دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

توسیع برخی از حلقه‌های خاص در امتداد یک ایده‌آل

الهام توسلی *

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۵/۲۲   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۴/۵

چکیده

فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد و I ایده‌آلی سره از R باشد. دآنا و فونتانا در [۶] ساختار جدیدی از حلقه‌ها را معرفی کردند و آن‌را توسیع حلقهٔ R در امتداد ایده‌آل I نامگذاری کردند. این ساختار جدید با نماد $R \bowtie I$ نمایش داده می‌شود. در این مقاله، با در نظر گرفتن همریختی حلقه‌ای $\varphi : R \to R \bowtie I$ نشان می‌دهیم که اگر $\mathrm{p} \in \mathrm{Ass}(R \bowtie I)$، آن‌گاه $\varphi^{-1}(\mathrm{p}) \in \mathrm{Ass}(R)$ و نیز اگر $\mathrm{q} \in \mathrm{Ass}(R)$، آن‌گاه $\mathrm{p} \in \mathrm{Ass}(R \bowtie I)$ چنان موجود است که $\varphi^{-1}(\mathrm{p}) = \mathrm{q}$. به وسیله این نتیجه ثابت می کنیم که اگر $R \bowtie I$ یک حلقه جامعاً کوهن-مکالی (جامعاً گورنشتاین) باشد و I نیز یک مدول جامعاً کوهن-مکالی ماکزیمال (جامعاً کانونیک) باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ یک حلقهٔ جامعاً کوهن-مکالی (جامعاً گورنشتاین) خواهد بود. همچنین حلقه‌های جامعاً شبه گورنشتاین را معرفی می‌کنیم و شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن $R \bowtie I$ جامعاً شبه گورنشتاین باشد. به علاوه نشان می‌دهیم که $R \bowtie I$ یک حلقهٔ تقریباً کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر R تقریباً کوهن-مکالی باشد. و در نهایت ثابت می‌کنیم که اگر R یک حلقه تقریباً گورنشتاین باشد، آنگاه $R \bowtie I$ نیز تقریباً گورنشتاین خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: توسیع حلقه در امتداد یک ایده‌آل از آن، جامعاً گورنشتاین، جامعاً کوهن-مکالی، تقریباً گورنشتاین، تقریباً کوهن-مکالی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: elhamtavasoli@ipm.ir

۱- مقدمه

در سراسر این مقاله R حلقه‌ای جابه‌جایی با عضو همانی و تمام همریختی‌های حلقه‌ای یکانی هستند. فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$مدول باشد. توسیع بدیهی[1] یا ایده‌آل‌سازی $R \ltimes M$ که توسط ناگاتا معرفی شده است، حلقه‌ای است که مدول M را می‌توان به‌عنوان ایده‌آلی از آن در نظر گرفت به‌طوری‌که $M^2=0$ باشد.

دآنا و فونتانا در [۶] ساختار مشابهی با توسیع بدیهی را معرفی کردند و آن‌را توسیع حلقهٔ R در امتداد ایده‌آل[2] I نامگذاری کردند که در آن I ایده‌آلی سره از R می‌باشد. این ساختار جدید با نماد $R \bowtie I$ نمایش داده می‌شود و هنگامی‌که $I^2=0$ باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ همان $R \ltimes I$ خواهد بود. به‌طور دقیق‌تر $R \bowtie I$ زیرحلقه‌ای از $R \times R$ است و داریم:

$$R \bowtie I=\{(r, r+i) \mid r \in R, i \in I\}$$

دآنا در [۴] نشان داده است که $R \bowtie I$ حلقه‌ای کوهن–مکالی است اگر و تنها اگر R کوهن–مکالی و I ایده‌آلی کوهن–مکالی ماکزیمال باشد. به‌علاوه شاپیرو در [۱۳] ثابت کرده است که اگر R حلقه‌ای کوهن–مکالی و موضعی باشد و $Ann_R(I)=0$ باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ حلقه‌ای گورنشتاین است اگر و تنها اگر R ایده‌آل کانونیکی مانند W_R داشته باشد به‌طوری‌که $W_R \cong I$ است. همچنین در [۳] برخی دیگر از خواص $R \bowtie I$ مورد بررسی قرار گرفته است و ثابت شده است که اگر R حلقه‌ای موضعی و نوتری و I ایده‌آلی سره از R باشد که $Ann_R(I)=0$ است، آن‌گاه $R \bowtie I$ یک حلقهٔ شبه گورنشتاین[3] است اگر و تنها اگر $\widehat{R}$ در شرط (S_2) صدق کند و I ایده‌آلی کانونیک برای R باشد. در بخش ۳ شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آنها $R \bowtie I$ حلقه‌ای جامعاً کوهن–مکالی[4] (جامعاً گورنشتاین[5]، جامعاً شبه گورنشتاین[6]) یا تقریباً کوهن–مکالی[7] (تقریباً گورنشتاین[8]) باشد.

۲- پیشنیازها و مقدمات

در این بخش برخی از مفاهیم و تعاریف موردنیاز را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۲-۱- فرض کنید R یک حلقهٔ موضعی با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}$ و با بعد کرول d باشد و K یک $R-$مدول باشد. دراین‌صورت K را یک مدول کانونیک[9] از R می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$K \underset{R}{\otimes} \widehat{R} \cong \operatorname{Hom}_R\left(H_{\underline{m}}^d(R), E_R\left(\frac{R}{\underline{m}}\right)\right)$$

تعریف ۲-۲- فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. حلقهٔ نوتری R در شرط (S_n)، که به ویژگی سر[10] مشهور است، صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل اول از R مانند P داشته باشیم $\operatorname{depth} R_{\mathrm{P}} \geq \min\{n, \dim R_{\mathrm{P}}\}$.

توجه داشته باشید که اگر R حلقه‌ای کوهن–مکالی باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح n داریم که R در شرط (S_n) صدق می‌کند.

فرض کنید R حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}$ و با بعد کرول d باشد. می‌دانیم که اگر R حلقه‌ای گورنشتاین باشد، آن‌گاه داریم $H_{\underline{m}}^d(R) \cong E_R\left(\frac{R}{\underline{m}}\right)$

در ۱۳-۵-۹ از مرجع [۷] نشان داده شده است که اگر R حلقه‌ای کوهن–مکالی باشد و به‌علاوه داشته باشیم $H_{\underline{m}}^d(R) \cong E_R\left(\frac{R}{\underline{m}}\right)$، آن‌گاه R گورنشتاین است.

1- trivial extension
2- amalgamated duplication along an ideal
3- quasi-Gorenstein
4- generically Cohen-Macaulay
5- generically Gorenstein
6- generically quasi-Gorenstein
7- approximately Cohen-Macaulay
8- approximately Gorenstein
9- canonical
10- Serre's condition

بنابراین اگر $H_{\underline{m}}^{d}(R) \cong E_R\left(\frac{R}{\underline{m}}\right)$ باشد، آن‌گاه R متعلق به خانواده جدیدی از حلقه‌ها خواهد بود که به‌طور طبیعی شامل حلقه‌های گورنشتاین نیز می‌باشد. این حلقه‌ها که شبه گورنشتاین نامیده می‌شوند توسط پلاته و استورچ در [۱۱] به‌صورت زیر تعریف شده‌اند.

تعریف ۲-۳- حلقهٔ موضعی $(R,\underline{m})$ با بعد کرول d را شبه گورنشتاین می‌نامیم هر گاه R دارای مدول کانونیکی باشد که به‌عنوان $R-$مدول آزاد (با رتبه ۱) است، یا به‌طور معادل داشته باشیم: $H_{\underline{m}}^{d}(R) \cong E_R\left(\frac{R}{\underline{m}}\right)$.

واضح است که R حلقه‌ای گورنشتاین است اگر و تنها اگر شبه گورنشتاین و کوهن-مکالی باشد.

تعریف ۲-۴- حلقهٔ نوتری R را جامعاً کوهن-مکالی می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{Ass}(R)$، حلقهٔ R_{p} کوهن-مکالی باشد و به‌طور مشابه R را جامعاً گورنشتاین می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{Ass}(R)$، حلقه R_{p} گورنشتاین باشد.

واضح است که هر حلقهٔ کوهن-مکالی یک حلقهٔ جامعاً کوهن-مکالی و هر حلقهٔ گورنشتاین یک حلقهٔ جامعاً گورنشتاین می‌باشد و عکس این مطلب زمانی برقرار است که حلقه آرتینی باشد. حال حلقه‌های جامعاً شبه گورنشتاین را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲-۵- حلقهٔ موضعی R را جامعاً شبه گورنشتاین می‌نامیم هرگاه حلقهٔ R_{p}، برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{Ass}(R)$، یک حلقهٔ شبه گورنشتاین باشد.

با توجه به اینکه موضعی‌سازی هر حلقهٔ شبه گورنشتاین یک حلقهٔ شبه گورنشتاین است، پس هر حلقهٔ شبه گورنشتاین یک حلقهٔ جامعاً شبه گورنشتاین می‌باشد و عکس این مطلب نیز زمانی برقرار است که حلقه با بعد کرول صفر باشد. همچنین به راحتی بررسی می‌شود که حلقهٔ موضعی R یک حلقهٔ جامعاً گورنشتاین است اگر و تنها اگر R حلقه‌ای جامعاً شبه گورنشتاین و جامعاً کوهن-مکالی باشد.

گوتودر [۸] حلقه‌های تقریباً کوهن-مکالی را به‌صورت زیر تعریف کرده است.

تعریف ۲-۶- حلقهٔ موضعی R با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}$ را تقریباً کوهن-مکالی می‌نامیم هرگاه $\dim(R)=0$ یا عضوی از $\underline{m}$ مانند a چنان موجود باشد که برای هر عدد صحیح $n>0$ حلقهٔ $\frac{R}{a^n R}$ کوهن-مکالی با بعد کرول $\dim(R)-1$ باشد.

واضح است که هر حلقهٔ موضعی و کوهن-مکالی یک حلقه تقریباً کوهن-مکالی است و عکس این مطلب زمانی برقرار است که بعد کرول حلقه برابر با صفر باشد. همچنین گوتو در ۸-۲ از مرجع [۸] نشان داد که اگر $(R,\underline{m})$ یک حلقهٔ تقریباً کوهن-مکالی باشد به‌طوری‌که داشته باشیم $\dim(R)\geq 2$ و نیز برای هر $i \neq \dim(R)$، $H_{\underline{m}}^{i}(R)$ یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه R کوهن-مکالی است.

در [۹] هاچستر حلقه‌های تقریباً گورنشتاین را به‌صورت زیر تعریف کرده است.

تعریف ۲-۷- حلقهٔ موضعی R با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}$ را تقریباً گورنشتاین می‌نامیم هرگاه برای هر عدد صحیح $n>0$، ایده‌آل I چنان موجود باشد که $I \subseteq \underline{m}^n$ و $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای گورنشتاین باشد.

واضح است که هر حلقهٔ گورنشتاین یک حلقه تقریباً گورنشتاین است و هر حلقه با بعد کرول صفر، تقریباً گورنشتاین است اگر و تنها اگر گورنشتاین باشد.

دآنا و فوتانا در [۶] ساختار جدیدی را معرفی کردند که توسیع حلقهٔ R در امتداد ایده‌آل I نامیده می‌شود و آن را با نماد $R \bowtie I$ نمایش می‌دهند. به‌طور دقیق‌تر، $R \bowtie I$ (همراه با عمل جمع و ضرب مؤلفه به مؤلفه) زیرحلقه‌ای از $R\times R$ با عضو همانی (۱و۱) می‌باشد و نیز داریم:

$$R \bowtie I = \left\{ (r, r+i) \middle| r \in R, i \in I \right\}$$

اگر $I^2=0$ باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ همان $R \ltimes I$ خواهد بود. در گزارهٔ زیر برخی از خواص و ویژگی‌های $R \bowtie I$ از مراجع [۳] و [۴] و [۱۳] آورده شده است.

گزاره ۲-۸- فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. دراین‌صورت موارد زیر برقرارند:

(i) نگاشت $f: R \oplus I \to R \bowtie I$ با ضابطهٔ $f\left((r,i)\right)=(r,r+i)$ یک R-یکریختی است. به‌علاوه دنبالهٔ دقیق کوتاه $0 \to R \xrightarrow{\varphi} R \bowtie I \xrightarrow{\tau} I \to 0$ یک دنبالهٔ دقیق شکافته شده از R-مدول‌ها می‌باشد که برای هر $r \in R$ داریم $\varphi(r)=(r,r)$ و برای هر $(r,s) \in R \bowtie I$ داریم $\tau\left((r,s)\right)=s-r$. همچنین دنبالهٔ دقیق کوتاه زیر از R-مدول‌ها را نیز داریم:

$$(\times)\quad 0 \to I \xrightarrow{\tau'} R \bowtie I \xrightarrow{\varphi'} R \to 0$$

که در آن برای هر $i \in I$ داریم $\tau'(i)=(0,i)$ و برای هر $(r,s) \in R \bowtie I$ داریم $\varphi'\left((r,s)\right)=r$. توجه داشته باشید که دنباله دقیق (×) یک دنباله دقیق از $(R \bowtie I)$-مدول‌ها نیز می‌باشد.

(ii) فرض کنید P یک ایده‌آل اول از حلقهٔ R باشد. قرار دهید:

$$P_0=\left\{(p,p+i) \middle| p \in P, i \in I \cap P\right\},$$
$$P_1=\left\{(p,p+i) \middle| p \in P, i \in I\right\},$$
$$P_2=\left\{(p+i,p) \middle| p \in P, i \in I\right\}.$$

الف) اگر $I \subseteq P$، آن‌گاه $P_0=P_1=P_2$ یک ایده‌آل اول از حلقهٔ $R \bowtie I$ است و نیز تنها ایده‌آل اولی از $R \bowtie I$ می‌باشد که بر روی P قرار می‌گیرد و به‌علاوه داریم:

$$\left(R \bowtie I\right)_{P_0} \cong R_{\mathrm{P}} \bowtie I_{\mathrm{P}}$$

ب) اگر $I \not\subseteq P$، آن‌گاه $P_1 \neq P_2$ و $P_1 \cap P_2 = P_0$. به‌علاوه P_1 و P_2 تنها ایده‌آل‌های اول از $R \bowtie I$ می‌باشند که بر روی P قرار می‌گیرند. همچنین داریم:

$$\left(R \bowtie I\right)_{P_1} \cong R_{\mathrm{P}} \cong \left(R \bowtie I\right)_{P_2}$$

(iii) حلقه‌های R و I $R \bowtie$ دارای بعد کرول یکسانی هستند. همچنین اگر R یک حلقهٔ موضعی با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}$ باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ نیز حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}_0=\left\{(r,r+i) \middle| r \in \underline{m}, i \in I\right\}$ خواهد بود. به‌علاوه اگر R یک حلقهٔ نوتری باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ یک R-مدول با تولید متناهی خواهد بود.

(iv) فرض کنید R یک حلقهٔ موضعی و کوهن-مکالی با بعد کرول d باشد. در این صورت $R \bowtie I$ یک R-مدول کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر I یک R-مدول کوهن-مکالی از بعد d باشد (یعنی I یک R-مدول کوهن-مکالی ماکزیمال باشد.)

به‌علاوه داریم:

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}(R \bowtie I) &= \\ &\min\left\{\operatorname{depth}(I), \operatorname{depth}(R)\right\} \\ &= \operatorname{depth}(I)\end{aligned}$$

(v) فرض کنید R یک حلقهٔ موضعی و کوهن-مکالی باشد و I ایده‌آلی سره از حلقهٔ R به‌طوری‌که $Ann_R(I)=0$ باشد. دراین‌صورت $R \bowtie I$ یک حلقه گورنشتاین است اگر و تنها اگر R ایده‌آل کانونیکی مانند W_R داشته باشد به‌طوری‌که $I \cong W_R$.

(vi) فرض کنید R حلقه‌ای موضعی و نوتری و I ایده‌آلی سره از حلقهٔ R که $Ann_R(I)=0$ باشد. آن‌گاه $R \bowtie I$ یک حلقه شبه گورنشتاین است اگر و تنها اگر $\widehat{R}$ در شرط (S_2) صدق کند و I یک ایده‌آل کانونیک برای R باشد.

۳- توسیع برخی حلقه‌های خاص در امتداد یک ایده‌آل از آنها

فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقهٔ R باشد. در این بخش به بررسی شرایطی می‌پردازیم که تحت آنها حلقهٔ

$R\bowtie I$ به حلقه‌های معرفی شده در بخش ۲ تبدیل شود. همچنین به نحوهٔ انتقال این شرایط از حلقهٔ R به حلقهٔ $R\bowtie I$ و بالعکس می‌پردازیم.

ابتدا گزاره ولم زیر را ثابت می‌کنیم.

گزاره ۳-۱- فرض کنید I یک ایده‌آل یکدست و ناصفر از حلقهٔ آرتینی R باشد. دراین‌صورت اگر $R\bowtie I$ گورنشتاین باشد، آن‌گاه R نیز گورنشتاین است.

برهان. طبق گزاره (iii) ۲-۸ داریم $\dim(R\bowtie I)=\dim(R)=0$. پس $R\bowtie I$ روی خودش یک مدول انژکتیو است. همچنین با استفاده از نتیجه ۴-۳ از مرجع [۱۴] داریم که:

$$id_R(R\bowtie I)=fd_R(R\bowtie I)$$

طبق فرض نیز I یک ایده‌آل یکدست از R می‌باشد، پس $R\bowtie I$ به‌عنوان R-مدول یکدست خواهد بود. بنابراین $R\bowtie I$ یک R-مدول انژکتیو است و برای هر R-مدول مانند M و هر عدد صحیح $i\ge 1$ داریم:

$$0=Ext^i_R(M,R\bowtie I)\cong Ext^i_R(M,R)\oplus Ext^i_R(M,I)$$

پس برای هر R-مدول مانند M و هر $i\ge 1$ داریم $Ext^i_R(M,R)=0$. در نتیجه R روی خودش انژکتیو و بنابراین گورنشتاین است، زیرا $\dim(R)=0$ می‌باشد.

لم ۳-۲- فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقهٔ نوتری R باشد. همریختی حلقه‌ای $\varphi:R\to R\bowtie I$ را در نظر بگیرید که در آن $\varphi(r)=(r,r)$ می‌باشد. دراین‌صورت موارد زیر برقرارند.

(i) اگر $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R\bowtie I)$، آن‌گاه $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})\in\mathrm{Ass}(R)$.

(ii) اگر $\mathfrak{q}\in\mathrm{Ass}(R)$، آن‌گاه $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R\bowtie I)$ چنان موجود است که $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})=\mathfrak{q}$.

برهان. (i) دنباله دقیق زیر از $(R\bowtie I)$-مدول‌ها را در نظر بگیرید.

$$0\to I\to R\bowtie I\to R\to 0$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ass}(R\bowtie I)&\subseteq\mathrm{Ass}_{R\bowtie I}(I)\cup\mathrm{Ass}_{R\bowtie I}(R)\\&=\mathrm{Ass}_{R\bowtie I}(R)\end{aligned}$$

بنابراین طبق فرض داریم $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_{R\bowtie I}(R)$. همچنین بنابر تمرین ۷-۶ از مرجع [۱۰] نیز داریم که $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})\in\mathrm{Ass}_{R\bowtie I}(R)$، زیرا R یک $R\bowtie I$-مدول با تولید متناهی است.

(ii) از R-همریختی یک به یک $\varphi:R\to R\bowtie I$ داریم $\mathrm{Ass}_R(R)\subseteq\mathrm{Ass}_R(R\bowtie I)$. حال بنا بر فرض داریم $\mathfrak{q}\in\mathrm{Ass}_R(R\bowtie I)$ و طبق تمرین ۷-۶ از مرجع [۱۰] نیز $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(R\bowtie I)$ چنان موجود است که $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})=\mathfrak{q}$.

تعریف ۳-۳- فرض کنید M یک R-مدول با تولید متناهی است. M را جامعاً کوهن-مکالی ماکزیمال می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R)$ داشته باشیم که $M_{\mathfrak{p}}$ یک $R_{\mathfrak{p}}$-مدول کوهن-مکالی ماکزیمال باشد. به‌طور مشابه M را جامعاً کانونیک می‌نامیم هرگاه $R_{\mathfrak{p}}$-مدول $M_{\mathfrak{p}}$، برای هر $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R)$، یک مدول کانونیک باشد.

تعریف ۳-۴- حلقه R را جامعاً (S_n) می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R)$ حلقهٔ $R_{\mathfrak{p}}$ در شرط (S_n) صدق کند.

قضیه ۳-۵- فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقهٔ نوتری R باشد. دراین‌صورت موارد زیر برقرارند.

(i) اگر $R\bowtie I$ یک حلقه جامعاً کوهن-مکالی باشد،

آن‌گاه R نیز این‌چنین است.
(ii) اگر R یک حلقهٔ جامعاً کوهن–مکالی باشد و I نیز یک مدول جامعاً کوهن–مکالی ماکزیمال باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ یک حلقهٔ جامعاً کوهن–مکالی خواهد بود. همچنین اگر R یک حلقهٔ جامعاً گورنشتاین باشد و I نیز یک مدول جامعاً کانونیک باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ یک حلقهٔ جامعاً گورنشتاین خواهد بود.
(iii) اگر R یک حلقه جامعاً شبه گورنشتاین باشد و I نیز یک ایده‌آل جامعاً کانونیک باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ یک حلقهٔ جامعاً شبه گورنشتاین خواهد بود.
(iv) اگر $\mathrm{Ann}_R(I)=0$ و $R \bowtie I$ یک حلقهٔ جامعاً شبه گورنشتاین باشد، آن‌گاه R یک حلقهٔ جامعاً (S_n) خواهد بود.

برهان. تنها قسمت‌های (iii) و (iv) را ثابت می‌کنیم. اثبات بقیه قسمت‌ها به‌صورت مشابه است.
(iii) فرض کنید $\mathrm{p} \in \mathrm{Ass}(R \bowtie I)$. بنابر لم ۳–۲ داریم $\mathrm{q}=\varphi^{-1}(\mathrm{p}) \in \mathrm{Ass}(R)$ و طبق گزاره (ii) ۲–۸ دو حالت زیر را داریم.
حالت (۱)- اگر $I \subseteq \mathrm{q}$، آن‌گاه $(R \bowtie I)_{\mathrm{p}} \cong R_{\mathrm{q}} \bowtie I_{\mathrm{q}}$. حال طبق فرض I_{q} یک ایده‌آل کانونیک و R_{q} یک حلقهٔ شبه گورنشتاین است. بنابراین طبق تذکر ۴–۱ از مرجع [۳] حلقهٔ R_{q} در شرط (S_2) صدق می‌کند. در نتیجه $\widehat{R_{\mathrm{q}}}$ در شرط (S_2) صدق می‌کند. حال طبق قضیه ۳–۳ از مرجع [۳] داریم که $(R \bowtie I)_{\mathrm{p}}$ یک حلقه شبه گورنشتاین است.
حالت (۲)- اگر $I \not\subseteq \mathrm{q}$، آن‌گاه $(R \bowtie I)_{\mathrm{p}} \cong R_{\mathrm{q}}$. بنابراین $(R \bowtie I)_{\mathrm{p}}$ یک حلقهٔ شبه گورنشتاین است.
(iv) فرض کنید $\mathrm{q} \in \mathrm{Ass}(R)$. بنابر لم ۳–۲، $\mathrm{p} \in \mathrm{Ass}(R \bowtie I)$ چنان موجود است که $\varphi^{-1}(\mathrm{p})=\mathrm{q}$.
حال طبق گزاره (ii) ۲–۸ دو حالت زیر را داریم.
حالت (۱)- اگر $I \subseteq \mathrm{q}$، آن‌گاه داریم $(R \bowtie I)_{\mathrm{p}} \cong R_{\mathrm{q}} \bowtie I_{\mathrm{q}}$. همچنین بنا به فرض $R_{\mathrm{q}} \bowtie I_{\mathrm{q}}$ یک حلقه شبه گورنشتاین است. بنابراین طبق قضیه ۳–۳ از مرجع [۳] $\widehat{R_{\mathrm{q}}}$ در شرط (S_2) صدق می‌کند و R_{q} نیز در شرط (S_2) صدق می‌کند.

حالت (۲)- اگر $I \not\subseteq \mathrm{q}$، آن‌گاه داریم $(R \bowtie I)_{\mathrm{p}} \cong R_{\mathrm{q}}$ و در نتیجه R_{q} در شرط (S_2) صدق می‌کند.

گزاره ۳–۶- فرض کنید I ایده‌آلی ناصفر و سره از حلقه کوهن–مکالی R باشد، به‌طوری‌که برای هر $\mathrm{q} \in \mathrm{Ass}(R)$ داشته باشیم که I_{q} یک R_{q}– مدول یکدست است. اگر $R \bowtie I$ یک حلقه جامعاً گورنشتاین باشد، آن‌گاه R نیز جامعاً گورنشتاین خواهد بود.

برهان. توجه داشته باشید که برای هر $\mathrm{q} \in \mathrm{Ass}(R)$ داریم $\dim(R_{\mathrm{q}})=0$، زیرا R کوهن–مکالی است. حال حکم از گزاره‌های ۳–۱ و (iii) ۲–۸ حاصل می‌گردد.

گزاره ۳–۷- فرض کنید $(R,\underline{m})$ حلقه‌ای موضعی و I یک ایده‌آل ناصفر و یکدست از آن باشد. همچنین فرض کنید R کوهن–مکالی نباشد امّا تصویر همریخت یک حلقه موضعی و کوهن–مکالی باشد. دراین‌صورت $R \bowtie I$ یک حلقه تقریباً کوهن–مکالی است اگر و تنها اگر R یک حلقهٔ تقریباً کوهن–مکالی باشد.

برهان. توجه داشته باشید که $\varphi : R \to R \bowtie I$ یک همریختی حلقه‌ای یکدست است. بنابر گزاره ۱–۵ از مرجع [۵] داریم $R \bowtie I / \underline{\mathrm{m}}_0 \cong R / \underline{\mathrm{m}}$ که در آن $\underline{\mathrm{m}}_0=\{(r,r+i) \mid r \in \underline{\mathrm{m}}, i \in I\}$ ایده‌آل ماکزیمال $R \bowtie I$ می‌باشد. بنابراین $R \bowtie I / \underline{\mathrm{m}}_0$ یک حلقه کوهن–مکالی است. حال حکم از قضیه ۶ از مرجع [۱۲] حاصل می‌گردد.

قضیه ۳-۸- فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقهٔ موضعی $(R,\underline{m})$ باشد. دراین‌صورت موارد زیر برقرارند.

(i) اگر R یک حلقه تقریباً گورنشتاین باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ نیز تقریباً گورنشتاین است.

(ii) اگر $R \bowtie I$ گورنشتاین و R یک حلقه جامعاً گورنشتاین باشد، آن‌گاه R یک حلقه تقریباً گورنشتاین خواهد بود.

برهان. (i) فرض کنید $n > 0$ عددی صحیح باشد. طبق فرض ایده‌آل $J \subseteq \underline{m}^n$ چنان موجود است که R/J گورنشتاین است. بنابر گزاره ۱-۵ از مرجع [۵]، $J \bowtie I$ ایده‌آلی از $R \bowtie I$ است و داریم: $\frac{R \bowtie I}{J \bowtie I} \cong \frac{R}{J}$.

به راحتی مشاهده می‌شود که $J \bowtie I \subseteq \underline{m}^n \bowtie I = \underline{m}_0^n$ و در نتیجه $(R \bowtie I)/(J \bowtie I)$ گورنشتاین است.

(ii) بنا بر قضیه ۸-۱ از مرجع [۱] حلقهٔ R کوهن-مکالی و I یک ایده‌آل کانونیک از R است. حال حکم با استفاده از تذکر ۸-۴ از مرجع [۹] حاصل می‌گردد.

نتیجه ۳-۹- فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقه موضعی و جامعاً گورنشتاین R باشد. اگر R کوهن-مکالی با مدول کانونیک باشد، آن‌گاه $R \bowtie I$ یک حلقه تقریباً گورنشتاین می‌باشد.

برهان. بنا بر تذکر ۸-۴ از مرجع [۹]، R حلقه‌ای تقریباً گورنشتاین می‌باشد. حال طبق قضیه (i) ۳-۸ نیز $R \bowtie I$ یک حلقه تقریباً گورنشتاین می‌باشد.

فهرست مراجع

[1] H. Ananthnaragan, L. Avramov, and W. Frank Moore, Connected sums of Gorenstein local rings, arXiv: 1005.1304 v. 2, [math.AC] 10 Feb 2011.

[2] Y. Aoyama, and S. Goto, On the endomorphism ring of the canonical module, J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985), 21-30.

[3] A. Bagheri, M. Salimi, E. Tavasoli, and S. Yassemi, A Construction of quasi-Gorenstein rings, J. Algebra Appl. 11, no. 1(2012), 1250013 (9 pages).

[4] M. D'Anna, A Construction of Gorenstein rings, J. Algebra 306 (2006), no. 2, 507-519

[5] M. D'Anna, C. A. Finocchiaro, and M. Fontana, Amalgamated algebras along on ldeal, arXiv: 0910.174271 [math.AC] (2009)

[6] M. D'Anna, and M. Fontana, An amalgamated duplication of a ring along an ideal, J. Algebra Appl. 6 (3) (2007), 443-459.

[7] E. E. Enochs, and O.M.G. Jenda, Relative Homological Algebra, De Gruyter Expositions in Mathematics, Walter de Gruyter (2000).

[8] S. Goto, Approximately Cohen-Macaulay rings, J. Algebra 76 (1982), no. 1, 214-225.

[9] M. Hochester, Cyclic purity versus purity in excellent Noetherian rings, Trans. Amer. Math. Soc. 231 (1977), no. 2, 463-488.

[10] H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Second ed., Studies in Advanced Mathematics, Vol. 8, University Press, Cambridge, 1989.

[11] E. Platte and U. Storch, Invariant regular differential formen auf Gorenstein- Algebren, Math. Z. 157 (1997), 417-420.

[12] M.R. Pournaki, M. Tousi, and S. Yassemi, Tensor Products of approximately Cohen-Macaulay rings, Comm. Algebra, 34 (2006), 2857-2866.

[13] J. Shapiro, On a construction of Gorenstein rings proposed by M. D'Ann, J. Algebra 323 (2010) 1155-1158.

[14] S. Yassemi, On flat and injective dimension, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, No. 6 (1999), 33-41.