دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره یازدهم، پاییز ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مدل DEA احتمالی- امکان با داده‌های تصادفی فازی در حضور توزیع چوله- نرمال

بهرخ مهرآسا[۱]، محمدحسن بهزادی[۱*]

[۱] گروه آمار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۱/۱۸   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۳/۰۵

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش ریاضی برای بررسی عملکرد واحدهای تحت تصمیم‌گیری (DMU) می‌باشد. در نظریه‌ی کلاسیک DEA برای ارزیابی عملکرد یک سازمان فرض بر این است که داده‌های ورودی و خروجی به‌صورت قطعی می‌باشند. در حالی که در دنیای واقعی اغلب ورودی و خروجی‌ها مبهم و تصادفی می‌باشند. توزیع نرمال یک توزیع پیوسته است که با توجه به ویژگی‌هایش از اهمیت ویژه‌ای در آمار برخوردار است. در بسیاری از موارد فرض شده است که داده‌های تصادفی فازی دارای توزیع متقارن نرمال هستند اما در عمل ممکن است چنین فرضی برقرار نباشد. بنابراین استفاده از توزیع نرمال منجر به نتیجه‌گیری غلط خواهد شد. در این مقاله مدل DEA تصادفی فازی را در حالت امکان در حضور توزیع چوله نرمال مورد بررسی قرار داده‌ایم. این روش در یک حالت خاص روش‌های قبلی را شامل می‌شود. در نهایت مدل بیان شده را در یک مثال عددی نشان داده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، واحد تصمیم‌گیری، توزیع چوله–نرمال، متغیر تصادفی فازی.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: Behzadi@srbiau.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها DEA ابزاری توانمند برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده DMU با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه است. مدل CCR یکی از مدل‌های اساسی در DEA است که اولین بار توسط چارنز [۱] معرفی شده است. از آن زمان تاکنون به‌دلیل استفاده‌ی فراوان DEA در مسایل گوناگون، مدل‌های متعددی در این زمینه ارایه شده است. در کاربرد داده‌های ورودی و خروجی اغلب تصادفی و فازی می‌باشند. تاکنون روش‌های متفاوتی برای حل مسائل DEA با داده‌های فازی ارائه شده است. ویو و همکاران [۲]، ژو [۳]، حاتمی–ماربینی و همکاران [۴] و توانا و همکاران [۵] مدل‌هایی را برای ورودی و خروجی‌های تصادفی فازی با استفاده از توزیع نرمال ارائه کرده‌اند.

توزیع نرمال یکی از توزیع‌های پیوسته است که به دلیل متقارن و خوش رفتار بودن آن از اهمیت ویژه‌ای در آمار برخوردار است. این توزیع خواص زیادی دارد که باعث افزایش کاربردهای آن شده است. در مدل‌های DEA با داده‌های تصادفی فازی، محققان در تحقیقات گذشته‌ی خود فرض کرده‌اند که متغیرهای ورودی و خروجی از توزیع نرمال پیروی می‌کنند اما در جهان واقعی ممکن است چنین فرضی برقرار نباشد و داده‌ها کمی چولگی داشته و نامتقارن باشند، لذا اگر توزیع نامتقارنی وجود داشته باشد که دارای خواصی مشابه توزیع نرمال باشد، این توزیع می‌تواند نقشی اساسی در تحلیل چنین داده‌ایی داشته باشد.

یکی از این توزیع‌ها که نخستین بار توسط آزالینی [۶] معرفی شده و مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است توزیع چوله- نرمال می‌باشد. این توزیع یک پارامتر تنظیم چولگی دارد که با صفر قرار دادن این مقدار، توزیع نرمال حاصل می‌شود لذا توزیع چوله نرمال در برگیرنده‌ی توزیع نرمال نیز است. توزیع حدی مجموع متغیرهای تصادفی چوله- نرمال توسط نظری و بهزادی [۷] و همچنین توزیع خطای نامتقارن با حضور توزیع چوله نرمال توسط نظری و بهزادی [۸] در تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های تصادفی مورد استفاده قرار گرفته است. در این مقاله، ما فرض می‌کنیم که متغیرهای ورودی و خروجی تصادفی فازی هستند و از توزیع چوله نرمال پیروی می‌کنند و مدل را در حالت احتمالی- امکان در حضور توزیع چوله- نرمال ارائه داده‌ایم و در نهایت در یک مثال عددی مدل پیشنهادی را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است. در بخش بعدی به معرفی توزیع چوله- نرمال و تعاریف اولیه فازی پرداخته‌ایم. در بخش ۳ مدل را در حالت احتمالی- امکان در حضور توزیع چوله- نرمال بیان می‌باشد. در بخش ۴ مدل بخش قبل را در قالب یک مثال عددی بیان می‌نماییم. در پایان به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته‌ایم.

۲- تعاریف اولیه

در این بخش ابتدا چند تعریف اولیه را درباره ی مجموعه های فازی (دوبیز و پراد [۹]، کافمن و گوپتا [۱۰]، کلیر و یان [۱۱] و زیمرمن [۱۲]، متغیر تصارفی فازی (لیو و لیو [۱۳] و[۱۴]) و توزیع چوله- نرمال (آزالینی [۶]) آورده شده است.

تعریف ۱: توزیع چوله نرمال[1]

توزیع چوله –نرمال، معرفی شده توسط آزالینی [۶]، که یک خانواده‌ی پرکاربرد از توزیع‌هاست به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

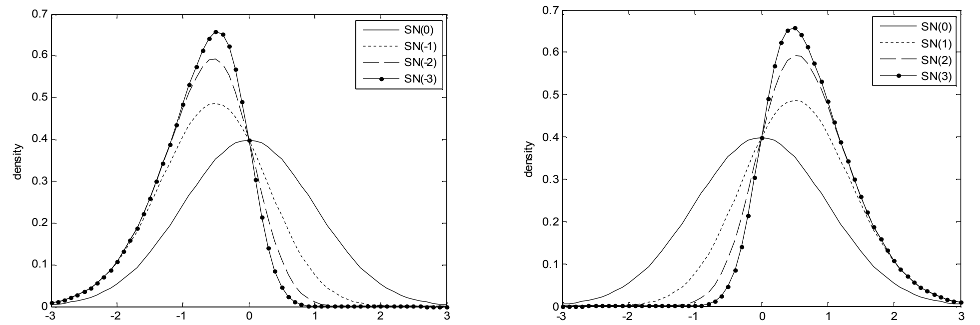
گوییم متغیر تصادفی Z دارای توزیع چوله- نرمال با پارامتر حقیقی δ است هرگاه تابع چگالی احتمال[2] آن به صورت زیر باشد:

$$f_Z(z) = 2\phi(z)\Phi(\delta z). \qquad (۱)$$

که در آن ϕ و Φ به ترتیب نشاندهنده‌ی تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی[3] توزیع نرمال استاندارد است. این توزیع که با عبارت $Z \sim SN(\delta)$ نمایش داده می‌شود، توزیع چوله- نرمال استاندارد با پارامتر شکل δ نامیده می‌شود. پارامتر شکل δ را می‌توان پارامتر کنترل چولگی[4] نامید. تابع چگالی فوق به ازای مقادیر مثبت δ

1. Skew-Normal distribution
2. Probability Density Function
3. Cumulative Density Function
4. Skewnees Control Parameter

چوله به راست، به ازای مقادیر منفی δ چوله به چپ و به ازای $\delta = 0$ متقارن و به چگالی نرمال استاندارد تبدیل می‌شود. شکل ۱تابع چگالی چوله –نرمال استاندارد را به ازای مقادیر مختلف δ نشان می‌دهد.



شکل۱ تابع چگالی توزیع چوله– نرمال به ازایδ های مختلف

اضافه کردن پارامتر های مکان و مقیاس به توزیع چوله– نرمال، انعطاف‌پذیری آن را بیشتر می‌کند و با تغییر مقدار پارامترها می‌توان کنترل بیشتری روی توزیع داشت. با در نظر گرفتن تبدیل $X = \mu + \sigma Z \quad \mu \in \mathbb{R}\,,\ \sigma > 0$ متغیر تصادفی X دارای توزیع چوله- نرمال با تابع چگالی احتمال:

$$f_X(x) = \frac{2}{\sigma}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})\Phi(\delta\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)) \qquad (۲)$$

است که به‌صورت $X \sim SN(\mu,\sigma^2,\delta)$ نشان داده می‌شود. امید ریاضی و واریانس توزیع X به صورت رابطه (۳) قابل محاسبه است:

$$E(X) = \mu + \sigma\mu_z,$$
$$V(X) = \sigma^2(1-\mu_z^2), \qquad (۳)$$

که در آن $\mu_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\gamma$ و $\gamma = \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}$.

تعریف ۲: متغیر تصادفی فازی، متغیر تصادفی فازی تابعی از فضای امکان $(\Theta\,,P(\Theta),Pos)$ به مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است.

تعریف ۳: مجموعه فازی محدب، مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب گفته می‌شود اگر و فقط اگر برای $\forall x,y \in \mathcal{R}, \forall\lambda \in [0,1]$ نامساوی $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{A}}(y)\right)$ برقرار باشد.

تعریف ۴: متغیر فازی نرمال، متغیر فازی $\tilde{A}$ در فضای امکان $(\Theta\,,P(\Theta),Pos)$ نرمال است اگر:

$$Sup\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

تعریف ۵: مجموعه‌های α– برش ($\alpha - \mathrm{cut}$)، مجموعه‌ی سطح α یک متغیر فازی $\tilde{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_\alpha = \{x \in \Re | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

تعریف ۶: متغیر تصادفی فازی از نوع LR، متغیر فازی $\tilde{\tilde{R}} = (\alpha, a(\omega), \beta)$ که $a(\omega)$ یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال می‌باشد و به‌صورت $a \sim N(E(a),\sigma^2)$ نمایش داده می‌شود. آن‌گاه $\tilde{\tilde{R}}$ یک متغیر فازی است و با تابع عضویت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a(\omega)-x}{\alpha}\right) & a(\omega) - a < x \leq a(\omega) \\ 1 & x = a(\omega) \\ R\left(\frac{x-m_2}{\beta}\right) & a(\omega) < x < a(\omega) + a \end{cases}$$

تعریف ۷: حساب فازی[۱]، فرض کنید $\tilde{A} = (\alpha, m_1, m_2, \beta)_{LR}$ و $\tilde{B} = (\bar{\alpha}, \overline{m_1}, \overline{m_2}, \bar{\beta})_{LR}$ دو عدد مثبت فازی باشد، در نتیجه حساب فازی دو عدد $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

جمع:

$$(\alpha, m_1, m_2, \beta)_{LR} + (\bar{\alpha}, \overline{m_1}, \overline{m_2}, \bar{\beta})_{LR} = (\alpha + \bar{\alpha}, m_1 + \overline{m_1}, m_2 + \overline{m_2}, \beta + \bar{\beta})_{LR}$$

تفریق:

$$(\alpha, m_1, m_2, \beta)_{LR} - (\bar{\alpha}, \overline{m_1}, \overline{m_2}, \bar{\beta})_{LR} = (\alpha + \bar{\beta}, m_1 - \overline{m_2}, m_2 - \overline{m_1}, \beta + \bar{\alpha})_{LR}$$

ضرب:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (\alpha, m_1, m_2, \beta)_{LR} \otimes (\bar{\alpha}, \overline{m_1}, \overline{m_2}, \bar{\beta})_{LR} \simeq (\overline{m_1}\alpha + m_1\bar{\alpha} - \overline{m_1}\, m_1, m_1\overline{m_1}, m_2\overline{m_2}, \overline{m_2}\beta + m_2\bar{\beta} + \beta\bar{\beta})_{LR}$$

و اگر k یک عدد حقیقی غیرصفر باشد، بنابراین:

$$k(\alpha, m_1, m_2, \beta)_{LR} = \begin{cases} (k\alpha, km_1, km_2, k\beta)_{LR} & k > 0 \\ (-k\beta, km_2, km_1, -k\alpha)_{LR} & k < 0 \end{cases}$$

تعریف ۸: فضای امکان[2]، فرض کنید $(\Theta, P(\Theta), Pos)$ فضای امکان باشد، که Θ یک مجموعه غیر تهی شامل همه رخدادهای ممکن و $P(\Theta)$ مجموعه توانی Θ است. برای هر $A \subseteq P(\Theta)$ عدد نامنفی $Pos(A)$ وجود دارد که اندازه امکان با خواص زیر نامیده می‌شود:

الف) $Pos(\Theta) = 1$ و $Pos(\phi) = 0$

ب) برای هر $A, B \in P(\Theta)$ که $A \subseteq B$ نتیجه می‌شود که: $Pos(A) \leq Pos(B)$

ج) $Pos(\cup_k A_k) = Sup_k\, Pos(A_k)$

۳- مدل تصادفی فازی احتمالی- امکان CCR با حضور توزیع چوله- نرمال

در این بخش مدل CCR را در حالت احتمالی- امکان با استفاده از توزیع چوله- نرمال بررسی می‌کنیم. فرض بر آن است که داده‌های ورودی و خروجی تصادفی فازی هستند و از توزیع چوله- نرمال پیروی می‌کنند.

فرض کنید n، DMU داریم. به‌طوری که ورودی تصادفی فازی iام، $i = 1,2, \dots, m$، هر DMU مستقل از هم می‌باشند و خروجی تصادفی فازی rام، $r = 1,2, \dots, s$، هر DMU نیز مستقل از هم می‌باشند.

همچنین فرض کنید $\tilde{\bar{x}}_{ij} = \left(x_{ij}^m, x_{ij}^\alpha, x_{ij}^\beta\right)$ که در آن به ازای هر $j = 1,2, \dots, n$، $X_{ij}^m \sim CSN_{1,1}\left(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2, \delta_{ij}, 0, \sigma_{ij}^2\right)$ ورودی تصادفی فازی و $\tilde{\bar{y}}_{rj} = \left(y_{rj}^m, y_{rj}^\alpha, y_{rj}^\beta\right)$ که $Y_{rj}^m \sim CSN_{1,1}\left(\eta_{rj}, \tau_{rj}^2, \varepsilon_{rj}, 0, \tau_{rj}^2\right)$ خروجی تصادفی فازی می‌باشند. مدل CCR احتمالی-امکان که توسط توانا و همکاران [۵] ارائه شده است به‌صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
& max\ \varphi \\
& s.t. \\
& Pr\left[Pos\left(\varphi \leq \textstyle\sum_{r=1}^{s} u_r\, \tilde{\bar{y}}_{rp}\right) \geq \delta\right] \geq \gamma \quad (i) \\
& Pr\left[Pos\left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} v_i\, \tilde{\bar{x}}_{ip} = 1\right) \geq \delta'\right] \geq \gamma' \quad (ii) \\
& Pr\left[Pos\left(\textstyle\sum_{r=1}^{s} u_r\, \tilde{\bar{y}}_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i\, \tilde{\bar{x}}_{ij} \leq 0\right) \geq \delta_j\right] \geq \gamma_j, \\
& j = 1, \dots, n \qquad (iii) \qquad (۴) \\
& u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

که در قید (i)، δ و $\gamma \in [0, 1]$ ثابت، در قید (ii)، δ' و $\gamma' \in [0, 1]$ ثابت و به ازای هر $j = 1, \dots, n$ در قید (iii)، δ_j و $\gamma_j \in [0, 1]$ ثابت است. در مدل (۴)، $Pos(0)$ و $\Pr(0)$ به ترتیب نشان دهنده‌ی امکان و احتمال پیشامد (۰) می‌باشند. حال فرض می‌کنیم ورودی‌های تصادفی فازی $\tilde{\bar{x}}_{ij}$ و خروجی‌های تصادفی فازی $\tilde{\bar{y}}_{rj}$ به ترتیب به‌وسیله‌ی دو تابع عضویت زیر مشخص می‌شوند:

$$\mu_{\tilde{\bar{x}}_{ij}}(t) = \begin{cases} L\left(\frac{x_{ij}^m - t}{x_{ij}^\alpha}\right) & t \leq x_{ij}^m \\ R\left(\frac{t - x_{ij}^m}{x_{ij}^\beta}\right) & t \geq x_{ij}^m \end{cases} \qquad (۵)$$

$$\mu_{\tilde{\bar{y}}_{rj}}(t) = \begin{cases} L\left(\frac{y_{rj}^m - t}{y_{rj}^\alpha}\right) & t \leq y_{rj}^m \\ R\left(\frac{t - y_{rj}^m}{y_{rj}^\beta}\right) & t \geq y_{rj}^m \end{cases} \qquad (۶)$$

1. fuzzy arithmetic
2. Possibility space

در روابط (۵) و(۶)، x_{ij}^m و y_{rj}^m متغیر تصادفی دارای توزیع چوله- نرمال هستند که به صورت $x_{ij}^m \sim CSN_{1,1}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2, \delta_{ij}, 0, \sigma_{ij}^2)$ و $y_{rj}^m \sim CSN_{1,1}(\eta_{rj}, \tau_{rj}^2, \varepsilon_{rj}, 0, \tau_{rj}^2)$ نمایش داده می‌شوند. با استفاده از اصل توسیع فازی اعداد $\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{\bar{y}}_{rj}$ و $\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{\bar{x}}_{ij}$ دارای توابع (۷) و (۸) هستند.

$$\mu_{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{\bar{x}}_{ij}}(t) = \begin{cases} L\left(\frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^m - t}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^\alpha}\right) & t \le \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^m \\ R\left(\frac{t - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^m}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^\beta}\right) & t \ge \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^m \end{cases} \tag{۷}$$

$$\mu_{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{\bar{y}}_{rj}}(t) = \begin{cases} L\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^m - t}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^\alpha}\right) & t \le \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^m \\ R\left(\frac{t - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^m}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^\beta}\right) & t \ge \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^m \end{cases} \tag{۸}$$

با توجه به روابط (۷) و (۸) اعداد فازی $\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{\bar{y}}_{rj}$ و $\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{\bar{x}}_{ij}$ به صورت
$\left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^m, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^\alpha, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^\beta\right)_{LR}$ و $\left(\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^m, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^\alpha, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^\beta\right)_{LR}$ نمایش داده می‌شوند. از δ برش اعداد فازی $\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{\bar{y}}_{rj}$ و $\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{\bar{x}}_{ij}$ بازه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\left[\left(\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}\right)^L, \left(\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}\right)^R\right] = \left[\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^m - L^{-1}(\delta)\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^\alpha, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^m + R^{-1}(\delta)\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^\beta\right]$$

$$\left[\left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}\right)^L, \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}\right)^R\right] = \left[\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^m - L^{-1}(\delta)\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^\alpha, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^m + R^{-1}(\delta)\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^\beta\right]$$

برای حل برنامه ریزی احتمالی- امکان مدل (۴) باید محدودیت‌ها به محدودیت‌های قطعی تبدیل شوند. قضیه و لم زیر که توسط لیو و لیو [۱۳] و ساواکا [۱۵] ارائه شده است، نقش مهمی برای حل مدل دارند.

قضیه‌ی ۱: فرض کنید ξ یک بردار فازی تصادفی و g_j توابع پیوسته با مقدار حقیقی برای $j = 1, \dots, n$ باشند. روابط زیر را داریم:

۱- امکان $Pos(g_j(\xi(\omega)) \le 0, j = 1, \dots, n)$ یک متغیر تصادفی است.

۲- لزام $Nec(g_j(\xi(\omega)) \le 0, j = 1, \dots, n)$ یک متغیر تصادفی است.

۳- اعتبار $Cr(g_j(\xi(\omega)) \le 0, j = 1, \dots, n)$ یک متغیر تصادفی است.

برهان: [۱۳].

لم: فرض کنید $\bar{\lambda}_1$ و $\bar{\lambda}_2$ دو عدد فازی مستقل از نوع LR باشند. برای α داده شده داریم:

الف) $Pos(\bar{\lambda}_1 \ge \bar{\lambda}_2) \ge \alpha$ اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\lambda_{1,\alpha}^R \ge \lambda_{2,\alpha}^L$$

ب) $Nec(\bar{\lambda}_1 \ge \bar{\lambda}_2) \ge \alpha$ اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\lambda_{1,1-\alpha}^L \ge \lambda_{2,\alpha}^R$$

که $\lambda_{1,\alpha}^R$، $\lambda_{2,\alpha}^L$، $\lambda_{1,1-\alpha}^R$ و $\lambda_{2,\alpha}^L$ مجموعه اعداد چپ و راست α –برش هستند.

برهان: [۱۵].

بر مبنای لم ۱ و قضیه‌ی ۱ می‌توان مدل (۴) را به صورت مدل (۹) بیان کرد:

$$\begin{aligned} & \max \ \varphi \\ & s.t. \quad \Pr\left(\varphi \le \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^m + R^{-1}(\delta)\sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^\beta\right) \ge \gamma \qquad (i) \\ & Pr\left[\sum_{i=1}^m v_i(x_{ip}^m + R^{-1}(\delta')x_{ip}^\beta) \ge 1\right] \ge \gamma' \qquad (ii) \\ & Pr\left[\sum_{i=1}^m v_i(x_{ip}^m - L^{-1}(\delta')x_{ip}^\alpha) \le 1\right] \ge \gamma' \qquad (iii) \\ & Pr\left[\sum_{r=1}^s u_r(y_{rj}^m - L^{-1}(\delta)y_{rj}^\alpha) - \sum_{i=1}^m v_i(x_{ij}^m + R^{-1}(\delta)x_{ij}^\beta) \le 0\right] \ge \gamma_j, \\ & j = 1, \dots, n, \qquad (iv) \end{aligned} \tag{۹}$$

$$u_r\,,v_i \;\ge 0,\quad r=1,\dots,s,\;\; i=1,\dots,m.$$

با استفاده از توزیع چوله–نرمال بسته در مدل‌های DEA، می‌توان مدل تصادفی فازی CCR (۹) را به مدل LP تبدیل نمود. برای بدست آوردن توزیع قید (i) فرض می‌کنیم به ازای $j=1,\dots,n$ خروجی‌های rام، $r=1,\dots,s$، هر DMU مستقل از هم دارای توزیع چوله– نرمال با پارامترهای η_{rj} ، τ_{rj}^2 و ε_{rj} باشند و یا به عبارت دیگر

$$y_{rj}^m \sim\sim\; CSN_{1,1}\left(\eta_{rj}\,,\tau_{rj}^2,\;\varepsilon_{rj},0,\tau_{rj}^2\right)$$
$$r=1,\dots,s$$

با قرار دادن $a'=[u_1\;\;u_2\;\;\dots\;\;u_s]$ خواهیم داشت:

$$f_{Q_p}(q_p)=$$
$$2^{-s}\,\phi\left(q_p;0\,,1\,\right)\Phi_s\left(\tau_p^O(u)\boldsymbol{D}_p^{\star}q_p;\;\boldsymbol{0},\boldsymbol{\Delta}_p^{\star}\right),\quad (۱۰)$$

که در آن

$$Q_p=$$
$$\frac{K_p-\eta_p}{\tau_p^O(u)}\;\sim\; CSN_{1,s}\left(0,1,\tau_p^O(u)\boldsymbol{D}_p^{\star},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\Delta}_p^{\star}\right),$$
$$K_p=$$
$$\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp}+R^{-1}(\delta)\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp}^{\beta}-\varphi$$
$$\eta_p=$$
$$\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r\,\eta_{rp}\;+R^{-1}(\delta)\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp}^{\beta}-\varphi$$
$$\left(\tau_p^O(u)\right)^2=\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r^2\tau_{rp}^2\qquad (۱۱)$$
$$\boldsymbol{D}_r^{\star}\;=$$
$$\frac{1}{(\tau_p^O(u))^2}\left[u_1\varepsilon_{1p}\tau_{1p}^2\quad\dots\;u_s\varepsilon_{sp}\tau_{sp}^2\right]',$$
$$\boldsymbol{\nu}=[0,0,\dots,0]'\,,$$
$$\boldsymbol{\Delta}_p^{\star}=\left[\,B_{rk}^{(p)}\right],$$

و

$$B_{rr}^{(p)}\;=1+\varepsilon_{rp}^2\tau_{rp}^2-\frac{u_r^2\varepsilon_{rp}^2\tau_{rp}^4}{\tau_p^O(\lambda)},$$
$$r=1,2,\dots,s$$
$$B_{rk}^{(p)}\;=\;B_{kr}^{(p)}\;\;=-\frac{u_r u_k\varepsilon_{rk}\varepsilon_{kr}\tau_{kr}^2\tau_{rk}^2}{\tau_p^O(\lambda)},$$
$$r,k=1,2,\dots,s$$

با استفاده از محدودیت اول مدل تصادفی (۹) و همچنین روابط(۱۰) و (۱۱) داریم:

$$\mathrm{Pr}\left(\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp}^m+R^{-1}(\delta)\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp}^{\beta}-\right.$$
$$\left.\varphi\ge 0\right)\ge\gamma$$
$$Pr\left(\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp}^m+R^{-1}(\delta)\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp}^{\beta}-\right.$$
$$\left.\varphi\le 0\right)\le 1-\gamma$$
$$Pr\left(K_p\le 0\right)\le 1-\gamma$$
$$Pr\left(\frac{K_p-\eta_p}{\tau_p^O(u)}\le\frac{-\eta_p}{\tau_p^O(u)}\right)\le 1-\gamma$$
$$Pr\left(Q_p\le\frac{-\eta_p}{\tau_p^O(u)}\right)\le 1-\gamma$$
$$\frac{-\eta_p}{\tau_p^O(u)}\le\Psi_p^{-1}(1-\gamma)$$

که در آن $\Psi_p^{-1}(1-\gamma)$ چندک مرتبه‌ی $1-\gamma$ از تابع چگالی (۱۰) می‌باشد و به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\int_{-\infty}^{\Psi_p^{-1}(1-\gamma)}2^{-s}\,\phi\left(q_p;0\,,1\,\right)\dots$$
$$\Phi_s\left(\tau_p^O(u)\boldsymbol{D}_p^{\star}q_p;\;\boldsymbol{0},\boldsymbol{\Delta}_p^{\star}\right)\;dq_p=1-\gamma$$

بنابراین فرم قطعی قید اول به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi-\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r\eta_{rp}-R^{-1}(\delta)\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp}^{\beta}$$
$$\le\tau_p^O(u)\;\Psi_p^{-1}(1-\gamma)$$

با روشی مشابه می‌توان قیدهای (ii) و (iii) را در مدل (۹) به صورت زیر تبدیل نمود:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m}\nu_i\,\mu_{ip}+R^{-1}(\delta')\sum_{i=1}^{m}\nu_i x_{ip}^{\beta}+$$
$$\sigma_p^I(\nu)\;\Psi_p^{-1'}(1-\gamma')\ge 1$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^{m}\nu_i\,\mu_{ip}+L^{-1}(\delta')\sum_{i=1}^{m}\nu_i x_{ip}^{\alpha}+$$
$$\sigma_p^I(\nu)\;\Psi_p^{-1'}(1-\gamma')\le 1$$
$$\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r\eta_{rp}-\sum_{i=1}^{m}\nu_i\,\mu_{ip}-$$
$$\left(L^{-1}(\delta_j)\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}^{\alpha}+\right.$$
$$\left.R^{-1}(\delta_j)\textstyle\sum_{i=1}^{m}\nu_i x_{ip}^{\beta}\right)-$$
$$\sigma_j^{+}(u,\nu)\Psi_j^{-1}(\gamma_j)\le 0,$$
$$j=1,\dots,n.$$

بنابراین فرم قطعی مدل (۹) با ماهیت ورودی در حضور توزیع چوله– نرمال به صورت مدل (۱۲) می‌باشد:

$$max\;\;\varphi$$
$$s.t.$$

$$\varphi - \sum_{r=1}^{s} u_r \eta_{rp} - R^{-1}(\delta) \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}^{\beta} \leq \tau_p^{O}(u)\, \Psi_p^{-1}(1-\gamma)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i\, \mu_{ip} + R^{-1}(\delta') \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ip}^{\beta} + \sigma_p^{I}(\nu)\, \Psi_p^{-1'}(1-\gamma') \geq \sum_{i=1}^{m} \nu_i\, \mu_{ip} + L^{-1}(\delta') \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ip}^{\alpha} + \sigma_p^{I}(\nu)\, \Psi_p^{-1'}(1-\gamma') \leq 1 \qquad (۱۲)$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r \eta_{rp} - \sum_{i=1}^{m} \nu_i\, \mu_{ip} - \left(L^{-1}(\delta_j) \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{\alpha} + R^{-1}(\delta_j) \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ip}^{\beta}\right) - \sigma_j^{+}(u,\nu) \Psi_j^{-1}(\gamma_j) \leq 0,$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

$$(\tau_p^{O}(u))^2 = \sum_{r=1}^{s} u_r^2 \tau_{rp}^2$$

$$(\sigma_p^{I}(\nu))^2 = a' \boldsymbol{\Sigma}_p\, a = \sum_{i=1}^{m} \nu_i^2 \sigma_{ip}^2$$

$$(\sigma_j^{+}(u,\nu))^2 = a' \boldsymbol{\Sigma}_j\, a = \sum_{r=1}^{s} u_r^2 \tau_{rj}^2 + \sum_{i=1}^{m} \nu_i^2 \sigma_{ip}^2$$

$$u_r, \nu_i, \tau_p^{O}(u), \sigma_p^{I}(\nu), \sigma_j^{+}(u,\nu) \geq 0,$$

$$r = 1, \ldots, s, \quad i = 1, \ldots, m.$$

و مقادیر چندکی $\Psi_p^{-1}(1-\gamma)$ ، $\Psi_p^{-1'}(1-\gamma')$ و $\Psi_j^{-1}(\gamma_j)$ از انتگرال‌های زیر قابل محاسبه است:

$$\int_{-\infty}^{\Psi_p^{-1}(1-\gamma)} f_{Q_p}(q_p)\; dq_p = 1-\gamma$$

$$\int_{-\infty}^{\Psi_p^{-1'}(1-\gamma')} f_{W_p}(w_p)\; dw_p = 1-\gamma'$$

$$\int_{-\infty}^{\Psi_j^{-1}(\gamma_j)} f_{\mathrm{W}_j}(\mathrm{w}_j)\; d\mathrm{w}_j = \gamma_j$$

تعریف ۹: یِک واحد تصمیم‌گیرنده در سطح احتمال γ و سطح امکان δ کارا است اگر تابع هدف مدل (۱۲) بزرگتر یا مساویِ یِک باشد، در غیرِ اینِ صورت ناکارایِ سطح احتمال γ و سطح امکان δ گفته مِی‌شود.

۴- مثال عددیِ

در اینِ مثال ده DMU در اختیِار داریِم که دارایِ سه ورودیِ تصادفیِ فازیِ مثلثیِ و دو خروجیِ تصادفیِ فازیِ مثلثیِ مِی‌باشد که در جدول (۱) نشان داده شده است.

در جدول (۲) مقادیِر کارایِیِ واحدهایِ تصمیِم‌گیِرنده بر اساس مدل تصادفیِ فازیِ احتمالیِ- امکان $(\gamma = 0.95\,, \delta = 0.6)$، $(\gamma = 0.95\,, \delta = 0.3)$ و $(\gamma = 0.75\,, \delta = 0.6)$ برآورد شده است. همان طور که مشاهده مِی‌شود، واحد ۲ در سطح امکان δ و سطح خطایِ γ کارا است، اما واحدهایِ ۵ و ۷ تنها در بعضیِ از موارد کارا مِی‌باشند.

جدول ۱. ورودیِ و خروجیِ‌ها

$input1$	$input2$	$output1$	$output2$
$(SN(1789,85481,1), 27.8,27.8)$	$(SN(9.11,0.0004,1.2)2.8,2.8)$	$(SN(149.85,485.32,0.5), 0.9,0.9)$	$(SN(49.6,48.02,1.9823), 6.14,6.14)$
$(SN(4304,60090,7)17.6,17.6)$	$(SN(10.59,0.5329,0.9)7.23,7.23)$	$(SN(50.77,80.1,1.23)3.97,3.97)$	$(SN(73.13,13.1,2.1129), 4.23,4.23)$
$(SN(1729,25569,23)230,230)$	$(SN(6.71,0.8649,2.01)6.1,6.1)$	$(SN(259.91,2959.36,0.38)24.3,24.3)$	$(SN(108.04,225.6,1.9656), 5.07,5.07)$
$(S(17435,12236,12)101,101)$	$(SN(11.91,0.3025,1)8.1,8.1)$	$(SN(137.51,216.68,1.2)3.01,3.01)$	$(SN(44.97,13.76,2.0087), 1.891,1.891)$
$(SN(1039,2181,43), 112,112)$	$(SN(7.02,0.0225,0.3)0.24,0.24)$	$(SN(95.9,25.2,.32),4.43,4.43)$	$(SN(31.63,38.94,2.0201), 2.42,2.42)$
$(SN(1667,1086,0.4)33.7,33.7)$	$(SN(18.99,0.8836,1)0,0)$	$(SN(112.97,35.64.2.7)0.06,0.06)$	$(SN(71.98,70.06,2), 4.43,4.43)$
$(SN(462,69689,2.6)54,54)$	$(SN(11.16,0.0081,076)2.07,2.07)$	$(SN(192.97,1456.18,5.2)1.78,1.78)$	$(SN(78.05,195.72,1.9278), 5.33,5.33)$

جدول ۲. مدل تصادفیِ فازیِ احتمالیِ- امکان

	probability-possibility		
DMUS	$\gamma = 0.95\,, \delta = 0.6$	$\gamma = 0.95\,, \delta = 0.3$	$\gamma = 0.75\,, \delta = 0.6$
1	0.3011	0.4123	0.2348
2	1.0998	1.0992	1.0961
3	0.6610	0.6542	0.5937
4	0.0228	0.0412	0.0649
5	1.0654	1.0619	0.9831
6	0.0097	0.0001	0.0043
7	0.4682	1.0065	1.0059
8	0.3674	0.6438	0.7391
9	0.4651	0.3674	0.2765
10	0.0580	0.0321	0.0738

۵- بحث و نتیجه گیری

در نظریه کلاسیک DEA فرض بر آن است که داده‌ها به صورت قطعی هستند. پس از استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان یک ابزار توانمند در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری با برنامه‌های کاربردی چالش جدیدی به‌وجود آمد. داده‌های ورودی واقعی اغلب نامشخص، تصادفی و یا فازی می‌باشد و خروجی‌های آن نیز به همین صورت است. در یک مسئله‌ی واقعی ممکن است با دو حالت تصادفی و فازی به صورت هم زمان مواجه شویم. در کارهای قبلی فرض بر آن بود که داده‌های تصادفی فازی از توزیع نرمال پیروی کنند، چنانچه برازش این توزیع برای داده‌ها نامناسب باشد منجر به نتایج غلط می‌شود. ما در این مقاله، فرض کردیم که متغیرهای وروری و خروجی تصادفی فازی هستند و از توزیع چوله- نرمال پیروی می‌کنند. مدل احتمالی- امکان را با این شرایط برازش دادیم که استفاده از توزیع چوله- نرمال در حالت تصادفی فازی به جای روش قبلی بهتر و کلی‌تر می‌باشد. صحت این فرضیه را نیز در یک مثال عددی بیان کرده‌ایم.

فهرست منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research, 2(6), 429- 444.

[2] Wu, D., Yang Z.& Liang, L. (2006). Efficiency analysis of cross-region bank branches using fuzzy data envelopment analysis, Applied Mathematics and Computation, 181(1), 271-281.

[3] Zhu, J., (2003), Imprecise Data Envelopment Analysis (IDEA): A Review and Improvement with an Application, European Journal of Operation Research, 144, 513-529.

[4] Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A., & Tavana, M. (2011a). A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: two decades in the making, European Journal of operational Research, 214, 457-472.

[5] Tavana, M., Khanjani shiraz, R., Hatami-Marbini, A., Agrell, P.J., & Paryab, K.(2012). Fuzzy stochastic data envelopment analysis with application to base realignment and closure(BRAC), Expert Systems with Applications, 39, 12247-12259.

[6] Azzalini, A. (1985). A Class of Distribution Which Includes the Normal Ones. Scandinavia Journal of statistic, 12, 171-178.

[7] Nazari,A., Behzadi, M.h.(2015) "Asymptomatic Distribution of the sum of Skew-Normal random variable : Application of Data Envelopment Analysis". Journal of Science and Technology Transaction A, DOI 10.1007/s40995-017-0212-2.

[8] Nazari,A., Behzadi, M.h.(2015) "Stochastic DEA with using of Skew-Normal Distribution in Error Structure ". Journal of New Researches in Mathematics, 1(1), 67-77.

[9] Dubois , D. & Prade, H. (1978). operations on fuzzy numbers, International Journal of Systems Science, 9(6),. 291-297.

[10] Kaufmann , A. & Guota, H.H. (1996). Multimedia Group Communications Towards New Services, in Distributed Systems Eng., 3(3), 197-210.

[11] Klir, G.J. & Yuan, B. (1995). Fuzzy sets and Fuzzy logic: Theory and application, New York: prentice-Hall.

[12] Zimmermann, H.J. (2001). Fuzzy sets theory and its applications(forth ed), Dordrecht the netherlands: Kluwer Academic publishers.

[13] liu, Y.K. & liu, B. (2003). Fuzzy random variables: A scalar expected value operator, Fuzzy Optimization and Decision Making, 2(2), 143-160.

[14] Liu, X. & liu, B. (2006). A sufficient and necessary condition for credibility measures, International Journal of uncertainty, Fuzziness and knowledge-based systems, 14(5), 527-535.

[15] Sakawa, M. (1993). Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization, New York: Plenum Press.

[16] Azzalini, A. & Capitano, A. (1999). Statistical Application of the Multivariate Skew Normal Distribution. Journal of Royal Statistical Society, series B, 61, 579-602.

[17] Kwakernaak, H. (1978). Fuzzy random variables.part I: Definitions and Theorems, Information sciences, 15(1), 1-29.