دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دوازدهم، زمستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

ارزیابی ورشکستگی با استفاده ازروشی جدید در نظریه بازی‌ها و برنامه‌ریزی بازه‌ای

آیدا باتمیز[۱]، مهدی الله‌دادی[*۲]

[(۱و ۲)] گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، سیستان و بلوچستان، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۹/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۰/۱۳

چکیده

برخی از پارامترهای موجود در مسائل عالم واقعیت دارای عدم قطعیت می‌باشند. یکی از مسائل نادقیق که پارامترهای آن دارای حالت کیفی می‌باشند، مسائل اقتصادی مانند مسئله‌ی ورشکستگی است. در این‌صورت ممکن است با دیدگاه مسئولین، مدیران شرکت‌ها و سازمان‌ها، با مفاهیم نادقیق از جمله بازه‌ها برخورد کنیم. بر این اساس، در این مقاله با استفاده از مفاهیم نظریه‌ی بازی‌های تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) که مفهوم کاربردی آن در تمامی جهت‌ها عینیت دارد و تلفیق آن با مدل‌های نادقیق از نوع بازه‌ای، مسئله‌ی ورشکستگی را ارزیابی و یک نوع بازی بازه‌ای را برای پیش‌بینی ورشکستگی تعیین می‌کنیم و در آخر بازه ی خو ش بینانه و بدبینانه‌ای را برای ارزیابی ورشکستگی معرفی می‌کنیم که به ما در ارزیابی‌های دقیق اقتصادی با مفاهیم نادقیق کمک شایانی می‌کند و در مسائلی که عدم قطعیت حضور دارد به راحتی می‌توان با تبدیل آنها به حالت‌های بازه‌ای مسائل را ساده‌تر تحلیل و بررسی کرد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، ورشکستگی، نظریه بازی‌ها، برنامه‌ریزی بازه‌ای.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: m_allahdadi@math.usb.ac.ir

۱- مقدمه

یکی از ابزارهای پیش‌بینی وضعیت آینده سازمان‌ها، مدل‌های پیش‌بینی و ارزیابی ورشکستگی است. مدل‌های اولیه DEA برای ارزیابی کارایی نسبی در واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) در حالت خوش‌بینانه به‌کاربرده می‌شود، علاوه بر این مدل‌ها، مدل‌هایی هم هستند که تحت عنوان ارزیابی کارایی در حالت بدبینانه در DEA مورد بحث قرار می‌گیرند. از جمله مدل‌های DEA جمعی که در ارزیابی ورشکستگی برای یک مجموعه از نسبت‌های مالی به‌عنوان متغیرهای ورودی و مجموعه‌ی دیگر به‌عنوان متغیرهای خروجی درنظرگرفته می‌شوند [۱]. ایده‌ی ارزیابی ورشکستگی با استفاده از نظریه‌ی اقتصادی ورشکستگی و در راستای این نظریه است. نظریه اقتصادی پیشنهاد می‌کند که ورشکستگی باید به‌عنوان یک‌روند آزمایش طراحی‌شده برای حذف فقط شرکت‌هایی صورت بگیرد که به‌طور اقتصادی ناکارا هستند و به عبارتی دیگر ورشکستگی بدترین موقعیت یک DMU است که آن را تحت عنوان DMU نامطلوب بررسی می‌کنند. در مدل‌های پیش‌بینی ورشکستگی شرکت‌ها، احتمال وقوع ورشکستگی به‌وسیله گروهی از نسبت‌های مالی که از سوی صاحب‌نظران با هم ترکیب‌شده‌اند تخمین زده می‌شود. آلتمن [۲] نخستین فردی است که مدل‌های پیش‌بینی ورشکستگی را عرضه کرد در تحقیقات بعدی پریما کاندرا از مدل جمعی چارنز برای پیشگویی ورشکستگی استفاده کرد و بر اساس مثبت بودن و یا نبودن تابع هدف، آن‌ها را به‌عنوان ورشکسته و غیر ورشکسته معرفی کرد[۲].

یک روش برای مدل‌سازی مسائل تحت عدم قطعیت، مدل برنامه ریزی خطی بازه‌ای (ILP) است. مدل‌های دیگری هم با استفاده از مفاهیم نادقیق و مدل‌های خوش بینانه و بدبینانه‌ی دیگری در زمینه‌ی ارزیابی ورشکستگی انجام شده است که از آن می توان به مفاهیم راف فازی نام برد[۲۴]. اما روش‌های برنامه ریزی بازه‌ای بدلیل استفاده از مفاهیم کیفی در قالب یک بازه و تشخیص جواب بهینه در نواحی شدنی مورد مطالعه بهتر می‌تواند ارزیابی را مورد بحث قرار دهد و نسبت به روش‌های دیگر بهبود دهنده ی بهتری می‌باشد[۱۷،۱۸،۱۹]. عموماً برای حل مدل‌های ILP، دو زیر مدل پیشنهاد می‌شود که با حل این دو زیر مدل ناحیه جواب تعیین می‌شود[۱۲، ۱۳، ۱۴،۱۵، ۲۳]. یکی از زیر مدل‌ها، بهترین مقدار (مدل خوش بینانه) و دیگری بدترین مقدار (مدل بدبینانه) را برای تابع هدف بدست می‌آورد. در این مقاله به ارائه مدلی جدید برای ارزیابی و پیش‌بینی ورشکستگی با استفاده از داده‌های بازه‌ای می‌پردازیم. در این مدل از تلفیق DEA و نظریه‌ی بازی‌ها و به عبارت دیگر نظریه‌ی بازی‌های تحلیل پوششی داده‌ها استفاده می‌کنیم، بعضی از شاخص‌ها را در حالت قطعیت و یک شاخص در حالت کیفی و بازه‌ای درنظر گرفته می‌شود. سپس کاربرد این مدل را در قالب یک مثال تحلیل و بازه‌ی ورشکستگی رادر حالت خوش بینانه و بدبینانه برای مدل، تعیین و پیش‌بینی می‌کنیم. در واقع یک نوع بازی بازه‌ای را ارائه می‌دهیم که یکی از پرکاربردترین مسائل روز می‌باشد که رفتار بازیکنان را در قالب یک بازی تحت عدم قطعیت مورد بررسی قرار می‌دهد [۲۰، ۲۱، ۲۲].

۲- بازی ورشکستگی و تخصیص

مسئله ورشکستگی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم. اگر $E \in \mathbb{R}$ مقدار دارایی و d_i بیان کننده مقدار تقاضای طلبکار i ام باشد، می‌توان تمامی تقاضاها را با بردار تقاضای $d=(d_1,d_2,...,d_n)\in \mathbb{R}^n$ نمایش داد به‌طوری‌که $d_i \geq ۰$ برای هر $۰ \leq i \leq n$. $N=\{۱,...,n\}$ تعداد کل طلبکارها بوده و $۰ \leq E \leq \sum_{j\in N} d_j$ فرض می‌شود. دراین حالت مسئله ورشکستگی را می‌توان با اختصار به‌صورت (E,d) بیان نمود. اگر x_j مقدار تخصیص یافته برای طلبکار j ام باشد، یک جواب مسئله ورشکستگی (E,d)، یک تخصیص n تایی است، به‌طوریکه $E=\sum_{j\in N} x_j$.

برای انتخاب حالتی که به بیشترین بازده ختم شود از تخصیص استفاده می‌کنیم که در بهینه‌سازی از پرکاربردترین مباحث می‌باشد. استفاده از مدل‌های بهینه‌سازی این امکان را می‌دهد که همه حالت‌های مختلف تخصیص، با توجه به تابع هدف بررسی شود. در این حالت، قانون تخصیص، تابعی است که یک

تخصیص منحصربه‌فرد را به هر مسئله‌ی ورشکستگی اختصاص می‌دهد. در یک بازی تعاونی n نفره در تشکیل تابع تخصیص، دوتایی (N,v) را معرفی می‌کنیم به‌طوری $N=\{1,\dots,n\}$ مجموعه‌ای متناهی از بازیکنان است. $v:2^n\to\mathbb{R}$ تابع تخصیص و 2^n تعداد زیرمجموعه‌های N را نشان می‌دهد، $v(\varnothing)=0$ فرض می‌شود. در واقع در این مسائل زیر مجموعه‌های S از N را به‌عنوان تخصیص ارجاع می‌دهیم و مقدار $v(S)$ را به‌عنوان ارزش(دارایی) S معرفی می‌کنیم. در تخصیص، دارایی هر بازیکن، به‌عنوان ماکزیمم سود یا هزینه بازیکن تفسیر می‌شود. حال یک مجموعه ثابت از بازیکنان را به‌وسیله یک بازی (N,v) که v یک تابع تخصیص است را در نظر می‌گیریم.

بنابراین بازی ورشکستگی را مطابق با مسئله ورشکستگی (E,D) به‌وسیله $v_{E,d}(S)=\max\left\{E-\sum_{j\in N\setminus S}d_j,0\right\}$ تعریف می‌کنند. مقدار بهینه صفر نشان‌دهنده ورشکستگی خواهد بود. اگر مقدار دارایی بازیکن، کمتر یا مساوی میزان مطالبات طلبکاران از وی باشد مقدار به‌دست‌آمده در عبارت $E-\sum_{j\in N\setminus S}d_j$ منفی بوده و تمام دارایی‌ها به‌عنوان مطالبات به طلبکاران پرداخت‌شده است؛ که این نشان دهنده ی ورشکستگی بازیکن است و مقدار غیر صفر نشان‌دهنده غیر ورشکستگی خواهد بود. یعنی اگر مقدار به‌دست‌آمده در عبارت $E-\sum_{j\in N\setminus S}d_j$ مثبت باشد، مقدار دارایی خالص باقیمانده‌ای بعد از پرداخت مطالبات می‌تواند به‌عنوان ابزار تولید استفاده گردد که به‌عنوان عدم ورشکستگی بازیکن موردنظر تفسیر شود[۳].

۳. مدل فاصله‌ی جهت‌دار در DEA

تحلیل پوششی داده‌ها ، کارایی واحدهای تصمیم‌گیری را اندازه‌گیری می‌کند و روشی مبتنی بر مدل برنامه‌ریزی خطی است. n واحد تصمیم‌گیری، که هریک با m ورودی،s خروجی تولید می‌کنند را در نظر بگیرید، بطوریکه y_{rj} مقدار خروجی r ام و x_{ij} مقدار ورودی i ام از DMU_j می‌باشد. تمام داده‌ها نامنفی فرض می‌شوند. بدین‌صورت که: $x_{ij}\ge 0, x_j\ne 0$ و $y_{rj}\ge 0, y_j\ne 0$ برای هر $j=1,\dots,n$ که حداقل یک جزء از هر بردار ورودی و خروجی مثبت است[۵].

$$
\begin{aligned}
&\theta^*=\min\ \theta\\
&s.t.\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\le\theta x_{io},\quad i=1,\dots,m\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}\ge y_{ro},\quad r=1,\dots,s\\
&\lambda_j\ge 0,\quad j=1,\dots,n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

در مدل فوق x_{io} و y_{ro} نشان‌دهنده ورودی و خروجی DMU تحت بررسی است. این مدل دارای یک جواب شدنی $\theta=1,\ \lambda_o=1,\ \lambda_j=0\,(j\ne 0)$ است. بنابراین θ بهینه، بزرگ‌تر از ۱ نیست. حال مدل DEA می‌تواند به‌عنوان یک تابع فاصله جهت‌دار برای اندازه‌گیری کارایی در نظر گرفته شود. از این تابع فاصله جهت‌دار برای محاسبه ورشکستگی استفاده می‌شود.

چمبرز مدل DEA در حالت بازده به مقیاس ثابت را برای تابع فاصله جهت‌دار به‌صورت زیر ارائه نمود. در این روش، تابع فاصله جهت‌دار هر دسته از ورودی و خروجی‌های وابسته به بردارهای جـهت و مجموعـه امـکان تولیـد محاسبه می‌شود[۶].

$$
\begin{aligned}
&\max\quad \beta\\
&s.t.\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}\ge y_{ro}+\beta g_{y_{ro}}\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\le x_{io}-\beta g_{x_{io}}\\
&\lambda_j\ge 0,\ j=1,2,\dots,n\\
&g_{y_{ro}},g_{x_{io}}\ge 0\\
&g_x=\max_j\{x_{ij}\}-x_{io}\quad i=1,\dots,m\\
&g_y=y_{ro}-\min\{y_{rj}\}\quad r=1,\dots,s
\end{aligned}
\tag{2}
$$

در مدل فوق β نامقیداست و درواقع β ناکارایی تکنیکی در واحدها را اندازه می‌گیرد همچنین $1-\beta$

نشان‌دهنده کارایی بوده و افزایش خروجی‌ها و کاهش ورودی‌ها به‌طوری‌که به‌وسیله متغیر β انجام می‌شود. در مدل (۲)، g_x و g_y بردارهای جهت می‌باشند.

۴- ارزیابی ورشکستگی با استفاده از مدل فاصله جهت‌دار اصلاح‌شده در DEA

برای ارزیابی ورشکستگی، یک مدل اصلاح‌شده در DEA با دیدگاه بدترین کارایی نسبی به‌صورت مدل (۳) ارائه‌شده است. این مدل را در ماهیت خروجی بررسی می‌کنیم. ابتدا بدترین موقعیت یک DMU، تحت عنوان DMU نامطلوب را معرفی نموده که ورودی و خروجی‌های این DMU به‌صورت زیر است[۷]:

$$x_i^{\max} = \max_j (x_{ij})$$

$$i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$$

$$y_r^{\min} = \min_j (y_{rj})$$

$$r = 1,2,\ldots,s;\ j = 1,2,\ldots,n$$

واحد تحت ارزیابی را $DMU_o = (x_o, y_o)$ می‌نامیم. برای ارزیابی ورشکستگی خروجی DMU_0 را در جهت بردار خروجی g_y تغییر می‌دهیم. با توجه به موارد فوق، مدل ورشکستگی در ماهیت خروجی به‌صورت مدل (۳) ارائه‌شده است:

$$\begin{aligned}
&\max \quad \beta^{BR} \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{BR} y_{rj} \le y_{ro} - \beta^{BR} g_y;\ r = 1,2,\ldots,s \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{BR} x_{ij} \ge x_{io}; \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad (3) \\
&g_y, \beta^{BR} \ge 0 \\
&g_y = y_{ro} - \min_j \{y_{rj}\}\ \ r = 1,2,\ldots,s
\end{aligned}$$

بدترین کارایی نسبی به‌وسیله مدل فوق در جهت DMU نامطلوب محاسبه می‌شود و مقدار ورشکستگی $1-\beta$ برای شرکت‌ها نشان‌دهنده اندازه‌ی فاصله بین نقطه مشاهده شده با ارجاع به نقطه نامطلوب یعنی بدترین نقطه ممکن است.

اکنون با استفاده از مفاهیم ذکرشده در بخش‌های قبل، مدل جدید ورشکستگی (۴) را بیان کرده و ترکیب این مدل جدید را در بخش ۶ با استفاده از برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای در قالب یک بازی رقابتی بررسی می‌کنیم و آن را تحت یک مثال کاربردی در بخش‌های بعد مورد ارزیابی قرار می‌دهیم و بازه‌ی ورشکستگی را تعیین می‌کنیم.

۴-۱- مدل جدید در بررسی ورشکستگی با استفاده از مفهوم نظریه‌ی بازی‌های تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنید E_j مقدار دارایی کل اولیه برای سازمان j ام و $N = \{1,\ldots,n\}$ نشان‌دهنده تعداد کل سازمان‌ها، x_{ij} و y_{rj} نشان‌دهنده ورودی و خروجی سازمان j ام است و x_{io} و y_{ro} ورودی و خروجی‌های سازمان موردنظر را نشان می‌دهد و d_j مقدار مطالبات برای سازمان j ام می‌باشد و g_y نشان‌دهنده جهت تولید است.

$$\begin{aligned}
&\max\ E_j - \sum_{j \in N} d_j \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \le y_{ro} - (E_j - \sum_{j \in N} d_j) g_y \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ge x_{io} \qquad i = 1,\ldots,m \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad (4) \\
&E_j - \sum_{j \in N} d_j \ge 0 \\
&g_y = y_{ro} - \min\{y_{rj}\} \qquad r = 1,\ldots,s \\
&g_y, \lambda_j \ge 0
\end{aligned}$$

مدل (۴) تعیین ورشکستگی را با استفاده از نظریه بازی‌ها بیان نموده و تعبیری متفاوت را ارائه می‌دهد که جنبه اقتصادی ورشکستگی را بیشتر مدنظر قرار می‌دهد. تابع هدف این مدل بیانگر دارایی خالص یا همان دارایی باقیمانده پس از پرداخت مطالبات است. مدل ارائه‌شده فوق، مدل یک بازی تحت کنترل خواهد بود. در این مدل سازمان‌ها را به‌عنوان مجموعه‌ای از بازیکنان در نظر می‌گیریم. مسلم است که هر بازیکن، یا سازمان

موردبررسی، دارای یک مقدار دارایی اولیه می‌باشد. از طرفی در بررسی عوامل مؤثر بر ورشکستگی یک سازمان، مقدار مطالبات آن سازمان بسیار چشمگیر می‌باشد. به‌طوری‌که یک سازمان با دارایی نسبتاً قابل قبول را ممکن است با مطالبات زیاد به سمت ورشکسته شدن سوق دهد. در این راستا مدل (۴)، تشخیص هر چه بهتر ورشکستگی با استفاده از دارایی کل و مطالبات را امکان‌پذیر می‌کند. مقدار به‌دست‌آمده از حل این مدل، به‌عنوان دارایی خالص و به‌عبارت دیگر مقدار دارایی باقیمانده پس از پرداخت مطالبات برای بازیکن j ام تفسیر می‌شود. به‌طوری‌که مقدار مثبت به‌دست‌آمده از این مدل تحت عنوان غیر ورشکستگی بیان می‌شود. تفسیر این مدل به این صورت است که بازیکن موردنظر پس از پرداخت بدهی‌ها و باقیمانده‌ای که تحت عنوان دارایی خالص تفسیر می‌شود اگر این مقدار برابر با مقداری غیرصفر باشد به این منظور است که مقدار دارایی خالصی برای بازیکن، باقیمانده است، پس فاصله خود را تا ورشکستگی تا حدودی حفظ می‌کند و به این طریق می‌تواند با دارایی باقیمانده‌ی خود که همان دارایی خالص است مقداری را در جهت تولید یا مصارف دیگر استفاده کند. حال مقدار صفر را به‌عنوان ورشکستگی در نظر می‌گیریم. بدین‌صورت که این مقدار به این معناست که مقدار دارایی کل با مقدار مطالبات برابر بوده و تمام دارایی‌های بازیکن j ام به‌عنوان مطالبات پرداخت‌شده است و مقداری باقی نمانده است پس فاصله‌ای با ورشکسته شدن ندارد. بنابراین این بازیکن یا سازمان به‌عنوان ورشکسته اعلام می‌شود.

۵- برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای

برنامه‌ریزی بازه‌ای، جنبه ی مدل سازی‌های برنامه ریزی خطی را در قالب یک بازه بررسی می‌کند. برخی از پارامترهای موجود در مسائل عالم واقعیت دارای عدم قطعیت می‌باشند. یک روش برای کنار آمدن با عدم قطعیت، مدل ILP می‌باشد. روش‌های زیادی برای حل مدل‌های ILP وجود دارد. یکی از این روش‌ها که مقادیر خوش‌بینانه و بدبینانه را برای تابع هدف تعیین می‌کند، روش حالات بهترین- بدترین (BWC) است که توسط تانگ پیشنهاد شده است. در این روش، مدل ILP به دو زیر مدل تبدیل می‌شود، زیرمدل‌های بهترین و بدترین که به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین نواحی شدنی را دارند[۱۲].

یک عدد بازه ای $[X^-, X^+]$ به صورت $X^{\pm}$ نمایش داده می‌شود که $X^- \le X^+$. اگر $X^- = X^+$، آنگاه $X^{\pm}$ تباهیده خواهد بود. اگر A^- و A^+ دو ماتریس در $\mathbb{R}^{m\times n}$ باشند که $A^- \le A^+$، آنگاه مجموعه ماتریس‌های

$$A^{\pm} = [A^-, A^+] = \left\{ A \middle| A^- \le A \le A^+ \right\}$$

ماتریس بازه‌ای و ماتریس‌های A^- و A^+ کران‌های آن نامیده می‌شوند. ماتریس‌های مرکز و شعاع به صورت

$$A^c = \frac{۱}{۲}\left(A^- + A^+\right) \quad و \quad \Delta_{A^{\pm}} = \frac{۱}{۲}\left(A^+ - A^-\right)$$

تعریف می‌شوند. حالت خاصی از ماتریس بازه‌ای، بردار بازه‌ای به صورت $\mathbf{x}^{\pm} = \left\{ x | x^- \le x \le x^+ \right\}$ می‌باشد که $x^-, x^+ \in \mathbb{R}^n$ [۱۶].

مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max \quad z^{\pm} = \sum_{j=۱}^{n} c_j^{\pm} x_j^{\pm} \\ &s.t. \quad \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^{\pm} x_j^{\pm} \le b_i^{\pm}, \quad i = ۱,۲,\ldots,m, \qquad (۵) \\ &x_j^{\pm} \ge ۰, \quad j = ۱,۲,\ldots,n. \end{aligned}$$

مطابق با [۱۲]، بهترین و بدترین مقادیر تابع هدف مدل (۵) از حل دو زیر مدل بهترین و بدترین به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} &Max \quad z^{+} = \sum_{j=۱}^{n} c_j^{+} x_j \\ &s.t. \quad \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^{-} x_j \le b_i^{+}, \quad i = ۱,۲,\ldots,m, \qquad (۶) \\ &x_j^{\pm} \ge ۰, \quad j = ۱,۲,\ldots,n. \end{aligned}$$

$$Max \quad z^{-} = \sum_{j=۱}^{n} c_j^{-} x_j$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} x_j \le b_i^{-}, \quad i=1,2,\ldots,m, \\
& x_j^{\pm} \ge 0, \quad j=1,2,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۷}
$$

مدل‌های (۶) و (۷) به ترتیب دارای بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین نواحی شدنی می‌باشند[۱۵].

۶- مدل ورشکستگی جدید با استفاده از برنامه‌ریزی بازه‌ای و نظریه‌ی بازی‌ها

حال با استفاده از مفاهیم گفته شده در مباحث قبل، مدل جدید ورشکستگی را با استفاده از مدل ILP بیان می‌کنیم. اکنون مدل جدید ورشکستگی که در آن ضرائب مربوط به خروجی ها بازه ای هستند را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & E_j - \sum_j d_j \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[y_j^{-}, y_j^{+} \right] \le \left[y_o^{-}, y_o^{+} \right] \\
& -\left(E_j - \sum_j d_j \right) g_y \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ge x_{io} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& g_y = y_{ro}^{+} - \min\{y_{rj}^{-}\} \\
& E_j - \sum_j d_j \ge 0 \\
& g_y, \lambda_j \ge 0
\end{aligned} \tag{۸}
$$

مدل فوق قابل تبدیل به دو زیر مدل تعبیر شده به حالت خوش بینانه و بدبینانه‌ی زیر می‌باشد:

حالت بدبینانه‌ی مدل:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & E_j - \sum_j d_j \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[y_j^{-} \right] \le \left[y_o^{+} \right] \\
& -\left(E_j - \sum_j d_j \right) g_y \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ge x_{io} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& g_y = y_{ro}^{+} - \min\{y_{rj}^{-}\} \\
& E_j - \sum_j d_j \ge 0 \\
& g_y, \lambda_j \ge 0
\end{aligned} \tag{۹}
$$

حالت خوش بینانه‌ی مدل:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & E_j - \sum_j d_j \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[y_j^{+} \right] \le \left[y_o^{-} \right] \\
& -\left(E_j - \sum_j d_j \right) g_y \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ge x_{io} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& g_y = y_{ro}^{+} - \min\{y_{rj}^{-}\} \\
& E_j - \sum_j d_j \ge 0 \\
& g_y, \lambda_j \ge 0
\end{aligned} \tag{۱۰}
$$

که با حل این دو مدل کران‌های میزان ورشکستگی بدست می‌آید.

۷- مثال کاربردی

در این بخش با استفاده از مفاهیم گفته شده در بخش‌های قبل، به بررسی یک مثال کاربردی از چند شرکت در قالب یک بازی می‌پردازیم. در این مسئله شاخص‌های سرمایه، بدهی، فروش در حالت قطعیت و ارزیابی عملکرد به صورت یک مقدار کیفی درنظر گرفته شده است که قابل تبدیل به حالت بازه‌ای می‌باشد. فرض بر این است که ارزیابی عملکرد ۸ شرکت در جدول (۱) به صورت یک مقدار کیفی که در نهایت یک بازه تحت کران های پایین و بالای ۰ و ۱۰۰ خواهد بود(به عنوان مثال عملکرد ضعیف در بازه‌ی (۱۰،۳۰) و خیلی ضعیف در بازه‌ی (۰،۱۰) و ...). جهت تولید در این مدل مثبت تعریف می‌شود. حال با استفاده از مقادیر داده شده در این جدول، ورشکستگی این ۸ شرکت را در قالب یک بازی

با ۸ بازیکن، بررسی و نتایج آن را با استفاده از یک نوع مدل بازی‌های بازه‌ای محاسبه و بازه‌ی ورشکستگی را مورد بحث قرار می‌دهیم لازم به ذکر است که مثال فوق با استفاده از روش تئوری راف فازی محاسبه و اندازه گیری‌های کارایی و ورشکستگی در قالب راف فازی نیز انجام شده‌اند. اما در اینجا با استفاده از مفاهیم نادقیق در قالب بازه و تبدیل مدل به حالت برنامه ریزی بازه‌ای انجام شده است [۲۴].

جدول ۱: مقادیر مربوط به شاخص‌ها و شرکت‌ها (ویژگی‌ها یا اشیاء) اعداد برحسب میلیون تومان می‌باشند

شاخص‌ها / شرکت‌ها	سرمایه ($X1$)	بدهی ($X2$)	فروش ($X3$)	ارزیابی عملکرد ($X4$)	ورشکستگی در حالت بازه‌ای
DMU_1	۱۲۳	۴۶	۱۱	ضعیف	[۰/۹۶ , جواب ندارد]
DMU_2	۲۳۴	۷۸	۳	خیلی ضعیف	[۱ , جواب ندارد]
DMU_3	۱۷۶	۶۸	۱۶۴	خوب	[۰/۰۲,۰/۵۹]
DMU_4	۲۸	۱۷	۱۶۵	خیلی خوب	[۰/۲۳,۰/۶۸]
DMU_5	۵۳۰	۷۱	۱۷۱	متوسط	[۰,۰/۴]
DMU_6	۶۹	۶۹	۷۶	ضعیف	[۰/۶۶ , جواب ندارد]
DMU_7	۱۰۹	۸۵	۳۷	خوب	[۰,۰/۲۸]
DMU_8	۱۳۵	۷۲	۶۰	خوب	[۰/۳۷,۰/۸۸]

۸- تحلیل و نتایج مدل جدید ورشکستگی

با استفاده از تعریف نظریه‌ی بازی‌های ورشکستگی، مقدار ورشکستگی و سرمایه‌ی موجود بعد از پرداخت مطالبات را مورد بحث قرار می‌دهیم و مدل را به صورت‌زیر تحلیل می‌کنیم. در این مثال مقدار سرمایه‌ی شرکت ها از مقدار بدهی بیشتر و نهایت با آن برابر می‌باشد که در این حالت‌ها ورشکستگی هم در بعضی از شرکت‌ها با داشتن سرمایه‌ی نسبتاً خوب و مطالبات کم اتفاق افتاده است چرا که ما این ۸ شرکت را در قالب یک بازی رقابتی درنظر گرفته‌ایم و عملکرد این ۸ بازیکن تحت یک بازی و عملکرد آن‌ها نسبت به هم، سنجیده و ورشکستگی محاسبه می‌شود. در واقع ممکن است در طی این بازی رقابتی بعضی از بازیکنان نسبت به بقیه عملکرد بهتری داشته باشند و بازیکن مقابل خود را از این رقابت حذف و ورشکسته کنند.

به عنوان مثال بازیکن اول با ارزیابی عملکرد ضعیفی که نسبت به سرمایه و بدهی خود داشته است در این گروه از بازیکنان ورشکسته اعلام شده است و ورشکستگی آن در حالت بدبینانه ۹۶ درصد اعلام شده است و در حالت خوش بینانه به دلیل عملکرد ضعیف خود ورشکستگی جواب ندارد و این بدین معناست که در حالت خوش بینانه هم نمیتوان به این بازیکن مقدار ورشکستگی کمتری نسبت داد و در کل ورشکسته است. بازیکن دوم هم عملکرد خیلی ضعیفی داشته است و کاملاً ورشکسته اعلام شده است. بازه‌ی ورشکستگی در بازیکن هفت بطور مثال[۰/۲۸و۰] است که نشان می‌دهد بازیکن هفتم با عملکرد خوب در این بازی به اندازه ی حداکثر ۲۸ درصد ورشکسته است و در حالت دیگر جواب ندارد و آن، به علت عملکرد خوب آن در این بازی بوده است. بازیکنان دیگر هم به همین ترتیب مورد تحلیل می‌توان قرار داد.

۹- نتیجه‌گیری

هدف از این مطالعه بررسی مسئله‌ی ورشکستگی با استفاده از یک مدل جدید در قالب یک بازی با استفاده از نظریه‌ی بازی‌ها و برنامه‌ریزی بازه‌ای و به عبارت دیگر بازی‌های بازه‌ای تحت شرایط و شاخص‌های قطعی و کیفی است. این مدل با استفاده از یک مثال کاربردی در

زمینه‌ی اقتصاد مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت. تحقیقات نشان دادند که مدل فوق با بررسی یک گروه از شرکت‌های همکار تحت عنوان یک بازی رقابتی به چه صورت می‌تواند عملکرد و ورشکسته بودن و نبودن را در قالب یک مدل بررسی کند و ورشکستگی و حذف شدن بعضی از بازیکنان را حتی با داشتن سرمایه‌ای بیشتر از بدهی خود، از بازی پیش‌بینی کند چرا که تحت این بازی، تمام عوامل و شاخص‌های مورد بحث باهم سنجیده می شوند و طبعاً اگر بازیکن در فعالیت خود کوتاهی کند توسط بازیکنان رقیب خود از ادامه‌ی بازی محروم می‌شود. در واقع برنامه‌ریزی بازه‌ای این اجازه را به ما داد که شاخص‌های کیفی مورد استفاده را با نظریه‌ی بازی‌ها تلفیق و با تعیین یک بازه‌ی ورشکستگی خوش بینانه و بدبینانه، ورشکستگی بازیکنان را مشاهده کنیم. این روش بدلیل دارا بودن تمام محاسبات تحت یک بازه و تبدیل آن به دو زیر مدل، همچنین محاسبات کمتر و دقیق‌تر، نسبت به روش‌های دیگر در زمینه‌ی مفاهیم نادقیق و کیفی درک صحیحی و روشنی از کاربردی بودن نظریه‌ی بازی‌ها و برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای را می‌تواند در دنیای اقتصاد و ریاضیات قرار دهد و به ما در تشخیص بهتر ارزیابی ورشکستگی با مفاهیم نادقیق، یاری دهد.

سپاسگزاری

از شما داورین محترم جهت همکاری با نویسندگان این مقاله کمال تشکر را داریم.

فهرست منابع

[1] Premachandra I.M., Gurmeeet Singh Bhabra., Toshiyuki Sueyoshi. (2009). DEA as a tool for bankruptcy assessment: A comparative study with logistic regression technique. European Journal of Operational Research 193, 412-424.

[2] Altman, E. I. (1968). Financial ratios, discriminated analysis and the prediction of corporate bankruptcy. Journal of Finance, 23, 589-609.

[3] Leobardo Plata-Pérez, Joss Sánchez-Pérez. (2011).Convexity and marginal contributions in bankruptcy games

[4] Nir Dagan, Oscar Voliji. (1993). the bankruptcy problem: A cooperative bargaining approach. Mathematical Social Sciences 26, 287-297.

[5] Charnes, A. Cooper, W. W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research. 2(4), 429-444.

[6] Chambers, R. G, Chung, Y., & Fare, R. (1998). Profit directional distance function and Nerlovian efficiency. Journal of Optimization and Theory and Application, 12,233-247

[7] Udaya Shetty, Pakala T.P.M., Mallikarjunappa T. (2012). A modified directional distance formulation of DEA to assess bankruptcy: An application to IT/ITES companies in India. Expert lists with Applications 39, 1988-1997.

[8] Tomoe Entani., Yutaka Maeda., Hideo Tanaka. (2002). Dual models of interval DEA and it's extension to interval data. European Journal of Operational Research 136, 32-45.

[9] Aumann, R. J., Maschler, M. (1985). “Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud”, *Journal of Economic Theory*, 36, 195 - 213.

[10] Driessen, T. (1988). Cooperative games, solutions and applications. Theory and Decision Library, Springer.

[11] Huang, G. H.,Moore, R. D. (1993). Grey linear programming, its solving approach, and its application. International Journal of Systems Science, 24, 159-172.

[12] Tong, S. C. (1994). Interval number, fuzzy number linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 66, 301-306.

[13] Wang, X., Huang, G. (2014). Violation analysis on two-step method for interval linear programming. Information Sciences, 281, 85-96.

[14] Zhou, F., Huang, G. H., Chen, G., Guo, H. (2009) Enhanced-interval linear programming. European Journal of Operational Research, 199, 323-333.

[15] Chinneck, J. W., Ramadan, K. (2000). Linear programming with interval coefficients. Journal of the Operational Research Society, 51, 209-220.

[16] Alefeld, G., Herzberger, J. (1983). Introduction to Interval Computations. New York: Academic Press.

[17] Allahdadi. M Mishmast Nehi H. (2013). The optimal solution set of the interval linear programming problems.Original paper

[18] Allahdadi. M Mishmast Nehi H. (2013). The Optimal Value Bounds of the Objective Function in the Interval Linear Programming Problem. Chiang Mai J. Sci. 2015; 42 (2)

[19] Allahdadi. M Mishmast Nehi H. i Ashayerinasab, HasanAl. Javanmard Moslem. (2016). Improving the modified interval linear programming method by new techniques.

[20] Bok. J (2014). Cooperative interval games, Department of Applied Mathematics, Charles University in Prague

[21] Branzei. R., Tijs. S., Alparslan G¨ok . S.Z(2010). Cooperative interval games: a survey. Central European Journal of Operations Research

[22] Alparslan G¨ok S.Z ., Branzei. R., S. Tijs. Convex Interval Games (2009). Convex Interval Games, Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences.

[23] Ashayerinasab, HasanAl., Mishmast Nehi H., Allahdadi.M (2018). Solving the interval linear programming problem: A new algorithm for a general case.

[۲۴] باتمیز، حسین‌زاده سلجوقی. روشی جدید در تعیین ورشکستگی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها و تئوری مجموعه‌های راف فازی. مجله مدلسازی پیشرفته ریاضی اهواز. ۱۳۹۵