دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره هفتم، پاییز ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای محاسبه نقطه ضدایده‌آل

جواد وکیلی [*۱]**، حلیمه دهقانی** [۲]

[۱] استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
[۲] دانش آموخته کارشناسی ارشد، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۶/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۰۸/۲۸

چکیده

محاسبه مقادیر دقیق معیار ایده‌آل و ضدایده‌آل موضوع مهمی در مسائل برنامه‌ریزی خطی چندمعیاره (MOLP) است. در واقع این مقادیر به‌عنوان کران‌های پایین و بالا روی مجموعه نقاط نامغلوب تعریف می‌شوند. هرچند تعیین نقطه ایده‌آل یک کار آسانی است، چون آن معادل با بهینه‌سازی یک تابع محدب (تابع خطی) روی یک مجموعه محدب است که یک مساله بهینه‌سازی محدب است، اما محاسبه نقطه ضدایده‌آل در MOLP با یک مساله بهینه‌سازی نامحدب معادل می‌باشد که حل آن در حالت کلی کار خیلی سختی است. در این مقاله یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای به‌دست آوردن نقطه ضدایده‌آل در مسائل MOLP ارائه می‌شود که در حالت کلی می‌تواند برای بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نقاط نامغلوب نیز به‌کار رود. در نهایت، به‌عنوان یک روش حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی، یک مساله برنامه‌ریزی خطی مختلط- صحیح ارائه می‌شود که مقادیر دقیق ضدایده‌آل را در یک مرحله به‌دست می‌آورد.

واژه‌های کلیدی: مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، برنامه‌ریزی خطی دوسطحی، نقطه ضدایده‌آل.

---

*. عهده‌دار مکاتبات
Corresponding author, Email: j.vakili@tabrizu.ac.ir

۱. مقدمه

برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) یکی از مهم‌ترین و مشهورترین مسائل مورد استفاده در تصمیم‌گیری چندمعیاره است که با مساله مینیمم سازی یا ماکزیمم سازی چندین تابع خطی با حضور قیدهای مساوی و/ یا نامساوی خطی سروکار دارد. مطالعات و کاربردهای بسیاری مرتبط با این نوع مسائل وجود دارند (برای نمونه مراجع [۱،۴،۹،۱۰،۱۴،۱۸،۲۱،۲۶،۲۸] را ببینید).

جواب کارآی یک مساله MOLP جوابی است که در این جواب‌ها نمی‌توان مقدار یک تابع هدف را بدون بدترکردن بقیه بهبود بخشید و نقاط نامغلوب نیز به‌عنوان تصویر مجموعه جواب‌های کارآ در فضای معیار تحت نگاشت تابع معیار تعریف می‌شود.

مولفه‌های نقاط ایده‌آل و ضدایده‌آل به‌عنوان کران‌های پایین و بالای نقاط نامغلوب تعریف می‌شوند و دامنه مقادیری را تعیین می‌کنند که نقاط نامغلوب می‌توانند به‌دست آورند. در واقع آنها برای نمایش تصویری نقاط نامغلوب و شرح نسبی موقعیت آنها در ناحیه شدنی مناسب هستند. همچنین از آنها می‌توان به‌عنوان نقاط مرجع در برنامه‌ریزی سازش یا در روش‌های محاوره‌ای استفاده کرد که هدف آنها پیدا کردن مرجح‌ترین جواب برای تصمیم‌گیرنده است. بنابراین، همان‌طور که ارگت و تنفلد- پودهل [۱۲] نشان دادند، در حالت کلی بهینه سازی یک تابع خطی روی مجموعه کارآ و مخصوصا به‌دست آوردن مقادیر دقیق ایده‌آل و ضدایده‌آل می‌تواند موضوع مهمی درMOLP باشد. به‌دست آوردن مقادیر نقطه ایده‌آل کار آسانی است، چون آن معادل با بهینه سازی تعدادی مسائل برنامه‌ریزی محدب است که معمولاً جواب‌های بهینه آنها به‌راحتی به‌دست می‌آیند. با این حال به‌دست آوردن مقادیر ضدایده‌آل در حالت کلی کار خیلی مشکلی است (در واقع این مقادیر تنها در مسائل دوهدفه به‌راحتی به‌دست می‌آیند) زیرا مجموعه نقاط کارآ به‌طور صریح مشخص نیست و اغلب یک مجموعه نامحدب است. بنابراین عمل پیدا کردن نقطه ضدایده‌آل در گرو حل تعدادی مسائل برنامه‌ریزی نامحدب است و در واقع این کار در اکثر موارد به‌جای بهینه سراسری به بهینه موضعی منجر می‌شود (کورهونن و همکاران [۱۷]).

روش‌های بسیاری برای تعیین نقطه ضدایده‌آل در MOLP وجود دارد (به‌عنوان مثال مراجع [۳،۲۰،۸،۶] را ببینید). یکی از آنها روش ریوز و رید [۲۲] است که برای به‌دست آوردن این نقطه از مقادیر جدول دادوستد استفاده می‌کند. اما به‌دلیل وجود مشکلات محاسبه مقادیر دقیق ضدایده‌آل، مقادیر به‌دست آمده از جدول دادوستد، اغلب تخمینی از مقادیر ضدایده‌آل هستند و در واقع این مقادیر ممکن است نامفهوم باشند و مقادیر ضدایده‌آل را زیاد یا کم برآورد کنند [۱۱].

همچنین به‌عنوان یک روش دیگر، می‌توان به مقاله ایزرمن و استور [۱۵] اشاره کرد که ایشان سه روش را برای محاسبه مقادیر دقیق ضدایده‌آل یک مساله MOLP ارائه کردند. روش اول از کدنویسی یک مساله ماکزیمم- بردار برای محاسبه همه نقاط کارآی راسی استفاده می‌کند که محاسبات سختی دارد. روش دوم یک مساله برنامه‌ریزی شدنی دوگان- اولیه بزرگ را با قیدهای غیرخطی حل می‌کند. روش سوم یک روند مبتنی بر روش سیمپلکس است که از این موضوع که همه نقاط کارآی راسی توسط مسیرهای یال‌های کارآ به‌هم وصل هستند، بهره گرفته است. با توجه به‌نظر محققان نتیجه گرفته می‌شود که روش سوم علی‌رغم به‌صرفه نبودن از نظر اقتصادی، تنها روش کارا از نظر عملی می‌باشد.

پیدا کردن مقادیر معیار ضدایده‌آل یک حالت خاصی از مسائل بهینه‌سازی یک تابع روی مجموعه جواب‌های کارآ می‌باشد. روش‌هایی وجود دارند که یک تابع را روی مجموعه کارآ بهینه می‌کنند که این روش‌ها برای تعیین نقاط ضدایده‌آل نیز قابل استفاده می‌باشند (برای نمونه مراجع [۲،۲۷،۱۶،۱۳،۴] را مشاهده فرمایید). اگرچه این روش‌ها نیز فقط از نظر علمی (ارگت و تنفلد- پودهل [۱۲]) برای محاسبه مقادیر ضدایده‌آل مناسب هستند و معمولاً آنها نیز ساختار پیچیده‌ای دارند (کورهونن و همکاران [۱۷]). بنابراین اکثر روش‌های بالا که برای به‌دست آوردن نقاط ضدایده‌آل در نظر گرفته می‌شوند، اغلب دو مشکل اسایی دارند. ۱) آنها معمولاً مقادیر ضدایده‌آل را تخمین می‌زنند و می‌توانند مقدار دقیق آنها را به‌دست آورند. ۲) اغلب روش‌ها محاسبات سختی دارند.

در این مقاله، در حالت کلی یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نامغلوب ارائه می‌شود که در حالت خاص مقادیر دقیق ضدایده‌آل را نیز در یک مرحله می‌تواند به‌دست آورد. این روش از چند نظر حایز اهمیت هست. ۱) این روش مشکل اشاره شده اول بالا را ندارد و مقادیر ضدایده‌آل را به‌صورت دقیق به‌دست می‌آورد. ۲) ارتباطی بین مباحث برنامه‌ریزی خطی چندهدفه و برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برقرار می‌کند. ۳) ممکن است بتوان از بعضی روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای حل مساله استفاده کرد که در زمان کمتری منجر به جواب می‌شود. ۴) این روش در حالت کلی می‌تواند برای بهینه‌سازی یک تابع هدف کلی روی مجموعه نقاط نیز به‌کار برده شود. ۵) مساله برنامه‌ریزی دو سطحی ارائه شده در این مقاله با اندکی تغییر می‌تواند نقطه ضدایده‌آل را برای هر نوع تابع هدف و قیود نیز به‌دست آورد. معمولاً حل این مسائل در حالت خطی‌پذیری تابع هدف و قیود ساده است که به‌عنوان مثال، در آخر این مقاله به‌عنوان یکی از روش‌های حل مسایل بهینه‌سازی خطی دو سطحی در جهت خطی‌سازی، یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح- مختلط ارائه می‌شود که مقادیر دقیق ضدایده‌آل را در یک مرحله به‌دست می‌آورد.

این مقاله به‌صورت زیر سازماندهی شده است:

بخش ۲ شامل بعضی مفاهیم مورد استفاده در این مقاله در مورد MOLP و برنامه‌ریزی خطی دوسطحی است. بخش ۳ شامل بحث اصلی و نتایج مقاله است و در آخر این بخش برای واضح‌تر شدن بحث مثالی ارایه خواهد شد. بخش ۴ هم که شامل نتیجه‌گیری این مطالب است.

۲. مفاهیم اولیه

در این بخش، ابتدا مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی معرفی می‌شود و سپس بعضی تعاریف و قضایای پایه‌ای مورد استفاده در این مقاله بازنویسی می‌شوند.

۲-۱- مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی

در این زیربخش مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی بحث می‌شود. این نوع از مسائل بهینه‌سازی به‌صورت سلسله مراتبی هستند در جهتی‌که قسمتی از قیدهای آن توسط یک مساله برنامه‌ریزی خطی دیگر تعریف می‌شوند. به‌عبارت دیگر، مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی به‌صورت مسایل بهینه‌سازی ریاضی هستند که مجموعه همه متغیرها بین دو بردار $\mathbf{y}$ و $\mathbf{x}$ افراز می‌شوند و $\mathbf{y}$ یک جواب بهینه انتخابی از مساله بهینه‌سازی دوم برای پارامتر $\mathbf{x}$ می‌باشد. در حالت کلی یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی می‌تواند به‌صورت زیر تعریف شود.

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \mathbf{c}^t\mathbf{x}+\mathbf{d}^t\mathbf{y} \\ &\text{s.t. } \mathbf{A}_1\mathbf{x}+\mathbf{B}_1\mathbf{y}\le \mathbf{b}_1 \\ &\qquad \max_{\mathbf{y}} \mathbf{e}^t\mathbf{y} \\ &\qquad \text{s.t. } \mathbf{A}_2\mathbf{x}+\mathbf{B}_2\mathbf{y}\le \mathbf{b}_2, \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $\mathbf{c},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n_1}$، $\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{n_2}$، $\mathbf{A}_1$ یک ماتریس $m_1\times n_1$، $\mathbf{B}_1$ یک ماتریس $m_1\times n_2$، $\mathbf{A}_2$ یک ماتریس $m_2\times n_1$ و $\mathbf{B}_2$ یک ماتریس $m_2\times n_2$ هستند.

در مساله (۱)، مساله

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \mathbf{c}^t\mathbf{x}+\mathbf{d}^t\mathbf{y} \\ &\text{s.t. } \mathbf{A}_1\mathbf{x}+\mathbf{B}_1\mathbf{y}\le \mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

مساله سطح بالایی یا مساله رهبر نامیده می‌شود و مساله بهینه‌سازی دوم

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{y}} \mathbf{e}^t\mathbf{y} \\ &\text{s.t. } \mathbf{A}_2\mathbf{x}+\mathbf{B}_2\mathbf{y}\le \mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

به‌عنوان مساله سطح پایینی یا مساله پیرو در نظر گرفته می‌شود. حال تعریف زیر را برای جواب‌های شدنی یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی بیان می‌کنیم که در بخش‌های بعدی موردنیاز خواهید شد.

تعریف ۱. $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ یک جواب شدنی برای مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی (۱) است هرگاه اگر $\mathbf{y}$ یک جواب بهینه برای مساله سطح پایینی متناظر با پارامتر $\mathbf{x}$ باشد به‌طوری‌که

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}+\mathbf{B}_1\mathbf{y}\le \mathbf{b}_1.$$

همچنین باید ذکر شود که الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی وجود دارد، برای

نمونه: الگوریتم‌های شمارشی (جستجو در رئوس مجموعه شدنی، جستجوی نامساوی‌های فعال)، الگوریتم کاهشی، روش‌های تابع جریمه و بهینه‌سازی سراسری ([۲۵،۲۴،۲۳،۱۹،۷،۵]).

۲-۲- مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP)

مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) در حالت کلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\min\ \mathbf{c}_1^t\mathbf{x}\\
&\min\ \mathbf{c}_2^t\mathbf{x}\\
&\ \vdots\\
&\min\ \mathbf{c}_p^t\mathbf{x}\\
&\text{s.t. } \mathbf{Ax}\le\mathbf{b}\\
&\qquad \mathbf{x}\ge\mathbf{0},
\end{aligned} \tag{۲}$$

که $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\dots,\mathbf{c}_p\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$، $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ و $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ (توجه کنید که در این مقاله همه بردارها به‌صورت بردار ستونی فرض می‌شوند و با حروف کوچک انگلیسی و به‌صورت پررنگ نوشته می‌شوند).

با فرض اینکه $\mathbf{X}=\{\mathbf{x}|\mathbf{Ax}\le\mathbf{b},\mathbf{x}\ge\mathbf{0}\}$ ناحیه شدنی (مجموعه شدنی) مساله MOLP (۲) در فضای تصمیم باشد، $\mathbf{Y}=\{\mathbf{Cx}|\mathbf{x}\in\mathbf{X}\}$ به‌عنوان مجموعه شدنی مساله MOLP (۲) در فضای معیار در نظرگرفته می‌شود که تصویر مجموعه شدنی $\mathbf{x}$ تحت نگاشت تابع هدف در فضای معیار است و $\mathbf{C}$ یک ماتریس $p\times n$ است که سطر iام آن بردار سطری $\mathbf{c}_i^t$ است. جواب‌های کارآ و کارآی ضعیف و نقاط نامغلوب و نقاط نامغلوب ضعیف برای مساله (۲) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲. $\bar{\mathbf{x}}\in\mathbf{X}$ یک جواب کارآی مساله MOLP (۲) نامیده می‌شود هرگاه اگر هیچ $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ای وجود نداشته باشد به‌طوری‌که

$$\mathbf{Cx}\le\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}},\ \mathbf{Cx}\ne\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}.$$

اگر $\bar{\mathbf{x}}$ یک جواب کارا باشد، آنگاه $\bar{\mathbf{y}}=\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}$ یک نقطه نامغلوب نامیده می‌شود. مجموعه همه جواب‌های کارآی مساله (۲) مجموعه کارآ نامیده می‌شود و با $\mathbf{X}_E$ نمایش داده می‌شود و تصویر آن در فضای معیار مجموعه نامغلوب نامیده می‌شود و با $\mathbf{Y}_N$ نمایش داده می‌شود. به‌عبارت دیگر،

$$\mathbf{X}_E=\{\bar{\mathbf{x}}\in\mathbf{X}\mid\nexists\mathbf{x}\in\mathbf{X};\mathbf{Cx}\le\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}},\mathbf{Cx}\ne\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}\}$$

و

$$\mathbf{Y}_N=\{\mathbf{Cx}\mid\mathbf{x}\in\mathbf{X}_E\}.$$

حال جواب‌های کارآ و نامغلوب ضعیف به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۳. $\bar{\mathbf{x}}\in\mathbf{X}$ یک جواب کارآی مساله (۲) نامیده می‌شود هرگاه اگر هیچ $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ای وجود نداشته باشد به‌طوری‌که

$$\mathbf{Cx}<\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}$$

اگر $\bar{\mathbf{x}}$ یک جواب کارای ضعیف باشد، آنگاه $\bar{\mathbf{y}}=\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}$ یک نقطه نامغلوب ضعیف نامیده می‌شود. مجموعه همه جواب‌های کارای ضعیف مساله (۲) مجموعه کارای ضعیف نامیده می‌شود و با $\mathbf{X}_{WE}$ نمایش داده می‌شود و تصویر آن در فضای معیار مجموعه نامغلوب ضعیف نامیده می‌شود و با $\mathbf{Y}_{WN}$ نمایش داده می‌شود. به‌عبارت دیگر،

$$\mathbf{X}_{WE}=\{\bar{\mathbf{x}}\in\mathbf{X}\mid\nexists\mathbf{x}\in\mathbf{X};\mathbf{Cx}<\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}\}$$

و

$$\mathbf{Y}_{WN}=\{\mathbf{Cx}\mid\mathbf{x}\in\mathbf{X}_{WE}\}.$$

با در نظر گرفتن تعاریف بالا واضح است که $\mathbf{X}_E\subseteq\mathbf{X}_{WE}$ و $\mathbf{Y}_N\subseteq\mathbf{Y}_{WN}$. با توجه به تعاریف ۲ و ۳، قضیه‌های زیر بدیهی هستند و بنابراین آنها را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

در واقع دو قضیه زیر مشخصاتی را برای نقاط نامغلوب و نقاط نامغلوب ضعیف ارایه می‌دهند و در بخش بعدی برای ارائه مسائل دوسطحی برای بهینه‌سازی یک تابع روی نقاط کارا (نامغلوب) موردنیاز خواهند بود.

قضیه ۱. نقطه $\bar{\mathbf{y}}\in\mathbf{Y}$ یک نقطه نامغلوب است اگر و تنها اگر مقدار بهینه مساله (۳) صفر باشد.

$$\begin{aligned}
&\max\ \mathbf{1}_p^t\mathbf{s}\\
&\text{s.t. } \bar{\mathbf{y}}-\mathbf{s}\in\mathbf{Y}\\
&\qquad \mathbf{s}\ge\mathbf{0},
\end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن $\mathbf{1}_p \in \mathbb{R}^p$ یک بردار ستونی با همه مولفه‌های مساوی ۱ است و $\mathbf{s}$ بردار ستونی $\mathbf{s}=\begin{pmatrix} s1 \\ s2 \\ \vdots \\ sp \end{pmatrix}$ می‌باشد.

برهان. با در نظر گرفتن تعاریف نقاط نامغلوب اثبات بدیهی است.

برای نقاط نامغلوب ضعیف، قضیه مشابه زیر را داریم.

قضیه۲. نقطه $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{Y}$ یک نقطه نامغلوب ضعیف است اگر و تنها اگر مقدار بهینه مساله (۴) صفر باشد.

$$\begin{aligned} &\max \ \ s \\ &\text{s.t.} \ \ \bar{\mathbf{y}} - s1_p \in \mathbf{Y} \qquad (۴) \\ &\qquad s \geq 0, \end{aligned}$$

که در آن s یک اسکالر می‌باشد.

برهان. مشابه با قضیه قبل اثبات این نیز بدیهی می‌باشد.

در بخش بعدی نتایج اصلی مقاله را ارائه خواهیم کرد، به‌عبارت دیگر مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی به‌منظور بهینه‌سازی یک تابع خطی کلی روی مجموعه نامغلوب (ضعیف) پیشنهاد داده خواهد شد و بنابراین با استفاده از این مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی، در حالت خاص، نقاط ضدایده‌آل نیز به‌راحتی می‌توانند به‌دست آیند.

حال، نقاط ایده‌آل و ضدایده‌آل را به‌عنوان کران‌های پایین و بالا روی نقاط نامغلوب به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف۴.

۱. نقطه $\mathbf{y}^{\mathrm{I}}=(y_1^{\mathrm{I}}, y_2^{\mathrm{I}}, \ldots, y_p^{\mathrm{I}})$ که در آن

$$\begin{aligned} &y_k^{\mathrm{I}} = \min \ y_k \\ &\quad \text{s.t.} \ \ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

برای $k=1,2,\ldots,p$، نقطه ایده‌آل مساله MOLP (۲) نامیده می‌شود (توجه کنید که y_k مولفه kام $\mathbf{y}$ می‌باشد.

۲. نقطه $\mathbf{y}^{N}=(y_1^{\mathrm{N}}, y_2^{\mathrm{N}}, \ldots, y_p^{\mathrm{N}})$ که در آن

$$\begin{aligned} &y_k^{\mathrm{N}} = \max \ y_k \\ &\quad \text{s.t.} \ \ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

برای $k=1,2,\ldots,p$، نقطه ضدایده‌آل مساله MOLP (۲) نامیده می‌شود.

همان‌طور که به‌راحتی می‌توان نشان داد، برای به‌دست آوردن مولفه kام نقطه ایده‌آل، می‌توان مساله برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} &y_k^{\mathrm{I}} = \min \ y_k \\ &\quad \text{s.t.} \ \ y \in \mathbf{Y} \end{aligned}$$

را حل کرد که یک مساله برنامه‌ریزی خطی است. ولی این بحث برای نقطه ضدایده‌ال درست نیست. یعنی، درست نیست که

$$\begin{aligned} &y_k^{\mathrm{N}} = \max \ y_k \\ &\quad \text{s.t.} \ \ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

واضح است که

$$y_k^{\mathrm{I}} \leq y_k \leq y_k^{\mathrm{N}}, k=1,2,\ldots,p$$

برای هر $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_{\mathrm{N}}$.

چون نقطه ایده‌آل از حل p مساله بهینه‌سازی خطی به‌دست می‌آید، لذا محاسبات آن آسان می‌باشد. با این‌حال، چون برای محاسبه $\mathbf{y}^{\mathrm{N}}$ با ماکزیمم‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه کارآ سر و کار داریم که به‌طور صریح مشخص نیست و معمولا یک مجموعه نامحدب می‌باشد، لذا محاسبه نقطه ضدایده‌آل یک مساله سختی است و معمولاً هیچ روش کارآیی برای تعیین $\mathbf{y}^{\mathrm{N}}$ در MOLP شناخته شده نیست و به‌دلیل وجود مشکلات ناشی از محاسبه $\mathbf{y}^{\mathrm{N}}$، اغلب روش‌های ابتکاری مورد استفاده قرار می‌گیرد یا روش‌های موجود معمولاً به‌صورت دقیق این نقطه را نمی‌توانند به‌دست بیاورند و فقط تقریبی از آن را ارائه می‌دهند. در ادامه سعی می‌کنیم یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی را برای محاسبه مولفه‌های نقطه ضدایده‌آل ارائه کنیم. بنابراین، هرچند همه روش‌های حل این نوع مسائل می‌تواند در به‌دست آوردن نقطه ضدایده‌آل مورد استفاده قرار گیرند، ولی به‌عنوان یکی از روش‌های حل این مسائل، تبدیل آن به یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح- مختلط، در جهت

خطی‌پذیری قیود و تابع هدف می‌باشد که در انتها به آن اشاره می‌شود.

۳. مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای محاسبه نقطه ضدایده‌آل

بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نامغلوب یک موضوع خیلی مهمی در MOLP می‌باشد که معمولاً کار ساده‌ای نیست، چون آن معادل با یک یا چند مساله بهینه‌سازی غیرمحدب است. در این بخش، ابتدا در حالت کلی در مورد بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نامغلوب یک مساله MOLP بحث می‌شود و سپس این بحث در حالت خاص برای پیدا کردن نقاط نامغلوب مطرح می‌شود. در واقع به‌منظور انجام این، ابتدا یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی ارائه می‌شود که هرچند همه الگوریتم‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی در حالت کلی می‌توانند برای حل مسائل بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نامغلوب مورد استفاده قرار گیرند، با این‌حال در ادامه، به‌عنوان یک روش حل، چگونگی تبدیل این مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی به یک مدل برنامه‌ریزی خطی صحیح-مختلط برای تعیین نقطه ضدایده‌آل بررسی می‌شود.

برای این منظور مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید که هدف از حل آن بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نامغلوب می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{c}^{t}\mathbf{y} \\ &\text{s.t. } \mathbf{y}\in\mathbf{Y}_{\mathrm{N}} \end{aligned} \tag{۵}$$

همان‌طور که در قضیه۱ بیان شد، برای چک کردن $\mathbf{y}\in\mathbf{Y}_{\mathrm{N}}$، می‌توانیم مدل (۳) را به‌عنوان مساله سطح پایینی به‌جای قید $\mathbf{y}\in\mathbf{Y}_{\mathrm{N}}$ در مساله (۵) درج کنیم و یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی به‌وجود آوریم. البته شایان ذکر است برای اینکه مساله سطح پایینی تنها نقاط کارا را برای مساله سطح بالایی برگرداند، باید شرایطی اعمال شود که به‌ازای نقاطی که از مساله سطح بالایی برای چک کردن کارایی به مساله سطح پایینی داده می‌شود مقدار $\mathbf{s}=0$ لحاظ شود، که بدین منظور یک جریمه خیلی بزرگ در تابع هدف سطح بالایی در نظر گرفته می‌شود. برای این منظور قضیه زیر را در نظر بگیرید.

قضیه۳. فرض کنید M یک عدد حقیقی مثبت خیلی بزرگ باشد. در این‌صورت مقدار بهینه مساله (۵) با مقدار بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی زیر برابر است.

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{y},\mathbf{s}}\ \mathbf{c}^{t}\mathbf{y}-M\mathbf{1}_{p}^{t}\mathbf{s} \\ &\text{s.t.}\quad \mathbf{y}\in\mathbf{Y} \\ &\qquad \max_{\mathbf{s}}\quad \mathbf{1}_{p}^{t}\mathbf{s} \\ &\qquad \text{s.t.}\quad \mathbf{y}-\mathbf{s}\in\mathbf{Y} \\ &\qquad\qquad \mathbf{s}\geq\mathbf{0} \end{aligned} \tag{۶}$$

توجه کنید که در مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی (۶)، مجموعه همه متغیرها بین بردارهای $\mathbf{s}$ و $\mathbf{y}$ افراز شده‌اند به طوری‌که $\mathbf{s}$ به عنوان جواب بهینه مساله بهینه‌سازی سطح پایینی پارامترسازی شده در $\mathbf{y}$ انتخاب می‌شود. به‌عبارت دیگر، $(\mathbf{y},\mathbf{s})$ یک جواب شدنی مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی (۶) است هرگاه اگر $\mathbf{s}$ جواب بهینه مساله سطح پایینی متناظر با پارامتر $\mathbf{y}\in\mathbf{Y}$ باشد.

اثبات: فرض کنید که

$$\begin{aligned} Z_{1}=&\max\ \ \mathbf{c}^{t}\mathbf{y} \\ &\text{s.t.}\quad \mathbf{y}\in\mathbf{Y}_{\mathrm{N}} \end{aligned} \tag{۷}$$

$$\begin{aligned} Z_{2}=&\max_{\mathbf{y},\mathbf{s}}\ \mathbf{c}^{t}\mathbf{y}-M\mathbf{1}_{p}^{t}\mathbf{s} \\ &\text{s.t.}\quad \mathbf{y}\in\mathbf{Y} \\ &\qquad \max_{\mathbf{s}}\quad \mathbf{1}_{p}^{t}\mathbf{s} \\ &\qquad \text{s.t.}\quad \mathbf{y}-\mathbf{s}\in\mathbf{Y} \\ &\qquad\qquad \mathbf{s}\geq\mathbf{0} \end{aligned} \tag{۸}$$

اولاً واضح است که اگر مساله (۷) نشدنی باشد، آنگاه مساله (۸) نیز نشدنی است و برعکس. همچنین به‌راحتی می‌توان نشان داد که اگر مساله (۷) مقدار بهینه نامتناهی داشته باشد، آنگاه مساله (۸) نیز مقدار بهینه نامتناهی دارد و بالعکس.

چون $\mathbf{Y}_N$ یک مجموعه بسته می‌باشد و تابع هدف مساله (۷) پیوسته است، لذا اگر این مساله جواب بهینه داشته باشد، آنگاه آن به $\mathbf{Y}_N$ متعلق است. فرض کنید که $\mathbf{y}^*$ یک جواب بهینه مساله (۷) باشد. به خاطر نامغلوب بودن نقطه $\mathbf{y}^*$، $\mathbf{y}^*\in\mathbf{Y}$ و مقدار بهینه مساله سطح پایینی مساله (۸) صفر است. لذا $(\mathbf{y}^*,\mathbf{0})$ یک جواب شدنی برای مساله (۸) است که مقدار هدف آن برابر است با

$$z_2(\mathbf{y}^*,\mathbf{0})=\mathbf{c}^t\mathbf{y}^*.$$

آنگاه،

$$z_1=z_2(\mathbf{y}^*,\mathbf{0})\le z_2.$$

حال کافی است ثابت کنیم که $z_2\le z_1$ به‌منظور اثبات این، ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $(\mathbf{y}^*,\mathbf{s}^*)$ یک جواب بهینه مساله (۸) باشد، آنگاه $\mathbf{s}^*=\mathbf{0}$. برای این منظور، فرض کنید که $(\mathbf{y}^*,\mathbf{s}^*)$ یک جواب بهینه مساله (۸) باشد، ولی $\mathbf{s}^*\neq\mathbf{0}$. واضح است که $\mathbf{y}^*\in\mathbf{Y}$ و $(\mathbf{y}^*+\mathbf{s}^*,\mathbf{0})$ یک جواب شدنی دیگر برای مساله (۸) است. از سوی دیگر، چون M یک عدد حقیقی مثبت خیلی بزرگ می‌باشد، آنگاه

$$z_2(\mathbf{y}^*+\mathbf{s}^*,\mathbf{0})>z_2(\mathbf{y}^*,\mathbf{s}^*),$$

که با بهینگی $(\mathbf{y}^*,\mathbf{s}^*)$ در تناقض است. حال برای کامل کردن اثبات، باید نشان داده شود $z_2\le z_1$. به‌منظور انجام این، فرض کنید که $(\mathbf{y}^*,\mathbf{0})$ یک جواب بهینه مساله (۸) باشد. چون مقدار بهینه متغیر $\mathbf{s}^*$ صفر است، لذا $\mathbf{y}^*$ یک نقطه نامغلوب است که متعلق به $\mathbf{Y}_N$ است. بنابراین، $\mathbf{y}^*$ یک نقطه شدنی مساله (۷) است، که نتیجه می‌دهد

$$z_2=\mathbf{c}^t\mathbf{y}^*=z_2(\mathbf{y}^*,\mathbf{0})=z_1(\mathbf{y}^*)\le z_1.$$

با توجه به اینکه قبلا نشان داده شد که $z_2\le z_1$، لذا هر دو مساله (۷) و (۸) مقدار بهینه یکسان دارند و بدین‌صورت اثبات کامل می‌شود.

حال اگر بحث بالا را برای نقاط نامغلوب ضعیف در نظر بگیریم، به‌عبارت دیگر اگر مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیریم،

$$\begin{aligned}&\max\ \mathbf{c}^t\mathbf{y}\\&\text{s.t. } \mathbf{y}\in\mathbf{Y}_{WN}\end{aligned}\tag{۹}$$

همان‌طور که در قضیه ۳ بیان شد، برای چک کردن $\mathbf{y}\in\mathbf{Y}_{WN}$، می‌توانیم مدل (۴) را به‌عنوان مساله سطح پایینی به‌جای قید $\mathbf{y}\in\mathbf{Y}_{WN}$ در مساله (۹) درج کنیم که مجدداً یک مساله برنامه‌ریزی خطی دو سطحی به‌وجود می‌آید. به‌عبارت دیگر، قضیه زیر را داریم.

قضیه۴. فرض کنید M یک عدد حقیقی مثبت خیلی بزرگ باشد. در این‌صورت مقدار بهینه مساله (۹) با مقدار بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی زیر برابر است.

$$\begin{aligned}&\max_{\mathbf{y},s}\ \mathbf{c}^t\mathbf{y}-M(\mathrm{s})\\&\text{s.t.}\quad \mathbf{y}\in\mathbf{Y}\\&\qquad \max_{\mathrm{s}}\ \mathrm{s}\\&\qquad \text{s.t.}\quad \mathbf{y}-1_p\mathrm{s}\in\mathbf{Y}\\&\qquad\qquad \mathrm{s}\ge 0\end{aligned}\tag{۱۰}$$

توجه کنید که در مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی (۱۰)، s یک اسکالر است.

با در نظر گرفتن قضیه ۳، در حالت کلی می‌توانیم مدل (۸)، که یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی است را برای بهینه کردن تابع $\mathbf{c}^t\mathbf{y}$ روی مجموعه نامغلوب مساله MOLP (۲) حل کنیم. حال اگر بخواهیم مقدار iامین مولفه نقطه ضدایده‌آل (y_i^N) را به‌دست آوریم، در مساله (۶)، $\mathbf{c}=\mathbf{e}_i$ را در نظر می‌گیریم که $\mathbf{e}_i$، iامین بردار مختصات (یک بردار که همه مولفه‌های آن صفر می‌باشد به‌جز مولفه iام که یک است) می‌باشد. بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} y_i^{\mathrm{N}} = \max_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{x}',\mathbf{s}}\ & y_i - M\mathbf{1}_p^{\mathrm{t}}\mathbf{s} \\ \text{s.t.}\ & \mathbf{Cx} = \mathbf{y} \\ & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \\ & \max_{\mathbf{x}',\mathbf{s}}\ \mathbf{1}_p^{\mathrm{t}}\mathbf{s} \\ & \text{s.t.}\ \mathbf{Cx}' = \mathbf{y} - \mathbf{s} \\ & \quad \mathbf{Ax}' \le \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x}' \ge \mathbf{0}, \mathbf{s} \ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{۱۱}$$

همان‌طور که قبلاً گفته شد مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی ارتباط نزدیکی با مسائل دیگر در برنامه‌ریزی ریاضی دارد. همانند: برنامه‌ریزی خطی چندمعیاره (چندهدفه)، برنامه ریزی صحیح- مختلط ۰-۱ و مساله تابع جریمه. بنابراین الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسائل برنامه‌ریزی دو سطحی وجود دارد، برای نمونه: الگوریتم شمارشی (جستجو با بردارهای مجموعه شدنی و جستجو برای فعال کردن نامساوی‌ها)، الگوریتم کاهشی، روش‌های تابع جریمه و بهینه‌سازی سراسری ([۱۹،۷،۵]). در این بخش به‌عنوان یکی از روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی، چگونگی تبدیل مساله (۱۱) به یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح- مختلط مورد بحث قرار می‌گیرد. بدین‌صورت که اگر متغیرهای $\mathbf{y}$ را برای مساله سطح پایین ثابت در نظر بگیریم و دوگان مساله سطح پایین را بنویسیم و همچنین شرایط KKT را برای هر دو مساله سطح پایینی و دوگان آن بنویسیم، در این‌صورت مساله برنامه‌ریزی خطی (۱۱) با مساله تک سطحی زیر در حضور قیدهای مکمل معادل است.

$$\begin{aligned} y_i^{\mathrm{N}} = \max_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{x}',\mathbf{s}}\ & y_i - M\,\mathbf{1}_p^{\mathrm{t}}\mathbf{s} \\ \text{s.t.}\ & \mathbf{Cx} = \mathbf{y} \\ & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \\ & \mathbf{Cx}' = \mathbf{y} - \mathbf{s} \\ & \mathbf{Ax}' \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{v}^{\mathrm{t}}\mathbf{C} + \mathbf{w}^{\mathrm{t}}\mathbf{A} \ge \mathbf{0} \\ & \mathbf{v}^{\mathrm{t}} \ge \mathbf{1}_p^{\mathrm{t}} \\ & (\mathbf{v}^{\mathrm{t}}\mathbf{C} + \mathbf{w}^{\mathrm{t}}\mathbf{A})\mathbf{x}' = 0 \\ & (\mathbf{v}^{\mathrm{t}} - \mathbf{1}_p^{\mathrm{t}})\mathbf{s} = 0 \\ & \mathbf{w}^{\mathrm{t}}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}') = 0 \\ & \mathbf{x}' \ge \mathbf{0}, \mathbf{s} \ge \mathbf{0}, \mathbf{w} \ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{۱۲}$$

چندین روش برای رفتار با شرایط مکمل زاید وجود دارد که یکی از آنها روش استفاده از متغیرهای ۰-۱ برای تبدیل آنها به شرایط خطی است که در زیر خلاصه خواهد شد.

فرض کنید $K>0$ یک عدد ثابت به اندازه کافی بزرگ باشد. بنابراین شرایط

$$\mathbf{v}^{\mathrm{t}}\mathbf{C} + \mathbf{w}^{\mathrm{t}}\mathbf{A} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{x}' \ge \mathbf{0},\ (\mathbf{v}^{\mathrm{t}}\mathbf{C} + \mathbf{w}^{\mathrm{t}}\mathbf{A})\mathbf{x}' = 0$$

و

$$\mathbf{v}^{\mathrm{t}} \ge \mathbf{1}_p^{\mathrm{t}},\ \mathbf{s} \ge \mathbf{0},\ (\mathbf{v}^{\mathrm{t}} - \mathbf{1}_p^{\mathrm{t}})\mathbf{s} = 0$$

و

$$\mathbf{w} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{Ax}' \le \mathbf{b},\ \mathbf{w}^{\mathrm{t}}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}') = 0$$

به‌ترتیب با

$$\mathbf{0} \le \mathbf{v}^{\mathrm{t}}\mathbf{C} + \mathbf{w}^{\mathrm{t}}\mathbf{A} \le K\mathbf{p},\ \mathbf{0} \le \mathbf{x}' \le K(\mathbf{1}_n - \mathbf{p}),$$
$$p_j \in \{0,1\},\ j = 1, 2, \dots, n$$

و

$$\mathbf{0} \le \mathbf{v}^{\mathrm{t}} - \mathbf{1}_p^{\mathrm{t}} \le K\mathbf{q},\ \mathbf{0} \le \mathbf{s} \le K(\mathbf{1}_p - \mathbf{q}),$$
$$q_i \in \{0,1\},\ i = 1, 2, \dots, p$$

و

$$\mathbf{0} \le \mathbf{w} \le K\mathbf{t},\ \mathbf{0} \le \mathbf{b} - \mathbf{Ax}' \le K(\mathbf{1}_m - \mathbf{t}),$$
$$t_i \in \{0,1\},\ i = 1, 2, \dots, m$$

معادل هستند. همچنین با در نظر گرفتن اثبات قضیه ۳، در بهینگی مساله (۱۲) $\mathbf{s}=\mathbf{0}$ می‌باشند. بنابراین با توجه به تغییرمتغیرهای بالا، مساله (۱۲) معادل با یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح- مختلط ۰-۱ است. در ادامه، به‌منظور واضح شدن بحث، مثالی را ارایه می‌دهیم.

مثال: مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه زیر را در نظر بگیرید (صفحه ۳۵ مرجع [۱۱] را ببینید).

$$\begin{aligned}
&\text{Min}\ \ -11x_2-11x_3-12x_4-9x_5-9x_6+9x_7\\
&\text{Min}\ \ -11x_1\quad -11x_3-9x_4-12x_5-9x_6+9x_7\\
&\text{Min}\ \ -11x_1-11x_2\quad -9x_4-9x_5-12x_6-12x_7 \qquad (۱۳)\\
&\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=1\\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}$$

با توجه به این مثال، همان‌طور که در صفحه ۳۵ مرجع [۱۱] نشان داده شده است، نقطه ضد ایده‌آل برای این مساله عبارت است از

$$\mathbf{y}^{N} = (0, 0, 0).$$

حال با در نظر گرفتن مباحث بالا، مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای به‌دست آوردن نقطه ضد ایده‌آل مساله (۱۳) به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\text{Max}\quad y_1-M(s_1+s_2+s_3)\\
&\text{s.t.}\ y_1= \quad -11x_2-11x_3-12x_4-9x_5-9x_6+9x_7\\
&\quad y_2= -11x_1 \quad -11x_3-9x_4-12x_5-9x_6+9x_7\\
&\quad y_3= -11x_1-11x_2 \quad -9x_4-9x_5-12x_6-12x_7\\
&\quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=1\\
&\quad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geq 0\\
&\qquad \text{Max}\ \ s_1+s_2+s_3\\
&\qquad \text{s.t.}\ \ y_1-s_1= \quad -11x_2'-11x_3'-12x_4'-9x_5'-9x_6'+9x_7'\\
&\qquad\quad y_2-s_2= -11x_1' \quad -11x_3'-9x_4'-12x_5'-9x_6'+9x_7'\\
&\qquad\quad y_3-s_3= -11x_1'-11x_2' \quad -9x_4'-9x_5'-12x_6'-12x_7'\\
&\qquad\qquad x_1'+x_2'+x_3'+x_4'+x_5'+x_6'+x_7'=1\\
&\qquad\qquad x_1',x_2',x_3',x_4',x_5',x_6',x_7' \geq 0
\end{aligned}$$

به‌عنوان یکی از روش‌های حل مساله برنامه‌ریزی خطی دو سطحی، آن می‌تواند به یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح- مختلط به‌صورت زیر تبدیل شود که در آن K یک عدد حقیقی بسیار بزرگ می‌باشد.

$$\begin{aligned}
&\text{Max}\quad y_1\\
&\text{s.t.}\ y_1= \quad -11x_2-11x_3-12x_4-9x_5-9x_6+9x_7\\
&\quad y_2= -11x_1 \quad -11x_3-9x_4-12x_5-9x_6+9x_7\\
&\quad y_3= -11x_1-11x_2 \quad -9x_4-9x_5-12x_6-12x_7\\
&\quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=1\\
&\quad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geq 0\\
&\quad y_1= \quad -11x_2'-11x_3'-12x_4'-9x_5'-9x_6'+9x_7'+s_1\\
&\quad y_2= -11x_1' \quad -11x_3'-9x_4'-12x_5'-9x_6'+9x_7'+s_2\\
&\quad y_3= -11x_1'-11x_2' \quad -9x_4'-9x_5'-12x_6'-12x_7'+s_3\\
&\qquad x_1'+x_2'+x_3'+x_4'+x_5'+x_6'+x_7'=1\\
&\quad 0\leq \quad -11v_2-11v_3+w \leq K p_1\\
&\quad 0\leq -11v_1 \quad -11v_3+w \leq K p_2\\
&\quad 0\leq -11v_1-11v_2 \quad +w \leq K p_3\\
&\quad 0\leq -12v_1-9v_2-9v_3 +w \leq K p_4\\
&\quad 0\leq -9v_1-12v_2-9v_3 +w \leq K p_5\\
&\quad 0\leq -9v_1-9v_2-12v_3 +w \leq K p_6\\
&\quad 0\leq 9v_1+9v_2-12v_3 +w \leq K p_7\\
&\quad v_1\geq 1, v_2\geq 1, v_3\geq 1\\
&\qquad 0\leq x_1' \leq K(1-p_1)\\
&\qquad 0\leq x_2' \leq K(1-p_2)\\
&\qquad 0\leq x_3' \leq K(1-p_3)\\
&\qquad 0\leq x_4' \leq K(1-p_4)\\
&\qquad 0\leq x_5' \leq K(1-p_5)\\
&\qquad 0\leq x_6' \leq K(1-p_6)\\
&\qquad 0\leq x_7' \leq K(1-p_7)\\
&\quad p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7 \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

با حل مساله برنامه‌ریزی خطی بالا، مولفه اول دقیق نقطه ضدایده‌آل به‌دست می‌آید که مقدار عددی آن صفر می‌باشد. برای مولفه‌های بعدی هم با در نظر گرفتن بحث مشابه، مقدار عددی صفر به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر، با روش ارایه شده در این مقاله مقادیر دقیق نقطه ضدایده‌آل به‌دست می‌آید.

نتیجه گیری

در حالی‌که محاسبه مقادیر دقیق نقاط ضدایده‌آل کارآسانی نیست، ولی یک موضوع خیلی مهمی در مسائل MOLP است. در این مقاله یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای محاسبه مقادیر نقاط ضدایده‌آل ارائه شد

که می‌تواند در هر دو حالت مجموعه شدنی محدب و نامحدب به‌کار گرفته شود. بنابراین همه الگوریتم‌ها و روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی می‌تواند در به‌دست آوردن مقادیر دقیق نقاط ضدایده‌آل در MOLP مورد استفاده قرار گیرد.

فهرست منابع

[1] Armand, P., Malivert, C., (1991). Determination of the efficient set in multiobjective linear programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 70, 467-489.

[2] Benson, H. P., (1984). Optimization over the efficient set. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 98, 562-580.

[3] Benson, H. P., Lee, D., McClure, J. P., (1998). Global optimization in practice: An application to interactivemultiple objective linear programming. Journal of Global Optimization, 12, 353-372.

[4] Benson, H. P., Sun, E., (2002). A weight set decomposition algorithm for finding all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear program. European Journal of Operational Research, 139, 26-41.

[5] Calvete, H. I., Gale', C., Mateo, P. M., (2008). A new approach for solving linear bilevel problems usin ggenetic algorithms. European Journal of Operational Research, 188,14-28.

[6] Deb, K., Chaudhuri, S., Miettinen, K., (2006). Towards estimating nadir objective vector using evolutionary approaches. In: Keijzer, M. et al. (Eds.), 2006 Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO2006), Seattle,Washington, USA, 1, 643-650.

[7] Dempe, S., (2002). Foundations of Bilevel Programming. Kluwer Academic Publishers.

[8] Dessouky, M. I., Ghiassi, M., Davis, W. J., (1986). Estimates of the minimum nondominated criterion values in multiple-criteria decision-making. Engineering Costs and Production Economics, 10, 95-104.

[9] Dyer, J.S., Fishburn, P. C., Steuer, R. E., Wallenius, J., Zionts, S., (1992). Multiple criterion decision making, multi attribute utility theory: The next ten years. Management Science, 38, 645-654.

[10] Ecker, J. G., Hegner, N. S., Kouada, I. A., (1980). Generating all maximal efficient faces for multiple objective linear programs. Journal of Optimization Theory and Applications, 30, 353-381.

[11] Ehrgott, M., (2005). Multicriteria optimization. Springer, Second Edithion, Berlin, Germany.

[12] Ehrgott, M., Tenfelde-Podehl, D., (2003). Computation of ideal and nadir values and implications for their use in MCDM methods. European Journal of Operational Research, 151,119-139.

[13] Horst, R., Thoai, N. V., Yamamoto, Y., Zenke, D., (2007). On optimization over the efficient set in linear multi criteria programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 134,433-443.

[14] Isermann, H., (1977). The enumeration of the set of all efficient solutions for a linear multiple objective program. Operational Research Quarterly, 28,711-725.

[15] Isermann, H., Steuer, R. E., (1987). Computational experience concerning payoff tables and minimum criterion

values over the efficient set. European Journal of Operational Research, 33, 91-97.

[16] Jorge, J. M., (2005). A bilinear algorithm for optimizing a linear function over the efficient set of a multiple objective linear programming problem. Journal of Global Optimization, 31, 1-6.

[17] Korhonen, P., Salo, S., Steuer, R. E., (1997). A heuristic method for estimating nadir criterion values in multiple objective linear programming. Operations Research, 45, 751-757.

[18] Leschine, T. M., Wallenius, H., Verdini, W. A. ،(1992). Interactive multiobjective analysis and assimilative capacity based ocean disposal decision. European Journal of Operational Research, 56, 278-289.

[19] Lv, Y., Hu, T., Wang, G., Wan, Z., (2007). A penalty function method based on Kuhn-Tucker condition for solving linear bilevel programming. Applied Mathematics and Computation, 188, 808-813.

[20] Metev, B., Vassilev, V., (2003). A Method for Nadir Point Estimation in MOLP Problems. Cyberneticsand Information Technologies, 3, 15-24.

[21] Pourkarimi, L., Zarepisheh, M., (2007). A dual-based algorithm for solving lexicographic multiple objective programs. European Journal of Operational Research, 176, 1348-1356.

[22] Reeves, G. R., Reid, R. C., (1988). Minimum values over the efficient set in multiple objective decision making. European Journal of Operational Research, 36, 334-338.

[23] Shi, C., Lu, J., Zhang, G., (2005). An extended Kuhn-Tucker approach for linear bilevel programming. Applied Mathematics and Computation, 162, 51-63.

[24] Shi, C., Lu, J., Zhang, G., Zhou, H., (2006). An extended branch and bound algorithm for linear bilevel programming. Applied Mathematics and Computation, 180, 529-537.

[25] Shi, C., Zhou, H., Lu, J., Zhang, G., Zhang, Z., (2007). The Kth-best approach for linear bilevel multi follower programming with partial shared variables among followers. Applied Mathematics and Computation, 188, 1686-1698.

[26] Tu, T. V., (2000). Optimization over the efficient set of a parametric multiple objective linear programming problem. European Journal of Operational Research, 122, 570-583.

[27] Yamamoto, Y., (2002). Optimization over the efficient set: Overview. Journal of Global Optimization, 22, 285-317.

[28] Yan, H., Wei, J., (2005). Constructing efficient solutions structure of multiobjective linear programming. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 307, 504-523.