k,m}(0)\}_{j,k,m}$ از شرلت‌های n بعدی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\psi_{j,k,m}(0) = \left|\det A_{2^j}\right|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(A_{2^j}^{-1}S_k^{-1}(0-m)\right), \qquad (۲)$$

که در آن $m \in \mathbb{Z}^n$ ، $k \in \mathbb{Z}^{n-1}$ ، $j \in \mathbb{Z}$، و $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$A_{2^j} = \begin{bmatrix} 2^j & 0_{n-1}^T \\ 0_{n-1} & 2^{\frac{j}{2}} I_{n-1} \end{bmatrix},$$
$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & k^T \\ 0_{n-1} & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

شرط پذیرفتنی برای ψ به صورت زیر خواهد بود

$$C_\psi \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2}{|\xi_1|^n}\, d\xi_n \cdots d\xi_2 d\xi_1 < \infty .$$

در مورد خاص، $n = 2$، داریم

$$\psi_{j,k,m}(0) = 2^{-\frac{3}{4}j}\psi\left(A_{2^j}^{-1}S_k^{-1}(0-m)\right),$$

که در آن $m \in \mathbb{Z}^2$ ، $j,k \in \mathbb{Z}$ و

$$A_{2^j} = \begin{bmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 2^{\frac{j}{2}} \end{bmatrix},$$
$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

یک مثال از شرلت به شکل زیر ساخته می‌شود (رجوع کنید به [۱۳]).

مثال ۱-۱. فرض کنیم ψ_1 یک موج پذیرفتنی با $\hat{\psi}_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ و $supp\, \hat{\psi}_1 \subseteq \left[-2, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ و فرض کنیم ψ_2 به صورتی باشد که $\hat{\psi}_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ و $supp\, \hat{\psi}_2 \subseteq [-1,1]^{n-1}$. لذا با توجه به تابع شرلت گسسته $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}_1(\xi_1)\hat{\psi}_2\left(\frac{1}{\xi_1}\xi'\right),$$
$$\xi_1 \in \mathbb{R}, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

بطور مثال، برای $n = 2$، شرلت به صورت زیر بیان می‌شود.

تابع $\psi_1 \in L^2(\mathbb{R})$ را یک موجک لیماری- میر[7] در نظر می‌گیریم که در شرط کالدرون[8] گسسته زیر صدق می‌کند

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_1(2^{-j}\omega)|^2 = 1,$$

1. Wavelet
2. Curvelet
3. Kaiser
4. Perel
5. Weiss
6. Bertoluzza
7. Lemarie'-Meyer wavelet
8. Caldero'n condition

با $\hat{\psi}_1 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ و $supp\, \hat{\psi}_1 \subseteq \left[-2,-\frac{1}{2}\right] \cup [\frac{1}{2},2]$.
همچنین $\psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ را برای هر $\omega \in [-1,1]$ ، یک تابع ضربه‌ای[1] در نظر می‌گیریم که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\sum_{k=-1}^{1} |\hat{\psi}_2(\omega+k)|^2 = 1,$$

که در آن $\hat{\psi}_2 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ و $supp\, \hat{\psi}_2 \subseteq [-1,1]$.
تابع $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{\psi}(\xi_1,\xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_1)\hat{\psi}_2\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right),$$

که آن را یک شرلت کلاسیک[2] می‌نامیم.
با استفاده از گزاره ۲ مرجع[۱۳]، می‌توان نتیجه گرفت سیستم شرلت $\{\psi_{j,k,m}\}_{j,k,m}$ یک قاب پارسوال[3] برای فضای $L^2(\mathbb{R}^2)$ است.
حال تابع جدید $\tilde{\psi}_{j,k,m}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم
$\tilde{\psi}_{j,k,m}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

بطوریکه $\hat{\tilde{\psi}}_{j,k,m}(\xi,t) = \hat{\tilde{\psi}}_{j,k,m}(\xi,0)e^{\pm i|\xi|ct}$ و $\hat{\tilde{\psi}}_{j,k,m}(\xi,0) = \hat{\psi}_{j,k,m}(\xi)$ که در آن ψ یک شرلت کلاسیک می‌باشد. در ادامه ثابت می‌کنیم $\{\tilde{\psi}_{j,k,m}\}_{j,k,m}$ یک قاب پارسوال است.

قضیه ۱-۲. برای تابع $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$، سیستم شرلت $\{\tilde{\psi}_{j,k,m}(x,t)\}_{j,k,m}$ یک قاب پارسوال است.
برهان.

$$\sum_{j,k,m} \left|\langle f, \tilde{\psi}_{j,k,m}\rangle\right|^2 = \sum_{j,k,m} \left|\langle \hat{f}, \hat{\tilde{\psi}}_{j,k,m}\rangle\right|^2$$
$$= \sum_{j,k,m} \left|\iint \hat{f}(\xi)e^{\pm i|\xi|ct}\overline{\hat{\psi}}_{j,k,m}(\xi)e^{\mp i|\xi|ct}d\xi\right|^2$$
$$= \sum_{j,k,m} \left|\iint \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}}_{j,k}(\xi)e^{im\xi}d\xi\right|^2$$
$$= \int |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_{j,k} |\hat{\psi}_{j,k}(\xi)|^2\, d\xi,$$

به دلیل اینکه $\sum_{j,k} |\hat{\psi}_{j,k}(\xi)|^2 = 1$ (گزاره ۲ مرجع [۱۳])، پس داریم

$$\sum_{j,k,m} \left|\langle f, \tilde{\psi}_{j,k,m}\rangle\right|^2 = \|f\|^2.$$

چون خانواده $\{\tilde{\psi}_{j,k,m}\}_{j,k,m}$ یک قاب پارسوال برای فضای $L^2(\mathbb{R}^3)$ است، بنابراین تابع $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ را می‌توان به صورت زیر بسط داد

$$f = \sum_{j,k,m}\langle f, \tilde{\psi}_{j,k,m}\rangle\, \tilde{\psi}_{j,k,m}\,. \qquad (۳)$$

ضرایب شرلت $\langle f, \tilde{\psi}_{j,k,m}\rangle$ را با نماد $C_{j,k,m}$ نشان می‌دهیم. در ادامه با استفاده از (۳)، معادله موج (۱) را حل می‌کنیم.

۲. نتایج اصلی

ابتدا معادله موج مقدار اولیه همگن را در فضای $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0\,, \\ r = (x_1,\cdots,x_n), \\ u|_{t=0} = w(r), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = v(r), \end{cases} \qquad (۴)$$

که در آن c یک ضریب ثابت در $\mathbb{R}$ است.
در معادله (۴) با قرار دادن $n=2$، پس معادله موج دو بعدی زیر را خواهیم داشت

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u\,, \\ u|_{t=0} = w(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = v(x), \end{cases} \qquad (۵)$$

که در آن $x=(x_1,x_2)$ و Δ عملگر لاپلاس $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ است.

با قرار دادن (۳) در (۵) داریم

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{j,k,m} C_{j,k,m}\,\tilde{\psi}_{j,k,m}\,(x,t), \\ \Delta u(x,t) &= \sum_{j,k,m} C^{\Delta}_{j,k,m}\,\tilde{\psi}_{j,k,m}\,(x,t), \end{aligned} \qquad (۶)$$

1. Bump function
2. Classical shearlet
3. Parseval frame

که در آن $C_{j,k,m} = \langle u, \tilde{\psi}_{j,k,m}\rangle$ و $C^{\Delta}_{j,k,m} = \langle \Delta u, \tilde{\psi}_{j,k,m}\rangle$

اکنون، از (۵) و(۶) تبدیل فوریه می‌گیریم و بدست می‌آوریم.

$$\sum_{j,k,m} C_{j,k,m}\,(i\xi_3)^2 \hat{\tilde{\psi}}_{j,k,m} = c^2 \sum_{j,k,m} C^{\Delta}_{j,k,m}\,\hat{\tilde{\psi}}_{j,k,m}\,,$$

که در آن $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

بنابراین، داریم

$$\sum_{j,k,m} [C_{j,k,m}\,(i\xi_3)^2 - c^2 C^{\Delta}_{j,k,m}]\hat{\tilde{\psi}}_{j,k,m} = 0\,,$$

و با توجه به تعریف $C_{j,k,m}$ ، $C^{\Delta}_{j,k,m}$ و برخی خواص ضرب داخلی، رابطه زیر حاصل می‌گردد

$$\sum_{j,k,m} \left[\langle u.\,(i\xi_3)^2 - c^2\Delta u, \tilde{\psi}_{j,k,m}\rangle\right] \hat{\tilde{\psi}}_{j,k,m} = 0\,,$$

به دلیل اینکه $\{\tilde{\psi}_{j,k,m}\}_{j,k,m}$ یک قاب پارسوال است، پس

$$\langle u(i\xi_3)^2 - c^2\Delta u, \tilde{\psi}_{j,k,m}\rangle = 0\,.$$

بنابراین

$$-\xi_3^2 C_{j,k,m} = c^2 C^{\Delta}_{j,k,m}\,.$$

با استفاده از تعریف $C_{j,k,m}$ ، $C^{\Delta}_{j,k,m}$ و فرمول پلانچرل، بدست می‌آوریم

$$C_{j,k,m} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \hat{u}(\xi).\,\bar{\hat{\tilde{\psi}}}_{j,k,m}(\xi) e^{im\xi} d\xi\,,$$

$$C^{\Delta}_{j,k,m} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \widehat{\Delta u}\,.\,\bar{\hat{\tilde{\psi}}}_{j,k,m}(\xi) e^{im\xi} d\xi\,.$$

اکنون از خاصیت تبدیل فوریه در مورد مشتق [۱۴]، داریم

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)^{\wedge} = (i\omega)^n \hat{f}(\omega).$$

لذا

$$C^{\Delta}_{j,k,m} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int (\xi_1^2 + \xi_2^2)\hat{u}(\xi)\,.\,\bar{\hat{\tilde{\psi}}}_{j,k,m}(\xi) d\xi\,.$$

با بکار بردن تغییر متغیر $S^T_{-k} A_{2^{-j}}\xi$ به جای ξ ، خواهیم داشت

$$C_{j,k,m} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int A_{2^j} S_k^T \left(\hat{u}(\xi).\,\bar{\hat{\tilde{\psi}}}_{j,k,m}(\xi)\right) d\xi\,,$$

و

$$C^{\Delta}_{j,k,m} = \frac{-1}{(2\pi)^2}\int \left|A_{2^j} S_k^T \xi\right|^2 A_{2^j} S_k^T \left(\hat{u}(\xi).\,\bar{\hat{\tilde{\psi}}}_{j,k,m}(\xi)\right) d\xi\,,$$

برای سهولت، در نظر می‌گیریم

$\Gamma := A_{2^j} S_k^T \left(\hat{u}(\xi).\,\bar{\hat{\tilde{\psi}}}_{j,k,m}(\xi)\right)$. داریم

$$C_{j,k,m} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \Gamma d\xi\,,$$

و

$$\begin{aligned}
C^{\Delta}_{j,k,m} &= \frac{-1}{(2\pi)^2}\int (2^{2j}\xi_1^2 + 2^j(k\xi_1 + \xi_2)^2)\Gamma d\xi \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^2}\int \big(2^{2j}\xi_1^2 + 2^j k^2 \xi_1^2 + 2^{j+1} k\xi_1\xi_2 \\
&\qquad + 2^j \xi_2^2\big)\Gamma d\xi \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^2}\int 2^j\big(2^j\xi_1^2 + k^2\xi_1^2 + 2k\xi_1\xi_2 \\
&\qquad + \xi_2^2\big)\Gamma d\xi \\
&= -\frac{2^j}{(2\pi)^2}\int \Big(\big(2^j + k^2\big)\xi_1^2 + 2k\xi_1\xi_2 \\
&\qquad + \xi_2^2\Big)\Gamma d\xi\,.
\end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که $C^{\Delta}_{j,k,m}$ از ترکیب سه قسمت زیر تشکیل شده است

$$C^{\Delta}_{k_1} = \frac{2^j}{(2\pi)^2}\left(2^j + k^2\right)\int -\xi_1^2 \Gamma d\xi\,, \tag{۷}$$

$$C^{\Delta}_{k_2} = \frac{2^j}{(2\pi)^2}\int -\xi_2^2 \Gamma d\xi, \tag{۸}$$

$$C^{\Delta}_{k_1,k_2} = -\frac{2^j}{(2\pi)^2}(2k)\int \xi_1\xi_2 \Gamma d\xi. \tag{۹}$$

اگر از روابط (۷)، (۸) و (۹) تبدیل فوریه معکوس بگیریم، عبارات زیر را بدست می‌آوریم

$$C^{\Delta}_{k_1} = 2^j\left(2^j + k^2\right)\left(\frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_1^2}\right),$$

$$C_{k_2}^{\Delta} = 2^j \left(\frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_2^2}\right),$$
$$C_{k_1,k_2}^{\Delta} = 2^j (2k) \left(\frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_1 \partial m_2}\right).$$

حال، می‌توان با کمک ضرایب شرلت یک بسط برای معادله موج به صورت زیر نوشت

$$-\beta^2 C_{j,k,m} = c^2 2^j \left[\left(2^j + k^2\right)\left(\frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_1^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_2^2}\right) + (2k)\left(\frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_1 \partial m_2}\right)\right], \qquad (۱۰)$$

که در آن $\beta \coloneqq |\xi| ct$.

فرض کنیم $C \coloneqq 2^j$، $B \coloneqq k2^j$ و $A \coloneqq 2^j(2^j + k^2)$

در این صورت داریم

$$B^2 - AC = k^2 2^{2j} - 2^j\left(2^j + k^2\right)2^{2j}$$
$$= -2^{3j} < 0\,,$$

بنابراین، معادله (۱۰) یک معادله مشتقات جزئی بیضوی دو بعدی می‌باشد. این معادله را می‌توان با استفاده از روش مشتق متناهی[1] و یا روش شبه طیفی[2] حل نمود[۱۵، ۱۶].

توجه ۲-۱. به طور مشابه، با استفاده از تعریف شرلت n بعدی (۲)، می‌توان معادله موج n- بعدی (۴) را نیز حل نمود.

1. Finite difference method
2. Pseudo-spectral method

فهرست منابع

1. Koshlyakov, N.S., Smirnov, M.M. and Gliner, E.B. Differential equations of mathematical physics, (1964).
2. Kaiser, G. A Friendly Guide to Wavelets, Boston: Birkhauser, (1994).
3. Perel, M. V., and Sidorenko, M. S. Wavelet-based integral representation for solutions of the wave equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 42(37), (2009) 375211.
4. Bracewell, R. N. The Fourier transform and its applications, New York: McGraw-Hill, (1986).
5. Bagrov, V. G. and Gitman, D. M. Exact solutions of relativistic wave equations, Kluwer Acad. Publisher, Dordrecht Boston London, (1990).
6. Dong, Sh. H. Wave equations in higher dimensions, Springer Dordrecht Heidelberg, London, New York, (2011).
7. Bertoluzza, S., Russo, G., Falleta, S. and Shu, C. W. Wavelets for Partial Differential Equations, Numerical Solutions of Partial Differential Equations, (2009) 37–53.
8. Hsiao, C. H. Numerical inversion of Laplace transform via wavelet in partial differential equations, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 30(2), (2014) 536–549.
9. Demanet, L. Curvelets, wave atoms, and wave equations, Doctoral dissertation, California Institute of Technology, (2006).
10. Sun, B., et al., Solving wave equations in the curvelet domain: A multi-scale and multi-directional approach, Journal of Seismic Exploration, 18.4, (2009) 385–399.
11. Amin Khah, M., Askari Hemmat, A. and Raisi Tousi, R. Integral representation for solutions of the wave equation by shearlets, Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 127(22), (2016) 10554–10560.
12. Dahlke, S., Gabriele, S. and Gerd, T. The continuous shearlet transform in arbitrary space dimensions, Journal of Fourier Analysis and Applications, 16.3, (2010) 340-364.
13. Kutyniok, G. and Labate, D. Shearlets: Multiscale Analysis for Multivariate Data, Birkhauser, Basel, 2012.
14. Qian, S. and Weiss, J. Wavelets and the numerical solution of partial differential equations, Journal of Computational Physics, 106(1), (1993) 155–175.
15. Pfeiffer, H. P., et al. A multidomain spectral method for solving elliptic equations, Computer physics communications, 152.3 (2003) 253–273.
16. Smith, G. D. Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods, Oxford University press, (1985).