دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مدل جدید غیر ماهیتی جهت محاسبه کارایی واحدهای تصمیم گیری در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر

منصور شریفی[۱]، قاسم توحیدی[*۲]، بهروز دانشیان[۳]، فرزین مدرس خیابانی[۴]

[۱ و ۴] گروه ریاضی کاربردی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
[۲ و ۳] گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله:۹۶/۱۱/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله:۹۷/۰۶/۲۵

چکیده

در ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده توسط مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، ماهیت داده‌ها از نقطه نظر ورودی یا خروجی بودن معلوم می‌باشد. در مسائل واقعی داده‌هایی وجود دارند که در مورد تعیین ماهیت آنها اختلاف نظر وجود دارد. برخی واحدهای تصمیم گیری برای حصول مقدار کارایی بالاتر آنها را به عنوان ورودی و بعضی دیگر خروجی در نظر می‌گیرند، این داده‌ها به متغیرهای انعطاف‌پذیر معروفند. مدل‌های متفاوتی در زمینه پارامتری و غیرپارامتری برای دسته‌بندی چنین داده‌هایی ارائه شده است. در اکثر مدل‌های ماهیتی (ورودی یا خروجی محور) ارائه شده جهت تشخیص ماهیت داده‌های انعطاف‌پذیر، ماهیت‌های متفاوت از یک مدل می‌تواند نتایج متفاوتی در تعیین ماهیت عامل انعطاف‌پذیر حاصل کند. در مدل‌های غیر ماهیتی نیز از مقدار M جهت انتخاب محدودیت اصلی و حذف محدودیت زائد بهره گرفته شده است، در این مدل‌ها با انتخاب مقادیر متفاوت برای مقدار M نتایج متفاوتی در تعیین ماهیت عامل انعطاف‌پذیر، مقدار کارایی و بازده به مقیاس واحدهای تصمیم‌گیری حاصل می‌شود. به منظور رفع این مسایل در DEA یک مدل بدون ماهیت پیشنهاد می‌شود که علاوه بر تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر می‌تواند خطای محاسباتی و مشکلات ناشی از حضور M بزرگ را در مدل مرتفع سازد. مزیت‌های مدل پیشنهادی نسبت به سایر مدل‌ها با یک مثال تجربی مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: کارایی، DEA، متغیرهای انعطاف‌پذیر.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: ghatohidi@yahoo.com

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها شاخه‌ایی از تحقیق در عملیات و یکی از مهمترین ابزارهای مدیریت جهت اتخاذ تصمیم می‌باشد که به بررسی و ارزیابی کارایی واحدهای مشابه می‌پردازد. تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های قطعی ابتدا توسط چارنز و همکارانش در سال ۱۹۷۸ تحت عنوان مدل CCR معرفی گردید[۱]. سپس توسط بنکر و همکارانش در سال ۱۹۸۴ با ارائه مدلی تحت عنوان مدل BCC توسعه یافت[۲]. توان بالای تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی کارایی و ویژگی‌های خاص این شاخه، سبب شده است در بسیاری از حوزه‌های مختلف از صنایع مانند صنعت نفت وگاز، بیمارستان‌ها و بانک‌ها مورد استفاده قرارگیرد. در روش‌های رایج تحلیل پوششی داده‌ها، ماهیت داده‌ها از نقطه نظر ورودی یا خروجی بودن مشخص است. اما داده‌هایی وجود دارند که ورودی و خروجی بودن آنها از قبل مشخص نیست و باید محوریت ورودی یا خروجی بودن آنها قبل از به کارگیری این داده‌ها در مدل های ارزیابی کارایی تعیین شوند. این داده‌ها اولین بار توسط کوک و ژو تحت عنوان متغیرهای انعطاف‌پذیر معرفی شدند[۳]. کوک و ژو برای تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر و محاسبه کارایی آنها مدلی بر پایه فرم مضربی مدل CCR ارائه دادند[۳]. طلوع ادعا کرد که مدل پیشنهادی کوک و ژو به دلیل استفاده از عدد بسیار بزرگ M در مدل دچار خطای محاسباتی می شود و همین خطای محاسباتی باعث تشخیص اشتباه در تعیین ماهیت متغیر انعطافپذیر می‌گردد. بر مبنای این ادعا، مدل اصلاح شده‌ای از مدل کوک و ژو را ارائه داد که در آن به دلیل عدم استفاده از عدد بزرگ M خطای محاسباتی بیان شده را ندارد [۴]. امیرتیموری و امروزنژاد جهت تعیین ماهیت عامل انعطاف‌پذیر مدلی بر پایه فرم پوششی مدل CCR و تعریف مجموعه امکان تولید در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر معرفی کردند[۵].

توحیدی و مطرود برای تعیین ماهیت عامل انعطاف‌پذیر، مدل غیر پارامتری بدون ماهیت با فرض بازده به مقیاس متغیر در حضور داده‌های انعطاف‌پذیر ارائه داند[۶] و ادعا نمودند مدل آنها مشکلات ناشی از فرض بازده به مقیاس متغیر و همچنین ماهیتی بودن مدل‌های قبلی را حل می‌کند آنها با به کارگیری مدل ارائه شده روی داده‌های ۵۰ موسسه از آموزش عالی انگلستان قابلیت بکارگیری این مدل را مشخص کردند.

۲- پیشینه تحقیق

همانطور که قبلاً بیان شده است در کاربردهای عملی از تحلیل پوششی داده‌ها علاوه بر متغیرهای ورودی و خروجی متغیرهای دیگری وجود دارند که ماهیت آنها از حیث ورودی یا خروجی بودن مشخص نیست و باید تعیین شود. به عنوان مثال در ارزیابی دانشگاه‌ها دانشجویان فارغ التحصیل از یک طرف به این دلیل که با صرف بودجه آموزش دیده‌اند و فارغ التحصیل شده‌اند به عنوان خروجی در نظر گرفته می‌شوند و از طرف دیگر از آن جهت که به عنوان یک منبع قابل دسترس اساتید جهت افزایش کارایی‌شان می‌باشند به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند. به عنوان مثال دیگر در ارزیابی بانک از لحاظ سرمایه گذاری، متغیری مانند تعداد مشتریان با ارزش از آن جهت که منبعی برای سرمایه گذاری آینده می‌باشند می‌تواند به عنوان خروجی درنظر گرفته شود و از جهت دیگر که به شعبه در جمع آوری سبد سرمایه گذاری کمک می کنند به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند. در این بخش مدل‌ها و بحث‌های ارائه شده در زمینه متغیرهای انعطاف‌پذیر، بیان می‌شوند.

۲-۱مدل ارائه شده توسط کوک و ژو

کوک و ژو [۳] مدل زیر را جهت مواجه شدن با متغیرهای انعطاف‌پذیر و تعیین ماهیت آن ارائه دادند.

$$\mathrm{Max}\quad \frac{\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0} + \sum_{f=1}^{k} \delta_f Z_{fo}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} + \sum_{f=1}^{k} (1-d_f)\gamma_f Z_{fo}}$$

$$\mathrm{st}\quad \frac{\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} + \sum_{f=1}^{k} \delta_f Z_{fj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{f=1}^{k} (1-d_f)\gamma_f Z_{fj}} \le 1$$

$$j = 1, \ldots, n$$

$$\mu_r \ge 0 \qquad f = 1, \ldots, k$$

$$v_i \ge 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\gamma_f \geq 0, \qquad f = 1,\dots,k$$
$$d_f \in \{0,1\} \qquad f = 1,\dots,k$$

مدل کسری فوق را می توان به فرم خطی زیر تبدیل کرد.

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \\
&\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0} + \sum_{f=1}^{k} \delta_f Z_{fo} \\
&\text{st} \\
&\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} + \sum_{f=1}^{k} \delta_f Z_{fo} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \\
&\sum_{f=1}^{k} (1-d_f)\gamma_f Z_{fj} \leq 0 \quad j = 1,\dots,n \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} + \sum_{f=1}^{k} (1-d_f)\gamma_f Z_{fo} = 1 \\
&\mu_r \geq 0 \qquad f = 1,\dots,k \\
&v_i \geq 0 \qquad i = 1,\dots,m \\
&\gamma_f \geq 0, \qquad f = 1,\dots,k \\
&d_f \in \{0,1\} \qquad f = 1,\dots,k
\end{aligned} \tag{۱}$$

برای تبدیل مدل غیرخطی فوق به فرم خطی متغیر $\delta_f = d_f\gamma_f$ را تعریف کرده و سپس محدودیت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&0 \leq \delta_f \leq Md_f \\
&0 \leq \delta_f \leq \gamma_f \leq \delta_f + M(1-d_f)
\end{aligned} \tag{۲}$$

در نهایت برنامه‌ریزی خطی صحیح مختلط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \\
&\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0} + \sum_{f=1}^{k} \delta_f Z_{fo} \\
&\text{st} \\
&\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} + 2\sum_{f=1}^{k} \delta_f Z_{fo} - \\
&\sum_{f=1}^{k} \gamma_f z_{fj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \\
&j = 1,\dots,n \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} + \sum_{f=1}^{k} \gamma_f Z_{fo} - \sum_{f=1}^{k} \delta_f Z_{fo} = 1 \\
&0 \leq \delta_f \leq M\, d_f \qquad f = 1,\dots,k \\
&0 \leq \gamma_f \leq \delta_f + M\,(1-d_f) \qquad f = 1,\dots,k \\
&\mu_r, v_i, \gamma_f, \delta_f \geq 0, \qquad for \quad all \quad i,r,f \\
&d_f \geq 0 \qquad f = 1,\dots,k
\end{aligned} \tag{۳}$$

توجه کنیم که $d_f = 1$ یا $d_f = 0$، در این صورت متغیر انعطاف‌پذیر به ترتیب به صورت ورودی یا خروجی تعیین می‌شود. در واقع مدل به DMU_o این اجازه را می دهد که ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر را انتخاب کند. مبنای تصمیم‌گیری این مدل برای تعیین ورودی یا خروجی بودن متغیر انعطاف‌پذیر این است که ببینیم عمده واحدهای تصمیم گیری چه حالتی را انتخاب کرده‌اند.

۲-۲ مدل ارائه شده توسط طلوع

طلوع [۴] بر پایه مدل کوک و ژو، مدل اصلاح شده‌ای زیر را جهت تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر ارائه نمود:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \\
&\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0} + \sum_{f=1}^{k} \delta_f Z_{fo} \\
&\text{st} \\
&\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} + 2\sum_{f=1}^{k} \delta_f Z_{fo} - \sum_{f=1}^{k} \gamma_f z_{fj} \\
&-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \qquad j = 1,\dots,n \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} + \sum_{f=1}^{k} \gamma_f Z_{fo} - \sum_{f=1}^{k} \delta_f Z_{fo} = 1 \\
&0 \leq \delta_f \leq d_f \qquad f = 1,\dots,k \\
&\delta_f \leq \gamma_f \leq \delta_f + (1-d_f) \qquad f = 1,\dots,k \\
&0 \leq \mu_r \leq 1 \qquad f = 1,\dots,k \\
&0 \leq v_i \leq 1 \qquad f = 1,\dots,k \\
&0 \leq \gamma_f, \delta_f \leq 1 \qquad f = 1,\dots,k \\
&d_f \in \{0,1\} \qquad f = 1,\dots,k
\end{aligned} \tag{۴}$$

۲-۳- روش ارائه شده توسط امیرتیموری و امروزنژاد

امیرتیموری و امروزنژاد [۵] بر پایه مدل پوششی CCR مدل زیر را برای اندازه‌گیری کارایی DMU_o پیشنهاد دادند:

$$\begin{aligned}
&\text{Min} \quad \theta \\
&\text{st} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_{ij} \leq \theta x_{io} \\
&\qquad\qquad i = 1,\dots,m \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_{ij} \geq Y_{ro} \\
&\qquad\qquad r = 1,\dots,s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \le \theta z_{fo} + M\ \delta_{1f} \\
&f = 1,\dots,k \\
&-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \le -z_{fo} + M\ \delta_{2f} \\
&f = 1,\dots,k \\
&\delta_{1f} + \delta_{2f} = 1 \\
&f = 1,\dots,k \\
&\delta_{1f}, \delta_{2f} \in \{0,1\} \\
&f = 1,\dots,k
\end{aligned} \tag{۵}
$$

با انتخاب $\delta_1 = 0$، z_{fo} برای DMU_o به صورت ورودی انتخاب می‌شود. از طرف دیگر اگر $\delta_1 = 1$ آنگاه $\delta_2 = 0$ در این صورت z_{fo} برای DMU_o نقش خروجی را دارد.

۲-۴- روش ارائه شده توسط توحیدی و مطرود

توحیدی و مطرود مدل زیر را جهت مواجه شدن با متغیرهای انعطاف‌پذیر و تعیین ماهیت آن ارائه دادند[۶].

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Min}\quad & \alpha / \beta \\
\mathrm{st}\quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_{ij} \le \alpha\ X_{io} \\
& i = 1,\dots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_{ij} \ge \beta\ Y_{ro} \\
& r = 1,\dots,s \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \le \alpha\ z_{fo} + M\ \delta_f \\
& f = 1,\dots,k \\
& -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \le -\beta\ z_{fo} + M\ \delta_f \\
& f = 1,\dots,k \\
& \delta_f \in \{0,1\} \\
& f = 1,\dots,k \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& \lambda_j \ge 0 \\
& j = 1,\dots,n \\
& \alpha, \beta \ge 0
\end{aligned} \tag{۶}
$$

برای $\delta_f = 0$ متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان ورودی و برای $\delta_f = 1$ این متغیر به عنوان خروجی در نظر گرفته می‌شود. این مدل ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر را با توجه به رای اکثریت DMU ها در انتخاب ورودی یا خروجی بودن متغیر انعطاف‌پذیر تعیین می کند.

۳- معرفی یک مدل بدون ماهیت جهت تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر

اکثر مدل‌های ارائه شده جهت تشخیص ماهیت متغیرهای انعطاف‌پذیر ماهیتی می‌باشند، یعنی ورودی یا خروجی محور هستند ودر صورت استفاده از ماهیت‌های متفاوت این مدل‌ها، نتایج متفاوتی در تعیین عامل انعطاف‌پذیر حاصل می‌شود. در مدل‌های غیر ماهیتی نیز از مقدار M جهت تمییز در انتخاب قیود بهره گرفته شده است، در این مدل‌ها با انتخاب مقادیر متفاوتی برای مقدار M نتایج متفاوتی در تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر، مقدار کارایی و بازده به مقیاس واحدهای تصمیم‌گیری حاصل می‌شود، لذا، وجود چنین مسائلی ممکن است باعث بروز مشکلاتی شود. بنابراین، ارائه مدلی که تا حدودی این مسائل را رفع کند، حائز اهمیت می‌باشد. مدل پیشنهادی علاوه بر تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر می‌تواند خطای محاسباتی و مشکلات ناشی از حضور M بزرگ را مرتفع سازد.

فرض کنیم n واحد تصمیم‌گیری$\mathrm{DMU}_j, j = 1,2,\dots,n$ با صرف m ورودی $x_j = (x_{1j},\dots,x_{mj})$ به تولید s خروجی$y_j = (y_{1j},\dots,y_{sj})$ می‌پردازند. در ابتدا مدل راسل اصلاح شده (۴) که یک مدل غیرشعاعی و بدون ماهیت می‌باشد[۷]، در نظر گرفته شده است.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Min}\quad & \mathrm{Re} = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \theta_i}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \phi_r} \\
\mathrm{st}\quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta_i x_{io} && i = 1,\dots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge \phi_r y_{ro} && r = 1,\dots,s \\
& 0 \le \theta_i \le 1 && i = 1,\dots,m \\
& \phi_r \ge 1 && r = 1,\dots,s \\
& \lambda_j \ge 0 && j = 1,\dots,n
\end{aligned} \tag{۷}
$$

PPS زیرکه شامل متغیرهای انعطاف‌پذیر است را در نظر

می‌گیریم:

$$PPS=\left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x \ge \sum_{i=1}^{m}\lambda_j x_j ,\, y \le \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j ,\left(either\ \ z \le \sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_j \ \ or\ \ z \ge \sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_j\right),\lambda_j \ge 0,\, j=1,\dots,n \right\}$$

با توجه به PPS مورد نظر و مدل (۷)، مدل زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{array}{lll}
\text{Min} & \text{Re}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i \Big/ \dfrac{1}{s}\sum\limits_{r=1}^{s}\phi_r & \\
\text{st} & \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \le \theta_i\, x_{io} & i=1,\dots,m \\
& \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} \ge \phi_r y_{ro} & r=1,\dots,s \\
& \left\{\begin{array}{ll} either & \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j z_{fj} \le \theta_f\, z_{fo} & f=1,\dots,k \\ or & \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j z_{fj} \ge \phi_f\, z_{fo} & f=1,\dots,k \end{array}\right. & (8)\\
& 0 \le \theta_i \le 1 & i=1,\dots,m \\
& \phi_r \ge 1 & r=1,\dots,s \\
& \lambda_j \ge 0 & j=1,\dots,n
\end{array}$$

برای اینکه z_{fo} در نقش ورودی یا خروجی باشد، فقط یکی از محدودیت‌های $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{fj} \le \theta_f\, z_{fo}$ یا $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{fj} \ge \phi_f z_{fo}$ برای این متغیر باید برقرار باشد. محدودیت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{fj}\delta_f \le \theta_f\, z_{fo}\,\delta_f \ \ و\ \ \delta_f \in \{0,1\} \qquad (۹)$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{fj}\left(1-\delta_f\right) \le -\phi_f z_{fo}\left(1-\delta_f\right) \qquad (۱۰)$$

برای $\delta_f = 0$ محدودیت (۹) زائد است و محدودیت (۱۰) برقرار است و متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان خروجی انتخاب می‌شود و برای $\delta_f = 1$ محدودیت (۱۰) زائد و محدودیت (۹) برقرار است و این متغیر به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. با اعمال این محدودیت‌ها روی مدل (۸)، مدل زیر که یک مدل غیرخطی کسری است پیشنهاد می‌گردد:

$$\begin{array}{lll}
\text{Min} & & \\
\text{Re}= & \left(\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i+\dfrac{1}{k}\sum\limits_{f=1}^{k}\theta_f\delta_f\right)\Big/\left(\dfrac{1}{s}\sum\limits_{r=1}^{s}\phi_r+\dfrac{1}{k}\sum\limits_{f=1}^{k}\phi_f\left(1-\delta_f\right)\right) & \\
\text{st} & \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \le \theta_i x_{io} & i=1,\dots,m \\
& \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} \ge \phi_r y_{ro} & r=1,\dots,s \\
& \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j z_{fj}\delta_f \le \theta_f z_{fo}\delta_f & f=1,\dots,k \qquad (۱۱)\\
& -\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j z_{fj}(1-\delta_f) \le -\phi_f z_{fo}(1-\delta_f) & f=1,\dots,k \\
& 0 \le \theta_i,\theta_f \le 1 & i=1,\dots,m,\ f=1,\dots,k \\
& \phi_r,\phi_f \ge 1 & r=1,\dots,s,\ f=1,\dots,k \\
& \lambda_j \ge 0 & j=1,\dots,n \\
& \delta_f \in \{0,1\} & f=1,\dots,k
\end{array}$$

برای ساده کردن مدل غیر خطی فوق ابتدا تغییر متغیرهای $w_f=\theta_f\delta_f ,\, q_f=\phi_f\left(1-\delta_f\right)$ را تعریف کرده و سپس محدودیت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$0 \le w_f \le \delta_f ,\, q_f \ge \delta_f$$

در نهایت مدل برنامه‌ریزی غیر خطی کسری به مدل غیرخطی صحیح (۱۲) تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{lll}
\text{Min} & \text{Re}=\left(\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i+\dfrac{1}{k}\sum_{f=1}^{k}w_f\right) & (۱۲)\\
\text{st} & \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \le \theta_i\, x_{io} & i=1,\dots,m \\
& \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} \ge \phi_r y_{ro} & r=1,\dots,s \\
& \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j z_{fj}\delta_f \le \theta_f\, z_{fo}\delta_f & f=1,\dots,k \\
& -\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j z_{fj}\left(1-\delta_f\right) \le -\phi_f z_{fo}\left(1-\delta_f\right) & f=1,\dots,k \\
& \left(\dfrac{1}{s}\sum\limits_{r=1}^{s}\phi_r+\dfrac{1}{k}\sum_{f=1}^{k}q_f\right)=1 & (۱۲-۲)\\
& w_f=\theta_f\delta_f & f=1,\dots,k \\
& q_f=\phi_f\left(1-\delta_f\right) & f=1,\dots,k \\
& 0 \le \theta_i,\theta_f \le 1 & i=1,\dots,m,\ f=1,\dots,k \\
& 0 \le w_f \le \delta_f & f=1,\dots,k \\
& q_f \ge \delta_f & f=1,\dots,k \\
& \phi_r,\phi_f \ge 1 & r=1,\dots,s,\ f=1,\dots,k \\
& \lambda_j \ge 0 & j=1,\dots,n \\
& \delta_f \in \{0,1\} & f=1,\dots,k
\end{array}$$

مدل (۱۲) تناظری از مدل (۱۱) است که با تغییر متغیر $w_f=\theta_f\delta_f, q_f=\varphi_f(1-\delta_f)$ و $0\le w_f\le\delta_f, q_f\ge\delta_f$ با استفاده از روش تبدیل چارلز-کوپر در برنامه‌ریزی کسری به هم ارز خطی آن تبدیل شده است.

قضیه ۳-۱:

مدل (۱۲) با مدل (۱۱) متناظر است.

اثبات: با استفاده از تبدیلات چارنز و کوپر و با در نظر گرفت تغییر متغیرهای $w_f=\theta_f\delta_f, q_f=\varphi_f(1-\delta_f)$ قید (۲-۱۲) از مدل (۱۲) حاصل می‌شود با مینیمم کردن صورت کسر مدل (۱۱) مدل (۱۲) نتیجه می‌شود. فرض کنیم $w_f^*, \theta_i^*, q_f^*, \varphi_i^*$ جواب بهین مدل (۱۲) باشد جواب $w_f^*, \theta_i^*, q_f^*, \varphi_i^*$ جواب بهین مدل (۱۱) نیز است زیرا عکس تبدیلات مذکور در گذر از مدل (۱۲) به مدل (۱۱) نیز امکان پذیر است بنابراین مدل‌های (۱۱) و (۱۲) هردو دارای تابع هدفی با مقادیر بهین یکسان هستند.

مثال ۱: جدول (۱) یک مثال عددی را نشان می‌دهد، این مثال شامل هشت DMU می‌باشدکه هر کدام شامل یک متغیر ورودی، یک متغیرخروجی و یک متغیر انعطاف‌پذیر می‌باشند. نتایج حاصل از حل این مثال توسط مدل‌های کوک و ژو، امیرتیموری و امروزنژاد، توحیدی و مطرود و مدل پیشنهادی (۹) در جدول (۲) نشان داده شده است.

جدول ۱ : مثال عددی با ۸ واحد تصمیم‌گیرنده

DMU	خروجی	ورودی	انعطاف پذیر
۱	۳	۱	۶
۲	۵	۲	۱
۳	۲	۱	۵
۴	۳	۱	۴
۵	۱	۱	۱
۶	۵	۲	۶
۷	۴	۱	۲
۸	۳	۵	۲

جدول ۲: نتایج عددی با مدل‌های کوک و ژو، امیرتیموری و امروزنژاد، توحیدی و مطرود و مدل پیشنهادی

نتایج حاصل از مدل امیرتیموری و امروزنژاد،ورودی محور			نتایج حاصل از مدل امیرتیموری و امروزنژاد ،خروجی محور			نتایج حاصل از مدل کوک وژو ورودی محور		نتایج حاصل از مدل کوک وژو خروجی محور		نتایج حاصل از مدل مطرود		نتایج حاصل از مدل (۱۰)		
کارایی	δ1	δ2	کارایی	δ1	δ2	کارایی	d	کارایی	d	کارایی	d	کارایی	d	DMU
۰/۷۵	۰	۱	۰/۷۵	۰	۱	۱	۱	۰/۷۵	۰	۰/۷۵	۰	۰/۷۵	۰	۱
۰/۶۳	۱	۰	۰/۶۳	۱	۰	۰/۶۳	۱	۱	۰	۰/۶۳	۱	۰/۶۲	۰	۲
۰/۵۰	۰	۱	۰/۵۰	۰	۱	۰/۸۵	۱	۰/۵۰	۰	۰/۵۰	۰	۰/۵۰	۰	۳
۰/۷۵	۰	۱	۰/۷۵	۰	۱	۱	۱	۰/۷۵	۰	۰/۷۵	۰	۰/۷۵	۰	۳
۰/۲۸	۱	۰	۰/۲۸	۱	۰	۱	۰	۰/۳۳	۰	۰/۲۸	۱	۰/۲۸	۰	۵
۰/۶۳	۰	۱	۰/۶۳	۰	۱	۰/۵۰	۱	۰/۶۳	۰	۰/۶۳	۰	۰/۶۲	۰	۶
۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۷
۰/۱۶	۱	۰	۰/۱۶	۱	۰	۰/۴۳	۰	۰/۳۰	۰	۰/۱۶	۱	۰/۱۵	۰	۸

نتایج حاصل نشان می‌دهد که مدل‌های ورودی محور و خروجی محور ارائه شده توسط امیر تیموری و امروز نژاد ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر را برای چهار DMU از هشت DMU به عنوان متغیر ورودی و برای چهار DMU دیگر به عنوان متغیر خروجی در نظر می‌گیرد. بنابراین این مدل با توجه به رای اکثریت DMUها نمی‌تواند نظر قطعی در تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر ارائه دهد. همچنین در مدل ورودی محور کوک وژو پنج DMU متغیر انعطاف‌پذیر را به عنوان خروجی و مدل خروجی محور کوک و ژو ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر را برای تمام DMUها ورودی انتخاب می‌کند. در مدل پیشنهادی رابطه بین شاخص‌ها به گونه‌ای است که مشکلات مدل‌های فوق را ندارد و می‌تواند عادلانه ترین رفتار را جهت تعیین ماهیت متغیرهای انعطاف‌پذیر داشته باشد.

در ادامه اثر انتخاب عدد بزرگ M در مدل‌ها در تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر بررسی می‌شود. مدل ارایه شده توسط توحیدی و مطرود در نظر گرفته شده است. همانطورکه نتایج بررسی نشان می‌دهد ماهیت‌های ورودی و خروجی این مدل تحت تاثیر انتخاب عدد بزرگ M علاوه بر تفاوت در انتخاب نوع متغیر انعطاف پذیر از نقطه نظر ورودی یا خروجی بودن، دارای مقادیر کارایی متفاوتی نیز می‌باشند. همچنین انتخاب مقادیر متفاوت برای M در این مدل می‌تواند نوع بازده به مقیاس را نیز تحت تاثیر قراردهد.

مثال ۲: مدل توحیدی و مطرود با داده‌های جدول (۱) به ازای مقادیر متفاوت M حل و نتایج حاصل در جدول (۳) نشان داده شده است.

همانطوری که در جدول نشان داده شده است مدل توحیدی و مطرود تحت تاثیر انتخاب مقادیر مختلف برای عدد M بزرگ قرار می‌گیرد این مدل نه تنها در انتخاب ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر بلکه برای بازده به مقیاس و مقادیر کارایی نیز نتایج متفاوتی ارایه می‌دهد، در حالیکه مدل پیشنهادی به دلیل نداشتن عدد M بزرگ در مدل مشکلات بیان شده را ندارد.

۴- کاربرد مدل‌های پیشنهادی در موسسات آموزشی انگلستان

به منظور بررسی مدل (۱۲) داده های مربوط به پنجاه موسسه آموزش عالی انگلستان در نظر گرفته شده است. این داده‌ها شامل دو ورودی، نسبت هزینه و تجهیزات و سه خروجی، دانشجویان لیسانس، تحقیقات کارشناسی ارشد و آموزش کارشناسی ارشد و یک متغیر انعطاف‌پذیر درآمد پژوهشی می‌باشد که ماهیت آن باید تعیین شود. مدل ارائه شده توسط کوک وژو، امیرتیموری و امروزنژاد، مدل توحیدی و مطرود و همچنین مدل (۱۲) در نظر گرفته شده است. نتایج حل این مدل‌ها با داده‌های مذکور در جدول (۴) نشان داده شده است.

جدول ۳: نتایج حاصل از مدل توحیدی و مطرود به ازای مقادیر متفاوت M

کارایی	d	بازده به مقیاس	کارایی	d	بازده به مقیاس	کارایی	d	بازده به مقیاس	DMU
نتایج حاصل از مدل مطرود M=1000000000			نتایج حاصل از مدل مطرود M=100000000			نتایج حاصل از مدل مطرود M=10000000			
۰/۷۵	۰	CRTS	۰/۷۵	۰	DRTS	۰/۷۵	۰	IRTS	۱
۰/۶۲	۰	DRTS	۰/۶۲	۰	DRTS	۰/۶۲	۱	DRTS	۲
۰/۵۰	۰	CRTS	۰/۵۰	۰	IRTS	۰/۵۰	۰	CRTS	۳
۰/۷۵	۰	DRTS	۰/۷۵	۰	DRTS	۰/۷۵	۰	DRTS	۴
۰/۷۵	۰	DRTS	۰/۷۵	۰	IRTS	۰/۷۵	۰	DRTS	۵
۰/۶۲	۰	DRTS	۰/۶۲	۰	DRTS	۰/۶۲	۰	DRTS	۶
۱	۱	DRTS	۱	۱	DRTS	۱	۱	DRTS	۷
۰/۱۵	۰	DRTS	۰/۱۶	۰	DRTS	۱	۱	DRTS	۸

جدول ۴: نتایج حاصل از مدل‌های امیرتیموری و امروزنژاد،کوک و ژو، مدل توحیدی و مطرود و مدل پیشنهادی

مدل امیرتیموری و امروزنژاد، خروجی محور		مدل امیرتیموری و امروزنژاد، ورودی محور		مدل کوک وژو، خروجی محور		مدل کوک وژو، ورودی محور		مدل توحیدی و مطرود		مدل پیشنهادی		
کارایی	δ_1	کارایی	δ_1	کارایی	d	کارایی	d	کارایی	δ	کارایی	δ_f	DMU
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱
۰/۶۱	۰	۰/۶۱	۰	۰/۶۱	۰	۰/۶۴	۰	۰/۶۱	۰	۰/۴۴	۱	۲
۰/۶۶	۱	۰/۶۶	۱	۰/۸۴	۰	۰/۸۴	۰	۰/۶۶	۱	۰/۴۴	۱	۳
۰/۶۵	۰	۰/۶۵	۰	۰/۶۵	۰	۰/۶۹	۱	۰/۶۵	۰	۰/۴۵	۱	۴
۰/۸۹	۱	۰/۸۹	۱	۱	۰	۱	۰	۰/۸۹	۱	۰/۵۶	۱	۵
۱	۱	۰/۷۹	۰	۰/۷۹	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۶
۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰/۵۰	۱	۷
۰/۷۵	۰	۰/۷۵	۰	۰/۷۵	۰	۰/۸۱	۱	۰/۷۵	۰	۰/۶۶	۱	۸
۰/۶۶	۱	۰/۵۳	۱	۱	۰	۱	۰	۰/۵۳	۱	۰/۳۶	۱	۹
۰/۸۹	۰	۰/۸۹	۰	۰/۸۹	۰	۰/۹۱	۱	۰/۸۹	۰	۰/۵۳	۰	۱۰
۰/۷۵	۱	۰/۷۵	۱	۰/۸۹	۰	۰/۸۹	۰	۰/۷۵	۱	۰/۶۱	۰	۱۱
۰/۶۹	۱	۰/۵۸	۰	۰/۵۸	۰	۰/۶۷	۱	۰/۵۸	۰	۰/۴۰	۰	۱۲
۰/۸۰	۱	۰/۷۷	۱	۰/۸۰	۰	۰/۸۰	۰	۰/۷۷	۱	۰/۵۹	۰	۱۳
۰/۷۰	۱	۰/۷۰	۱	۰/۷۵	۰	۰/۷۵	۰	۰/۷۰	۱	۰/۵۸	۰	۱۴
۰/۷۰	۱	۰/۶۹	۱	۰/۷۰	۰	۰/۷۰	۰	۰/۶۹	۱	/۴۴	۰	۱۵
۰/۵۴	۱	۰/۵۲	۱	۰/۵۳	۰	۰/۵۳	۰	۰/۵۲	۱	۰/۴۰	۰	۱۶
۰/۵۴	۰	۰/۵۲	۰	۰/۵۲	۰	۰/۸۲	۱	۰/۵۲	۰	۰/۴۲	۰	۱۷
۰/۵۹	۰	۰/۵۹	۰	۰/۵۹	۰	۰/۶۳	۱	۰/۵۹	۰	۰/۳۴	۰	۱۸
۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱۹
۰/۸۶	۰	۰/۷۳	۰	۰/۷۳	۰	۰/۸۷	۰	۰/۷۳	۰	۰/۴۸	۰	۲۰
۰/۶۷	۱	۰/۵۹	۰	۰/۵۹	۰	۰/۶۲	۰	۰/۵۹	۱	۰/۴۱	۰	۲۱
۰/۶۶	۰	۰/۶۶	۰	۰/۶۶	۰	۰/۷۲	۱	۰/۶۶	۰	۰/۴۸	۰	۲۲
۰/۵۶	۱	۰/۵۵	۱	۰/۶۰	۰	۰/۶۰	۰	۰/۵۵	۱	۰/۳۵	۰	۲۳
۰/۴۸	۰	۰/۴۶	۰	۰/۴۶	۰	۱	۰	۰/۴۵	۰	۰/۳۰	۱	۲۴
۰/۹۵	۰	۰/۹۵	۰	۰/۹۵	d	۱	۱	۰/۹۵	۰	۰/۸۱	۱	۲۵
۰/۴۳	۰	۰/۴۳	۰	۰/۴۳	۰	۰/۵۷	۰	۰/۴۳	۰	۰/۲۶	۱	۲۶
۰/۸۵	۱	۰/۷۰	۰	۰/۷۰	۰	۰/۷۸	۱	۰/۷۰	۰	۰/۴۹	۱	۲۷
۰/۸۱	۱	۰/۸۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰/۸۱	۱	۰/۵۷	۰	۲۸
۰/۷۸	۰	۰/۷۸	۰	۰/۷۸	۰	۰/۸۲	۱	۰/۷۸	۰	۰/۶۷	۰	۲۹
۰/۸۳	۰	۰/۶۳	۰	۰/۶۳	۰	۰/۸۹	۰	۰/۶۳	۰	۰/۵۵	۱	۳۰
۰/۷۳	۰	۰/۷۳	۰	۰/۷۳	۰	۰/۷۸	۱	۰/۷۳	۰	۰/۴۷	۰	۳۱
۰/۸۴	۱	۰/۸۴	۱	۰/۸۹	۰	۰/۸۴	۰	۰/۸۴	۱	۰/۴۷	۰	۳۲
۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۳۳
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۳۴

۳۵	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۳۶	۰	۰/۴۷	۱	۰/۷۳	۰	۰/۷۸	۰	۰/۷۸	۱	۰/۷۳	۱
۳۷	۰	۰/۵۹	۰	۰/۷۸	۱	۰/۸۳	۰	۰/۷۸	۰	۰/۷۸	۰
۳۸	۰	۰/۶۶	۱	۰/۸۱	۰	۰/۸۱	۰	۰/۸۳	۱	۰/۸۱	۱
۳۹	۰	۰/۴۸	۰	۰/۶۲	۰	۰/۶۷	۰	۰/۶۲	۰	۰/۶۲	۰
۴۰	۰	۰/۶۰	۰	۰/۷۴	۱	۰/۷۴	۰	۰/۷۴	۰	۰/۷۴	۰
۴۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۴۲	۰	۰/۵۰	۱	۰/۸۰	۰	۰/۸۲	۰	۰/۸۰	۰	۰/۸۰	۱
۴۳	۰	۰/۵۲	۱	۰/۶۴	۰	۰/۹۲	۰	۰/۹۲	۱	۰/۶۴	۱
۴۴	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۴۵	۰	۰/۸۱	۰	۰/۸۸	۰	۰/۸۹	۰	۰/۸۸	۰	۰/۸۸	۰
۴۶	۰	۰/۷۲	۰	۰/۸۵	۰	۰/۸۶	۰	۰/۸۵	۰	۰/۸۵	۰
۴۷	۰	۰/۴۹	۰	۰/۶۶	۱	۰/۶۹	۰	۰/۶۵	۱	۰/۶۹	۱
۴۸	۰	۰/۵۱	۱	۰/۷۹	۰	۰/۸۴	۰	۰/۸۴	۱	۰/۷۹	۱
۴۹	۰	۰/۳۲	۰	۰/۴۵	۰	۰/۸۰	۰	۰/۸۰	۰	۰/۴۷	۰
۵۰	۰	۰/۷۱	۱	۰/۸۴	۰	۰/۸۴	۰	۰/۸۴	۱	۰/۸۴	۱
میانگین کارایی		۰/۶۱		۰/۷۵		۰/۸۳		۰/۷۸		۰/۷۵	

با توجه به مقادیر بهینه $d^*, {\delta_1}^*, \delta^*, {\delta_f}^*$ حاصل از جدول (۴) مشاهده می‌شود در مدل توحیدی و مطرود ۲۷ تا از DMUها متغیر انعطاف‌پذیر را به صورت ورودی و ۲۳ تا ازDMU ها این متغیر را به صورت خروجی انتخاب می‌کند با توجه به اکثریت انتخابDMU ها این متغیر توسط این مدل به صورت ورودی انتخاب می‌شود، در مدل کوک و ژو ورودی محور ۳۰ تا از DMUها بودجه پژوهشی را به صورت ورودی و ۲۰ تا از DMUها این متغیر را به صورت خروجی در نظر می‌گیرند بنابراین این مدل بودجه پژوهشی را به عنوان ورودی انتخاب می کند، درمدل کوک و ژو خروجی محور همه DMUها بودجه پژوهشی را به عنوان ورودی در نظر می‌گیرند بنا براین این مدل بودجه پژوهشی را به عنوان ورودی انتخاب می‌کند، در مدل مدل امیرتیموری و امروزنژاد ورودی محور ۲۵ تا از DMUها بودجه پژوهشی را به صورت ورودی و ۲۵ تا از DMUها بودجه پژوهشی را به صورت خروجی انتخاب می‌کنند با توجه به اکثریت انتخاب DMUها این مدل نمی‌تواند نظر قطعی در مورد انتخاب ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر ارائه دهد، به طور مشابه مدل امیرتیموری و امروزنژاد خروجی محور بودجه پژوهشی را به عنوان خروجی انتخاب می‌کند. در مدل پیشنهادی ۱۳ تا از DMUها بودجه پژوهشی را به عنوان ورودی و ۳۷ تا از DMUها این متغیر را به‌عنوان خروجی در نظر می‌گیرند بنابراین این متغیر توسط این مدل به عنوان خروجی انتخاب می‌شود. همانطور یکه از نتایج حاصل مشاهده می‌شود مدل‌های کوک و ژو و امیر تیموری و امروز نژاد تحت تاثیر ماهیت مدل قرار می‌گیرند و مدل توحیدی و مطرود از قطعیت کمتری نسبت به مدل انتخابی در انتخاب ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر با توجه به اکثریت انتخاب DMU ها دارد. همچنین از مزیت مدل پیشنهادی می‌توان به پایین بودن میانگین مقدار کارایی این مدل نسبت به مدل‌های دیگر اشاره کرد.

۵- نتیجه‌گیری

در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها، ماهیت داده‌ها ازنقطه نظر ورودی و خروجی بودن مشخص است، حال آنکه مسائل عملی نشان می‌دهند که متغیرهایی موجودند که در مورد ماهیت آنها اختلاف نظر وجود دارد. برخی واحدهای تصمیم‌گیری برای حصول مقدار کارایی بالاتر آن را به‌صورت ورودی و بعضی دیگر آن را خروجی در نظر می‌گیرند. در صورت استفاده از ماهیت‌های متفاوت در مدل‌های ماهیتی ارائه شده جهت تشخیص ماهیت متغیرهای انعطاف‌پذیر نتایج متفاوتی در تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، ممکن است یک متغیر انعطاف‌پذیر، با استفاده از مدل خروجی محور، ورودی تعیین شود در حالیکه همان متغیر با استفاده از مدل ورودی محور، خروجی تعیین شود. در

مدل‌های غیرماهیتی نیز به ازای مقادیر مختلفی از عدد بزرگ M نتایج متفاوتی در انتخاب ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر، مقادیر کارایی و نوع بازده به مقیاس حاصل می‌شود. در حالیکه مدل پیشنهادی به دلیل متکی نبودن به عدد بزرگ M درحذف یکی از قیود شامل متغیر انعطاف‌پذیر به جهت انتخاب آن از نقطه نظر ورودی یا خروجی بودن، مشکلات بیان شده را ندارد. مدل پیشنهادی نه تنها می‌تواند مشکلات تاثیرات ناشی از مقادیر متفاوت عدد بزرگ M و ماهیتی بودن را مرتفع سازد بلکه می‌تواند تمام کارایی تکنیکی و ترکیبی را در ارزیابی واحد تصمیم‌گیرنده مورد توجه قرار دهد.

فهرست منابع

[1] Charns, A., Cooper, W.W., and Rhodes. E.L., (1978), "Measuring the efficiency of decision making units," European Journal of Operational Research Vol. 2. pp. 424-449.

[2] Banker R.D. (1984) Estimating most productive scale size using data envelopment analysis.European Journal of Operational Research 17 35–44.

[3] Cook, W.D., Zhu, J. (2007), Classifying inputs and outputs in DEA, European Journal of Operational Research, 180 692–699.

[4] Toloo, M. Alternative solutions for classifying inputs and outputs in Data Envelopment Analysis, *Computers and Mathematics with Applications*, 63 (2012) 1104-1110.

[5] Amirteimoori, A., Emrouznejad, A. (2011), Flexible measures in production process: a DEA- based approach, RAIRO Operations Research, 25 63-74.

[6] Tohidi, G., Matroud, F. 68 (2015), A new non-oriented model for classifying flexible measures in DEA, Journal of the Operational Research Society, pp 1019–1029.

[7] Russell, R.R. (1985), Measure of technical efficiency, J. Econ. Theory 35 109–126.

Appendix A: Data set for higher education institutions

DMU	General expenditure	Equipment expenditure	UG students	PG teaching	PG research	Research income
1	528	64	145	0	26	254
2	2605	301	381	16	54	1485
3	304	23	44	3	3	45
4	1620	485	287	0	48	940
5	490	90	91	8	22	106
6	2675	767	352	4	166	2967
7	422	0	70	12	19	298
8	986	126	203	0	32	776
9	523	32	60	0	17	39
10	585	87	80	17	27	353
11	931	161	191	0	20	293
12	1060	91	139	0	37	781
13	500	109	104	0	19	215
14	714	77	132	0	24	269
15	923	121	135	10	31	392
16	1267	128	169	0	31	546
17	891	116	125	0	24	925
18	1395	571	176	14	27	764
19	990	83	28	36	57	615
20	3512	267	511	23	153	3182
21	1451	226	198	0	53	791
22	1018	81	161	5	29	741
23	1115	450	148	4	32	347
24	2055	112	207	1	47	2945
25	440	74	115	0	9	453
26	3897	841	353	28	65	2331
27	836	81	129	0	37	695
28	1007	50	174	7	23	98
29	1188	170	253	0	38	879
30	4630	628	544	0	217	4838
31	977	77	94	26	26	490
32	829	61	128	17	25	291
33	898	39	190	1	18	327
34	901	131	168	9	50	956
35	924	119	119	37	48	512
36	1251	62	193	13	43	563
37	1011	235	217	0	36	714
38	732	94	151	3	23	297
38	444	46	49	2	19	277
40	308	28	57	0	7	154
41	483	40	117	0	23	531
42	515	68	79	7	23	305
43	593	82	101	1	9	85
44	570	26	71	20	11	130
45	1317	123	293	1	39	1043
46	2013	149	403	2	51	1523
47	992	89	161	1	30	743
48	1038	82	151	13	47	513
49	206	1	16	0	6	72
50	1193	95	240	0	32	485

Source: Beasley (1990)