دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

بیشترین مقیاس بهره‌وری در مقایسه با تحقق تقاضا (مطالعه موردی در شرکت‌های بیمه)

مهناز احدزاده نمین*[۱]، الهه خمسه[۱]

[۱] گروه ریاضی، واحد شهر قدس، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۴/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۰/۰۵

چکیده

علم اقتصاد به ظرفیت برنامه‌ریزی با مقیاس اقتصادی وابسته است. اقتصاد دانان ویژگی‌های تابع تولید را بررسی می‌کنند در حالی که مدیریت عملیاتی جامعه بر تحقق تقاضا متمرکز شده است تا از دست دادن فروش یا موجودی از کاهش هزینه‌ها جلوگیری کند و حداکثر سود حاصل شود. با این حال، شرکت‌هایی که کمبود ظرفیت دارند، نیاز به دستیابی به اندازه مقیاس اقتصادی و تقاضای تحقق آن به طور همزمان را دارند، به خصوص زمانی که تقاضای شرکت‌ها متغیر است. اما همیشه میزان تقاضای مشتری برابر با میزان خروجی نیست، میزان تقاضا ممکن است کمتر از ماکزیمم سطح خروجی بیشترین مقیاس بهره وری (MPSS)، بین بیشترین سطح خروجی MPSS و ماکزیمم سطح خروجی‌ها ویا بزرگتر از ماکزیمم سطح خروجی‌ها باشد. در این مقاله قصد داریم متناسب با هر سه سناریو عنوان شده سطح تقاضا، بیشترین مقیاس بهره‌وری را در مقایسه با تقاضای محقق شده برای شرکت‌های فعال بیمه در سال ۱۳۹۶ بیابیم. در واقع، کاربردی ازمقاله لی (۲۰۱۶) را در شرکت‌های بیمه در کشور ایران بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، بیشترین مقیاس بهره‌وری، تقاضا، تحلیل تصمیم‌گیری چند هدفه (MODA).

---

* عهده‌دار مکاتبات: Email: Ahadzadehnamin@yahoo.com

۱- مقدمه

ظرفیت یک سیستم به عنوان حداکثر تعداد واحدهایی که سیستم می‌تواند در یک زمان معین تولید شود (ناهمایس،۲۰۰۹)، تعریف می‌شود. هدف برنامه‌ریزی ظرفیت، ارائه عرضه دقیقاً مطابق با سطح تقاضا است. از آنجا که سرمایه‌گذاری غیرقابل برگشت یا پر هزینه است با توجه به نوسانی بودن ماهیت تقاضا، برنامه‌ریزی ظرفیت یک مسئله پیچیده است (آبل و همکاران، ۱۹۹۶). یکی از مسائل مهم مربوط به تصمیم‌گیری در مورد برنامه‌ریزی ظرفیت آنست که، آیا باید برنامه‌ریزی ظرفیت در مقیاس اقتصادی شرکت یا درتحقق تقاضا پایه گذاری شود؟ در اقتصاد گوییم که تعیین مقیاس بهینه، به ویژه، بیشترین مقیاس بهره وری (MPSS)، بیان کننده نقطه به حداکثر رساندن نسبت کل خروجی به کل ورودی است، این نقطه مزیت بالقوه هزینه را نشان می‌دهد، زیرا هزینه‌های ثابت بر روی واحدهای با بیشترین خروجی گسترش می‌یابد. هنگامی که افزایش اندازه مقیاس و محصول متوسط تولیدی پس از نقطه MPSS کاهش می‌یابد (بانکر، ۱۹۸۴). MPSS، روی رویه کارای مجموعه امکان تولید (PPS)[1] شناسایی می‌شود، که توسط تابع تولید تعریف می‌شود. تابع تولید عملکرد مجموعه‌ای از ورودی‌هایی که مقدار آن خروجی، حداکثر ممکن برای یک مجموعه داده ورودی‌ها است را نشان می‌دهد. این تابع نامنفی و غیر افزایشی است که خروجی صفررا وقتی که همه ورودی‌ها صفر است می‌دهد (سولی و همکاران، ۲۰۰۵). بنکر (۱۹۸۴) MPSS را برای ورودی‌ها و خروجی‌های مرکب داده شده در اندازه مقیاس تعریف کرد بطوریکه در آن خروجی‌های تولید شده در هر واحد از ورودی، حداکثر شود. او نشان داد که MPSS معادل با الگوی کارا روی مرز بازده به مقیاس ثابت (CRS)[2] می‌باشد، یعنی وقتی که تمام ورودی‌ها افزایش می‌یابد، به همان نسبت خروجی‌ها نیز افزایش یابند. فرض کنید $x \in \Re^+$ نشان دهنده بردار ورودی و $y \in \Re^+$ بردار خروجی سیستم تولید را نشان دهد. مجموعه‌ی تولید را $T = \{(x,y) | x$ بتواند y تولیدکند را$\}$ تعریف می‌کنیم. بر اساس تعریف بنکر، نقطه $(x,y) \epsilon T$ یک MPSS است اگر و تنها اگر برای هر $(ax,by) \in T$ داشته باشیم $a \geq b$ (بنکر و همکاران (۲۰۰۴) و خدابخشی (۲۰۰۹)). به عبارت دیگر، برای مقادیر کوچکی از ورودی محصول حاشیه‌ای ممکن است افزایش یابد، اما برای مقادیر ورودی باید بیش از هر مقدار در MPSS باشد (لی و جانسون،۲۰۱۳). روش دگرین زوو (2000) می‌تواند شناسایی بزرگترین MPSS یا کوچکترین MPSS را کنترل کند (فوکویاما ،۲۰۰۳). لی (۲۰۱۶) در مقاله خود در مورد ظرفیت معضل بین MPSS و تقاضا با ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)[3] و تحلیل تصمیم‌گیری چند هدفه (MODA)[4] برای توسعه یک راه حل مصالحه‌آمیز می‌پردازد. آنها یک هدف را روی تابع تولید در نظر می‌گیرند و به سمت تصمیم‌گیری‌های برنامه‌ریزی ظرفیت، هدایت می‌کنند. بده بستان بین استراتژی MPSS (هزینه گرایی) و استراتژی تقاضا (درآمدگرا) اولویت ریسک تصمیم‌گیرنده را نشان می‌دهد. در این پژوهش کاربردی ازمقاله لی (۲۰۱۶) را در شرکت‌های بیمه در کشور ایران مورد بررسی قرار داده‌ایم.

در بخش ۲، مبانی نظری مورد نیاز را بیان خواهیم کرد که شامل مباحثی از تحلیل پوششی داده‌ها و خلاصه‌ای از مقاله لی (۲۰۱۶) که به صورت یک الگوریتم بیان خواهد شد، می‌باشد. در بخش۳، مثالی کاربردی از شرکت‌های فعال بیمه را بررسی خواهیم کرد. در انتها بخش نتیجه‌گیری بیان خواهد شد.

۲- مبانی نظری تحقیق

در این بخش ابتدا بصورت مختصر مدل‌های مورد استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها را بیان خواهیم کرد و سپس بیشترین مقیاس بهره وری در مقایسه با تحقق تقاضا که در مقاله لی(۲۰۱۶) به آن پرداخته شده است را شرح خواهیم داد.

---

1. Production Possibility Set
2. Constant Returns to Sale
3. Data Envelopment Analysis
4. Multi Objective Decision Analysis

۲-۱- تحلیل پوششی داده‌ها

تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی بر مبنای برنامه‌ریزی ریاضی برای تعیین کارایی مجموعه‌ی از واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی متجانس با چند ورودی و چند خروجی است و واحدهای کارا و ناکارا مشخص می‌شوند. در یک واحد کارا ممکن است بتوان با افزایش مقادیر ورودی‌ها، مقادیر خروجی‌ها را افزایش داد. افزایش مقادیر ورودی‌ها به یک نسبت ممکن است موجب افزایش مقادیر خروجی‌ها به نسبت کمتر، مساوی یا بیشتر گردد. افزایش مقادیر خروجی‌ها به نسبت کمتر به صرفه نیست. اگر افزایش مقادیر خروجی‌ها به نسبت بیشتر از ورودی‌ها باشد، مسلماً ادامه‌ی افزایش ورودی تا جایی به صرفه است که موجب افزایش مقادیر خروجی‌ها به نسبت بیشتر یا مساوی گردد.

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری (DMU) وجود دارد. هر $DMU_j(\mathrm{j}=1,\dots,\mathrm{n})$، با استفاده از m ورودی x_{ij} $(\mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{m})$، s خروجی y_{rj} $(\mathrm{r}=1,\dots,\mathrm{s})$ را تولید می‌کند.

تعریف۲-۱: مجموعۀامکان تولید

(PPS) را با T نشان داده و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{T}=\{(\mathrm{x},\mathrm{y})|\text{را تولید نماید } y\geq 0 \text{ ، بتواند } x\geq 0\}$$

مشاهده می‌شود که مجموعه امکان تولید T زمانی مشخص می‌شود که تابع تولید شناخته شده باشد. در حالت کلی تابع تولید در دسترس نیست، لذا اصول زیر را جهت تعریف مجموعه امکان تولید T می‌پذیریم، که هم چنین برای معرفی مدل‌های متفاوت از این اصول روی مجموعه امکان تولید T استفاده می‌شود.

اصل ۱: غیر تهی بودن (اصل شمول مشاهدات)[1]: به ازای هر $j=1,\dots,n$ $(x_j,y_j)\in T$.

اصل ۲: (اصل تحدب)[2]: اگر $(x_1,y_1)\in T$ و $(x_2,y_2)\in T$ آنگاه به ازای هر $\gamma\in(0,1)$

$\gamma(x_1,y_1)+(1-\gamma)(x_2,y_2)\in T.$

اصل ۳: (اصل ناکارایی ورودی)[3]: اگر $(x,y)\in T$ و $\hat{x}\ \geq x$ آنگاه $(\hat{x},y)\in T$.

اصل ۴: (اصل ناکارائی خروجی)[4]: اگر $(x,y)\in T$ و $\hat{y}\leq y$ آنگاه $(x,\hat{y})\in T$.

اصل ۵: بازده به مقیاس ثابت (اصل بی کرانی اشعه)[5]: اگر $(x,y)\in T$ آنگاه به ازای هر $\alpha\geq 0$، $(\alpha x,\alpha y)\in T$.

اصل ۶: (اصل انقباض)[6]: اگر $(x,y)\in T$ آنگاه به ازای هر $0\leq\alpha\leq 1$، $(\alpha x,\alpha y)\in T$.

اصل ۷: (اصل انبساط)[7]: اگر $(x,y)\in T$ آنگاه به ازای هر $\alpha\geq 1$، $(\alpha x,\alpha y)\in T$.

اصل ۸: (اصل کمینه برون یابی)[8]: T اشتراک همه $\widehat{T}$هایی است که در اصول ۱، ۲ و تعدادی از اصول ۳ و ۴ بالا صدق می‌کند.

لم۲-۱: مجموعه T_{CCR} در اصول ۱، ۲، ۳، ۴ ، ۵ و ۸ صدق می‌کند، اگر و فقط اگر

$$T_C=T_{CCR}=\{(x,y)|\ x\ \geq\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\ x_j,\ \ y\leq\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\, y_j,\ \gamma_j\geq 0,\ \ j=1,\dots,n\}$$

لم۲-۲: مجموعه T_{BCC} در اصول ۱، ۲، ۳، ۴، ۸ صدق می‌کند، اگر و فقط اگر

$$T_V=T_{BCC}=\{(x,y)|\ x\geq\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\ x_j,\ \ y\leq\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\, y_j\ ,\ \gamma_j\geq 0,\ \ j=1,\dots,n\}$$

1. Ordinary postulate
2. Convexity postulate
3. Input inefficiency postulate
4. Output inefficiency postulate
5. Ray unboundness postulate
6. Contraction postulate
7. Expansion postulate
8. Minimum extrapolation postulate

تعریف۲-۲- غالب بودن

DMU_o را بر DMU_j غالب گوییم، هرگاه شرایط زیر موجود باشد:

$$\begin{pmatrix} -x_j \\ y_j \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

به عبارت دیگر امکان تولیدی با ورودی کمتر یا مساوی ورودی DMU_j که خروجی بیشتر یا مساوی خروجی DMU_j تولید کند وجود داشته باشد به قسمی که لااقل در یک مولفه از ورودی‌ها و یا خروجی‌ها نامساوی به صورت اکید برقرار باشد.

۲-۲- بیشترین مقیاس بهره‌وری در مقایسه با تحقق تقاضا

لی (۲۰۱۶)، در مقاله خود بیشترین مقیاس بهره‌وری (MPSS) در مقایسه با تحقق تقاضا (DFMPSS) مورد مطالعه قرار داده‌اند. اگر D_K نشان دهنده تقاضای پیش‌بینی شده باشد. جهت رسیدن به این منظور از الگوریتم زیر که برگرفته از مقاله لی (۲۰۱۶) می‌باشد، استفاده خواهیم کرد.فرض بر این است که $s = 1$ باشد، یعنی DMU_j تک خروجی باشد.

الگوریتم: گام (۱). نقاط $MPSS$ را بیابید ($MPSS$ نشان دهنده الگوی کارا در مرز بازده به مقیاس ثابت می‌باشد). فرض کنید $j = 1, \dots, n_1$ تعداد نقاط MPSS باشد.

گام (۲). مدل BCC را حل کنید.

(۱)

$$D^{VRS}(x, y) = \text{Min } \theta$$
$$\text{s.t. } (\theta x, y) \in T^{VRS}$$
$$0 < \theta \leq 1$$

که در آن

(۲)

$$T^{VRS} = \{(x, y) | \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}\}$$

$(\theta_k^{*VRS} x_k, y_k)$ نشان دهنده الگوی کارای شرکت k-ام می‌باشد، که θ_k^{*VRS} جواب بهینه مدل (۱) می‌باشد.

گام (۳). قرار دهید:

$$۱. MPSS^{Max} = \{(x^M, y^M) | y^M = Max \{y \; | (x, y) \in MPSS\} \qquad (۳)$$

$$۲. y^{Max} = \{(x^p, y^p) | y^p = Max \; \{y \; |(x, y) \in T^{VRS}\} \qquad (۴)$$

۳. قرار دهید D_k تقاضای پیش بینی شده شرکت k-ام.

۴. D_f تقاضای محقق شده.

جهت محاسبه $MPSS^{Max}$ و y^{Max} از مدل‌های زیر استفاده می‌کنیم.

فرض کنید

$$MPSS = \{(x_1^{MPSS}, y_1^{MPSS}), \dots, (x_{n_1}^{MPSS}, y_{n_1}^{MPSS})\}$$

مجموعه نقاط MPSS باشد. (X_k^{MPSS}, y_k^{MPSS}) نشان دهنده آنست که شرکت k-ام بیشترین مقیاس بهره وری را دارد. آشکارا $MPSS^{Max}$ شامل نقاطی مانند

$$\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j (x_{ij}^{MPDSS}, y_j^{MPDSS})$$

که در آن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیری می‌باشند که در مدل (۵) صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned} y^M &= Max \quad y \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^{MPSS} \geq y \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad (۵) \\ & \lambda_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

جهت یافتن جواب منحصربفرد $MPSS^{Max}$ کافی است قید

$$\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j x_{ij}^{MPSS} = x_i$$

را به مدل (۵) اضافه کنیم و تابع هدف را با

$$Max\ My - \sum_{i=1}^{m} x_i$$

جایگزین کنیم. اگر قیمت ورودی معلوم باشد و c_i نشان دهنده هزینه ورودی باشد می‌توان تابع هدف مدل قبل را با

$$Max\ My - \sum_{i=1}^{m} c_i\, x_i$$

جایگزین کرد که در آن M نشان دهنده یک عدد مثبت بسیار بزرگ است. برای تخمین y^{Max} از مدل زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & y^p = Max\quad y \\ & s.t.\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_j \geq y \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\ ,\ \lambda_j \geq 0,\ j = 1,\dots,n \end{aligned} \qquad (۶)$$

به طور مشابه جهت یافتن جواب منحصربفرد y^{Max} کافی است قید

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = x_i\ \ , i = 1,\dots,m$$

را به قیود مدل (۶) اضافه کنیم و تابع هدف را به صورت

$$Max\ \ My - \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

در نظر بگیریم.

گام (۳): برای تعیین $MPSS^{Max}$ و y^{Max} وقتی پیش‌بینی سطح تقاضای D_k مفروض است، یکی از سه سناریو زیر ممکن است رخ دهد. در واقع به دنبال یافتن بیشترین بهره وری سطح تقاضای محقق شده (MPSSDF) می‌باشیم.

حالت اول: $D_k \leq y^M$ (سطح خروجی $MPSS^{Max}$ بزرگتر از سطح تقاضای پیش بینی شده). مدل (۷) را حل کنید.

$$\begin{aligned} & Min \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \\ & s.t. \quad \sum_{j=1}^{n1} \lambda_j x_{ij}^{MPSS} \leq x_i\ , \\ & \qquad i = 1,\dots,m \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n1} \lambda_j\, y_j^{MPSS} = D_k \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n1} \lambda_j = 1 \\ & \qquad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1,\dots,n1 \\ & \qquad x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,m \end{aligned} \qquad (۷)$$

بطور مشابه اگر قیمت ورودی مشخص باشد می‌توان تابع هدف را با $\sum_{i=1}^{m} c_i x_i$ تعویض کرد. فرض کنید $X^{MPSSDF} = (x_1^{MPSS-DF}, \dots, x_m^{MPSS-DF})$

جواب بهینه مدل (۷) باشد در این صورت $MPSSDF = (X^{MPSSDF}, y^{MPSSDF})$.

حالت دوم: $y^M \leq D_k \leq y^p$ (سطح تقاضای پیش بینی شده بزرگتر با مساوی سطح خزوجی y^{Max} و کوچکتر مساوی سطح خروجی $MPSS^{Max}$ می‌باشد). در واقع هدف بده بستان بین $MPSS^{Max}$ و نزدیکترین سطح تقاضای پیش‌بینی شده تا $MPSS^{Max}$ $(DFcMPSS^{Max})$ می‌باشد. قرار دهید

$$DFcMPSS^{Max} = \{(x_i^D, y^D)\}$$

که یک جواب بهینه مدل (۸) می‌باشد.

$$\begin{aligned} Min \quad & \sum_{i=1}^{m}(x_i^M - x_i)^2 + (y^M - D_r)^2 \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \le x_i, \qquad i=1,\dots,m \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j = D_r \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \ge 0, \qquad j=1,\dots,n \\ & x_i \ge 0, \qquad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن $y^D = D_r$ و نقطه $(x_1,\dots,x_m,y^D)$ باید در تمام محدودیت‌ها صدق کند بطوریکه هر x_i به اندازه کافی نزدیک به نقاط $MPSS^{Max}$ باشد. می‌توان از جمله $(y^M - D_r)^2$ چشم پوشی کرد و با توجه به اینکه

$$|x_i^m - x_i| = x_i^+ + x_i^-, \quad x_i = x_i^m - x_i^+ + x_i^-$$

مدل (۸) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} Min \quad & \sum_{i=1}^{m}(x_i^+ - x_i^-) \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \le x_i^M - x_i^+ + x_i^-, \\ & i=1,\dots,m \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j = D_r \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \ge 0, \qquad j=1,\dots,n \\ & x_i \ge 0, \qquad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۹}$$

توجه کنید که اگر قیمت ورودی‌ها معلوم و برابر b_i باشد می‌توان تابع هدف را با $\sum_{i=1}^{m} b_i(x_i^+ + x_i^-)$ تعویض کرد.

فرض کنید w پارامتر بده بستان باشد ترکیب محدب بین $MPSS^{Max}$ و $DFcMPSS^{Mxz}$ که در آن $w \in [0,1]$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} Con\ MD &= (x_i^{MD}, y^{MD}) \\ &= (wx_i^m + (1-w)x_i^D, wy^M + (1-w)y^D) \end{aligned} \tag{۱۰}$$

آشکارا اگر $w = 0$ آنگاه

$$Con\ MD = DFcMPSS^{Max}$$

اگر $w = 1$ آنگاه

$$Con\ MD = MPSS^{Max}$$

می‌توان کاندیدای هدف روی مرز را با استفاده از تابع فاصله جهت دار تخمین زد (چنبرز و همکاران (۱۹۹۶)).
فرض کنید $\hat{\theta}$ اندازه کارایی باشد وقتی جهت به صورت $(x_i^{MD} - x_{ir}, y^{MD} - y_r)$ در نظر گرفته شده باشد. جهت این منظور مدل (۱۱) را حل کنید.
جواب تقریبی که با $s(t)$ نشان می‌دهیم طی گام‌های زیر ساخته می‌شود.

$$\begin{aligned} Min \quad & \theta^{\wedge} \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \le x_{ir} + \theta^{\wedge}(x_i^{MD} - x_{ir}), \qquad i=1,\dots,m \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j \ge y_r + \theta^{\wedge}(y^{MD} - y_r) \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \ge 0, \qquad j=1,\dots,n \\ & \theta^{\wedge} \ge 0, \end{aligned} \tag{۱۱}$$

کاندیدای هدف بصورت

$$(x_{ir} + \hat{\theta}^*(x_i^{MD} - x_{ir}), y_r + \hat{\theta}^*(y^{MD} - y_r)) \tag{۱۲}$$

تعریف می‌شود که در آن $\hat{\theta}^*$ جواب بهینه مدل (۱۱) می‌باشد.

حالت سوم: $D_k > y^p$ (سطح تقاضای پیش‌بینی شده بزرگتر از خروجی y^{Max} می‌باشد)

این حالت مشابه با حالت دوم می‌باشد با این تفاوت که شرکت r–ام دارای مجموعه ای از اهداف است که بده بستان بین $MPSS^{Max}$ و y^{Max} است. قرار دهید:

(۱۳)

$$Con\ My = (x_i^{My}, y^{My}) = (wx_i^m + (1-w)x_i^p, wy^M + (1-w)y^p)$$

که ترکیب محدب بین $\mathrm{MPSS}^{\mathrm{Max}}$و y^{Max} می‌باشد.

کاندیدای هدف به صورت

(۱۴)

$$(x_{ir} + \theta^{\wedge **}(x_i^{MD} - x_{ir}), y_r + \theta^{\wedge **}(y^{MD} - y_r))$$

محاسبه می‌شود که در آن $\theta^{\wedge **}$ جواب بهینه مدل (۱۱) با جابجایی $Con\ MD = (x_i^{MD}, y^{MD})$ با $Con\ My = (x_i^{My}, y^{My})$ می‌باشد.

۳-مثال عددی

یکی از بخش‌هایی که دراقتصاد وظایف مهمی را برعهده دارد، صنعت بیمه است. نگاهی به افزایش سرمایه‌های بین‌المللی و نیز، توجه به گردش چرخ‌های اقتصادی نشان دهنده این واقعیت است که همگی متکی به تضمین‌های ناشی از بیمه هستند. اهمیت توجه به صنعت بیمه از بعد اقتصادی را می‌توان با بیان نقش بیمه به عنوان یک موسسه تامین امنیت و جبران خسارت و همچنین، نقش بیمه به عنوان یک موسسه سرمایه گذاری و کمک به روند رشد اقتصادی، در نظر گرفت. در این بخش به بررسی ۲۲ شرکت بیمه فعال در بورس اوراق بهادار ایران در سال ۱۳۹۶ خواهیم پرداخت که اسامی آنها در جدول (۱) آورده شده است. قصد داریم بیشترین مقیاس بهره‌وری را برای شرکت بیمه حافظ بیابیم بطوری که پیش‌بینی خالص درآمدها مفروض باشد نیاز به دستیابی به اندازه مقیاس اقتصادی و تقاضای تحقق آن به طور همزمان می‌باشد، به خصوص زمانی که تقاضای شرکت‌ها متغیر است.

جدول (۱): شرکت‌های بیمه مورد مطالعه

ردیف	نام شرکت	ردیف	نام شرکت
۱	بیمه ما	۱۲	بیمه سینا
۲	بیمه آسیا	۱۳	بیمه البرز
۳	بیمه پارسیان	۱۴	بیمه نوین
۴	بیمه دانا	۱۵	بیمه سرمد
۵	بیمه حافظ	۱۶	بیمه تعاون
۶	بیمه دی	۱۷	بیمه میهن
۷	بیمه رازی	۱۸	بیمه کوثر
۸	بیمه ملت	۱۹	بیمه آرمان
۹	بیمه کارآفرین	۲۰	بیمه زندگی خاورمیانه
۱۰	بیمه اتکائی امین	۲۱	بیمه سامان
۱۱	بیمه اتکائی ایرانیان	۲۲	بیمه پاسارگاد

جهت ارزیابی این شرکت‌ها ۴ شاخص ورودی و یک شاخص خروجی به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

شاخص‌های ورودی:

۱- سرمایه ۲- هزینه کارمزد و کارمزد منابع اتکایی
۳- هزینه اداری ۴- هزینه‌های عمومی و اداری

شاخص خروجی: خالص درآمدها

فرض کنید تقاضای پیش‌بینی شده شرکت ۵-ام (بیمه حافظ) برابر D_5 باشد، این مقدار میزان تقاضای پیش بینی شده شاخص خالص درآمد است. تغییرات D_5 به صورت

الف) $D_5 = 400000$ ب) $D_5 = 500000$
ج) $D_5 = 650000$

پیش‌بینی شده باشد.جهت یافتن مقیاس بهره‌وری (MPSS) در مقایسه با تحقق تقاضا (DFMPSS) از الگوریتم ارائه شده در بخش قبل استفاده خواهیم کرد.

مرحله (۱): مدل (۱) و مدل (۱) با حذف محدودیت

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

را اجرا می‌کنیم، که مقدار کارایی CRSوVRS همه واحدها را خواهد داد که نتایج آن در جدول (۲) آورده شده است.

مرحله (۲): با توجه به جدول (۲)، واحدهای MPSS در بین ۲۲ شرکت بیمه مورد مطالعه بصورت زیر می‌باشند.

$$MPSS = \{DMU_1, DMU_{10}, DMU_{20}\}$$

مرحله (۳): با بکار بردن گام (۳) الگوریتم، $MPSS^{\mathrm{Max}}$ و $\mathrm{y}^{\mathrm{Max}}$ به صورت زیر می‌باشند.

$$MPSS^{MAX} = (X^M, y^M)$$
$$= (x_1^M, x_2^M, x_3^M, x_4^M,\ y^M)$$
$$= (2030000, 103212, 32487, 21011, 43050000)$$
$$y^{MAX} = (X^P, y^P)$$
$$= (x_1^P, x_2^P, x_3^P, x_4^P,\ y^P)$$
$$= (2551500, 2337044, 1204614, 1204614, 593600)$$

مرحله ۴: با توجه به مقدار D_5 (تقاضای پیش‌بینی شده شاخص خالص درآمد برای شرکت بیمه حافظ) سه حالت زیر را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

الف) $\mathrm{D}_5 \leq \mathrm{y}^{\mathrm{M}}$ (که در آن $\mathrm{D}_5 = 400000$
$\mathrm{y}^{\mathrm{M}} = 452400$, می باشد)

با اجرای مدل (۷) واحد MPSSDF به صورت زیر می‌باشد.

$$MPSSDF = (X^{DF}, y^{DF})$$
$$= (x_1^{DF}, x_2^{DF}, x_3^{DF}, x_4^{DF},\ y^{DF})$$
$$= (1800000, 91000, 29000, 19000, 400000)$$

ب) $\mathrm{y}^{\mathrm{M}} \leq \mathrm{D}_5 \leq \mathrm{y}^{\mathrm{P}}$ (که در آن $\mathrm{D}_5 = 500000$,
$\mathrm{y}^{\mathrm{M}} = 452400$ و $\mathrm{y}^{\mathrm{P}} = 593600$ می باشد)

با توجه به گام (۳) الگوریتم و حل مدل (۹) داریم:

$$X^+ = (0,0,0,0)$$
$$X^- = (350000, 120000, 160000, 180000)$$

بطورخلاصه جدول (۳) را خواهیم داشت.

جدول (۲): کارایی شرکت‌های بیمه

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
کارایی CRS	1	0.34095	0.06154	0.20505	0.08333	0.16395	0.37453	0.81387	0.42125	1	0.62541
کارایی VRS	1	0.34622	0.0921	0.24861	1	0.19365	0.39129	1	0.45182	1	0.6348
DMU	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
کارایی CRS	0.30358	0.09518	0.19167	0.52036	0.75481	0.2591	0.50948	0.12499	1	0.59322	0.7855
کارایی VRS	0.3486	0.1097	0.30371	0.53842	0.91311	0.33711	0.53525	0.2125	1	0.62984	1

جدول۳: نتایج حاصل از مدل (۹)

X^+	0	0	0	0
X^-	350000	120000	160000	180000
X^D	2380000	223212	192487	201011
X^M	2030000	103212	32487	21011

بنابراین طبق تعریف $DFcMPSS^{Max}$ داریم:

$$DFcMPSS^{Max} = (X^D, y^D) = (x_1^D, x_2^D, x_3^D, x_4^D,\ \ y^D) = (2380000,223212,192487,201011,500000)$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$Con\ MD = (X^{MD}, y^{MD}) = (x_1^{MD}, x_2^{MD}, x_3^{MD}, x_4^{MD},\ \ y^{MD}) = (\mathrm{W}x_1^M + (1-W)x_1^D, \dots, \mathrm{W}x_4^M + (1-W)x_4^D, \mathrm{W}y_1^M + (1-W)y_1^D)$$

که در آن $0 \le W \le 1$. با فرض $\mathrm{W} = 0.5$ داریم:

$$Con\ MD = (2205000,\ \ 163212,\ \ 112487,\ 111011,\ 476180)$$

با توجه به $Con\ MD$ بیان شده، مدل (۸) را اجرای می‌کنیم که نتایج آن که شامل مقدار $\theta^{\wedge *}$ می‌باشد که در ستون دوم جدول (۴) آورده شده است.

بنابراین کاندیدای هدف DMU_5 به صورت زیر می‌باشد.

$$\overline{DMU}_5 = (2201548,\ 162980.4,\ 112424.3,\ 110950.6,\ 475415.7781)$$

ج) $\mathrm{D}_5 > \mathrm{y}^\mathrm{P}$ که

در $\mathrm{D}_5 = 650000 \quad , \quad \mathrm{y}^\mathrm{P} = 593600$ می باشد)

این حالت مشابه با حالت قبل است با این تفاوت که $Con\ My$ جایگزین $Con\ MD$ می‌شود. $Con\ My$ به ازای $\mathrm{W} = 0.5$ به صورت زیر می‌باشد.

$$Con\ MY = (X^{My}, y^{My}) = \left(x_1^{My}, x_2^{My}, x_3^{My}, x_4^{My},\ \ y^{My}\right) = \left(\mathrm{W}x_1^M + (1-W)x_1^p, \dots, \mathrm{W}x_4^M + (1-W)x_4^p, \mathrm{W}y_1^M + (1-W)y_1^p\right) = (2290750, 1220128, 618550.5, 612812.5, 522980)$$

با توجه به مقایر $Con\ My$ تولید شده فوق و اجرای مدل (۱۱) می‌توان مقادیر $\theta^{\wedge **}$ را محاسبه کرد که نتایج آن در ستون سوم جدول (۴) آورده شده است. کاندیدای هدف DMU_5 به صورت زیر می‌باشد.

$$\overline{DMU}_5 = (2290928,\ \ 1220224.059,\ 618594.1,\ 612855.6,\ 523021.7)$$

که نشان دهنده بیشترین مقیاس بهره‌وری شرکت بیمه حافظ در مقایسه با تحقق تقاضا برای این شرکت می‌باشد.

جدول(۴): اندازه کارایی

DMU	$\boldsymbol{\theta}^{\wedge *}$	$\boldsymbol{\theta}^{\wedge **}$
1	0.99231	1.00025
2	0.99919	1.00005
3	0.99921	1.00003
4	0.99911	1.00005
5	0.99839	1.00008
6	0.99851	1.00005
7	0.99826	1.00007
8	0	1.00046
9	0.99887	1.00008
10	0	2.00059
11	0.99478	1.00011
12	0.9986	1.00007
13	0.99927	1.00003
14	0.99874	1.00007
15	0.99793	1.00008
16	0.9984	1.00009
17	0.99829	1.00007
18	0.99835	1.00009
19	0.99849	1.00006
20	0.99767	1.00011
21	0.99853	1.00008
22	0	2

۴- نتیجه‌گیری

از آنجایی که شرکت‌های فعال بیمه بورس اوراق بهادار کمبود ظرفیت دارند، نیاز به دستیابی به مقیاس اقتصادی و تقاضای محقق آن به طور همزمان را دارند. اما همیشه میزان تقاضای این شرکت‌ها برابر با میزان خروجی نیست. در این مقاله به بررسی ۲۲ شرکت بیمه فعال در بورس اوراق بهادار پرداخته‌ایم، برای یافتن بیشترین مقیاس بهره‌وری زمانی که پیش‌بینی سطح شاخص درآمد کل مفروض می‌باشد که شامل سه سناریو می‌باشد که هر یک مورد بررسی قرار گرفته است و بیشترین مقیاس بهره‌وری در مقایسه با تحقق تقاضا محاسبه شده است.

فهرست منابع

[1] Abel, A. B., &Eberly, J. C. (1996).Optimal investment with costly reversibility.Review of Economic Studies, 63, 581–593.

[2] Banker, R. D. (1984) Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 17(1), 35–44.

[3] Banker, R. D., Cooper, W. W., Seiford, L. M., Thrall, R. M., & Zhu, J. (2004).Returns to scale in different DEA models. European Journal of Operational Research, 154, 345–362.

[4] Chambers, R. G., Chung, Y., &Färe, R. (1996). Benefit and distance functions. Journal of Economic Theory, 70 (2), 407–419.

[5] Coelli, T. J., PrasadaRao, D. S., O'Donnell, C. J., &Battese, G. E. (2005).An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. 2nd ed., New York: Springer.

[6] Fukuyama, H. (2003). Scale characterizations in a DEA directional technology distance function framework. European Journal of Operational Research, 144 (1), 108–127.

[7] Khodabakhshi, M. (2009). Estimating most productive scale size with stochastic data in data envelopment analysis. Economic Modelling, 26 (5), 968–973.

[8] Lee, C.-Y., & Johnson, A. L. (2013).Operational Efficiency.Edited in: Badiru, A. B.,

[9] Handbook of Industrial and Systems Engineering, 2nd edition, 17–44, CRC Press.

[10] Lee, C-Y.(2016). Most Productive Scale Size versus Demand FulÞllment: A Solution to the Capacity Dilemma , European Journal of Operational Research ,Vol. 248, No. 3, pp. 954-962.

[11] Zhu, J. (2000). Setting scale efficient targets in DEA via returns to scale estimation method. Journal of the Operational Research Society, 51, 376–378.

[12] Nahmias, S.(2009). Production and Operations Analysis.6th edition, McGraw-Hill/Irwin.