دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره هفتم، پاییز ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

نتایجی برای عدد احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی در گراف‌ها

حسین عبداله زاده آهنگر[*,1]، زهرا قندعلی[2]

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۴/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۸/۲۶

چکیده

تابع $f: V(G) \to \mathcal{P}(\{1,2\})$ یک تابع احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی (**2RDF**) برای گراف G نامیده می‌شود هرگاه برای هر راس u با شرط $f(v) = \emptyset$ داشته باشیم $\cup_{u\in N(v)} f(u) = \{1,2\}$. وزن یک **2RDF** f برابر است با $w(f) = \sum_{v\in V} |f(v)|$. عدد احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی گراف G را که با نماد $\gamma_{2r}(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک **2RDF** در گراف G است. تابع احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی (**M2RDF**) برای گراف G یک تابع احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی f می‌باشد به‌طوری که مجموعه‌ی $\{w \in V(G) | f(w) = \emptyset\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف G نباشد. وزن یک **M2RDF** f برابر است با $w(f) = \sum_{v\in V} |f(v)|$. عدد احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی گراف G را که با نماد $\gamma_{m2r}(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک **M2RDF** در گراف G است. در این مقاله مطالعه روی پارامتر احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی را ادامه می‌دهیم. ابتدا تمام گراف‌های G را دسته‌بندی می‌کنیم به‌طوری که عدد احاطه‌گر آن‌ها برابر ۲ یا ۳ می‌باشد. در پایان تمام گراف‌های G با کمر حداقل ۵ را دسته‌بندی می‌کنیم به طوری که $\gamma_{m2r}(G) = n - 2$ باشد.

واژه‌های کلیدی: تابع احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی، عدد احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی، تابع احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی، عدد احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی.

*. عهده‌دار مکاتبات: E-mail: ha.ahangar@yahoo.com

مقدمه

برای اصطلاحات و نمادهای نظریه گراف که در این‌جا ارایه نشده است، خواننده را به [۸، ۹، ۱۵] ارجاع می‌دهیم. در این مقاله، G گرافی است با مجموعه راس‌های $V=V(G)$ و مجموعه یال‌های $E=E(G)$. مرتبه گراف G را با $|V|=n$ و اندازه گراف G را با $|E|=m$ نشان می‌دهیم. برای راس v مجموعه‌ی همه راس‌هایی که با راس v مجاورند را همسایگی باز راس v نامیده و به‌صورت $N(v)$ نشان می‌دهیم و همسایگی بسته‌ی راس v را به‌صورت $N[v]=N(v)\cup\{v\}$ تعریف می‌کنیم. همسایگی باز $S\subseteq V$ برابر است با مجموعه $N(S)=\cup_{v\in S}N(v)$ و همسایگی بسته آن برابر است با مجموعه $N[S]=N(S)\cup(S)$. درجه‌ی راس $v\in V(G)$ برابر است با $|N(v)|=\deg_G(v)=\deg(v)$. همچنین مینیمم درجه و ماکسیمم درجه یک گراف به ترتیب با $\delta=\delta(G)$ و $\Delta=\Delta(G)$ معرفی می‌شوند. منظور از یک برگ یک راس از درجه یک می‌باشد و راس تکیه‌گاهی راسی مجاور به برگ است. منظور از K_n گراف کامل از مرتبه n، C_n دور به طول n و P_n مسیر به طول $n-1$ می‌باشد. جمع دو گراف G_1 و G_2 را با G_1+G_2 نشان می‌دهیم و گرافی است که هر راس از گراف G_1 را به هر راس از گراف G_2 متصل می‌کنیم.

زیرگراف القاء شده توسط یک مجموعه S در گراف G را با $G[S]$ نشان می‌دهند. فاصله‌ی دورترین راس گراف G نسبت به راس v را خروج از مرکز گراف G گوییم و با نماد $e(v)$ نشان می‌دهیم. به بزرگترین خروج از مرکز راس‌ها در یک گراف قطر گراف گویند و با $diam(G)$ نشان می‌دهند. کمر گراف G، طول کوتاهترین دور در آن گراف می‌باشد و با $girth(G)$ یا $g(G)$ نشان می‌دهند. اگر گراف G شامل دور نباشد، کمر آن را ∞ تعریف می‌کنیم. طول کوتاهترین مسیر از راس u به راس v در گراف G را فاصله‌ی u از v نامیده و با $d(u,v)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه $A\subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نامیده می‌شود هرگاه $\mathrm{N}[A]=V(G)$. عدد احاطه‌گر گراف G که با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود برابر با تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر است که کمترین تعداد عضو ممکن را دارد. هر مجموعه احاطه‌گر با مینیمم تعداد عضو را با $\gamma(G)$- مجموعه نشان می‌دهیم. مجموعه احاطه‌گر $D\subseteq V(G)$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ماکسیمال (***MDS***) نامیده می‌شود هرگاه $V-D$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G نباشد. عدد احاطه‌گر ماکسیمال گراف G که با $\gamma_m(G)$ نشان داده می‌شود برابر با تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر ماکسیمال است که کمترین تعداد عضو ممکن را دارد. مفهوم احاطه‌گر ماکسیمال در [۱۱] معرفی شده است. برای اطلاعات بیشتر خواننده را به [۱۰،۱۲] ارجاع می‌دهیم.

تابع $\mathrm{f}: V(G)\rightarrow\mathcal{P}(\{1,2\})$ یک تابع احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی (**2RDF**) برای گراف G نامیده می‌شود هرگاه برای هر راس u با شرط $f(v)=\emptyset$ داشته باشیم $\cup_{u\in N(v)}f(u)=\{1,2\}$. وزن یک **2RDF** f برابر است با $w(f)=\sum_{v\in V}|f(v)|$. عدد احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی گراف G را که با نماد $\gamma_{2r}(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک **2RDF** در گراف G است. یک تابع احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی (**M2RDF**) برای گراف G یک تابع احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی $f=(V_0,V_1,V_2,V_{12})$ می‌باشد به‌طوری که مجموعه‌ی $\{w\in V(G)|f(w)=\emptyset\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف G نباشد. وزن یک **M2RDF** f برابر است با $w(f)=\sum_{v\in V}|f(v)|$. عدد احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی گراف G را که با نماد $\gamma_{m2r}(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک **M2RDF** در گراف G است. برای اطلاعات بیشتر خواننده را به [۷،۳، ۱۳، ۱۴، ۱۶] ارجاع می‌دهیم.

عبداله‌زاده آهنگر و همکاران در [۱] پارامتر احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی را معرفی نمودند و در آن مقاله گراف‌هایی از مرتبه n با عدد احاطه‌گری ماکسیمال ۲-رنگین کمانی n را دسته‌بندی نموده‌اند. هم‌چنین عبداله‌زاده آهنگر و همکاران در [۲] گراف‌هایی از مرتبه n با عدد احاطه‌گری ماکسیمال ۲-رنگین کمانی $n-1$ را دسته‌بندی نموده‌اند. در این مقاله مطالعه روی پارامتر احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی را ادامه می‌دهیم. ابتدا تمام گراف‌های G را دسته‌بندی می‌کنیم به‌طوری

که عدد احاطه‌گر آن‌ها برابر۲ یا ۳ می‌باشد. در پایان تمام گراف‌های G با کمر حداقل ۵ را دسته‌بندی می‌کنیم به طوری که $\gamma_{m2r}(G) = n-2$ باشد.

در این مقاله از نتیجه مفید زیر استفاده می‌کنیم:

گزاره الف: برای $n \geq 3$، اگر $n \equiv 2(mod\ 4)$ باشد،

$$\gamma_{m2r}(\mathrm{C_n}) = \left\lfloor\frac{\mathrm{n}}{2}\right\rfloor + \left\lceil\frac{\mathrm{n}}{4}\right\rceil - \left\lfloor\frac{\mathrm{n}}{4}\right\rfloor$$

و اگر $n \equiv 0,1,3(mod\ 4)$ باشد،

$$\gamma_{m2r}(\mathrm{C_n}) = \left\lfloor\frac{\mathrm{n}}{2}\right\rfloor + \left\lceil\frac{\mathrm{n}}{4}\right\rceil - \left\lfloor\frac{\mathrm{n}}{4}\right\rfloor + 1.$$

دسته بندی گراف‌ها با عدد احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی کوچک

قضیه ۱. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n باشد. در این‌صورت $\gamma_{m2r}(G) = 2$ اگر و تنها اگر $G \cong K_2$ باشد.

اثبات: اثبات یک طرف بدیهی است. برای اثبات طرف دیگر فرض کنید $\gamma_{m2r}(G) = 2$ باشد. به وضوح $|V_1| = 2$. لذا $V_0 \cup V_2 \cup V_{12} = \emptyset$ که در این صورت $G \cong K_2$ است.

قضیه ۲. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n باشد. در این‌صورت $\gamma_{m2r}(G) = 3$ اگر و تنها اگر

(الف) $G \in \{P_3, K_3\}$،

(ب) G گرافی است که از $K_2 + H$ یا $\overline{K_2} + H$ که در آن H گرافی از مرتبه $n-3$ می‌باشد، با افزودن یک راس و مجاور کردن آن به بعضی از راس‌های K_2 یا $\overline{K_2}$ به‌دست می‌آید.

(ج) G گرافی است که از $K_1 + F$ که در آن F گرافی از مرتبه $n-3$ می‌باشد، با الصاق یک برگ در K_1 بدست می‌آید.

اثبات: اثبات یک طرف بدیهی است. برای اثبات طرف دیگر فرض کنید $\gamma_{m2r}(G) = 3$ باشد. در این‌صورت یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

(الف) $|V_1| = 3$،

(ب) $|V_1| = 2$ و $|V_2| = 1$،

(ج) $|V_1| = |V_{12}| = 1$.

بررسی حالت (الف): با بررسی ساده به این نتیجه می‌رسیم که $G \in \{P_3, K_3\}$.

بررسی حالت (ب): فرض کنید $V_1 = \{u, v\}$ و $V_2 = \{w\}$ باشند. به‌وضوح هر راس از $V(G) - \{u, v, w\}$ باید با w مجاور باشد. از طرف دیگر، دقیقاً فقط یکی از راس‌های u و v باید با تمام راس‌های در $V(G) - \{u, v, w\}$ مجاور باشد، مثلاً u. به‌علاوه راس v با هیچ‌کدام از راس‌های در $V(G) - \{u, v, w\}$ مجاور نیست. چون G گراف همبند است، پس راس v باید حداقل با یکی از راس‌های u یا w مجاور باشد. با توجه به مفروضات بالا نتیجه می‌گیریم که G گرافی است که از $K_2 + H$ یا $\overline{K_2} + H$ که در آن H گرافی از مرتبه $n-3$ می‌باشد، با افزودن یک راس و مجاور کردن آن به بعضی از راس‌های K_2 یا $\overline{K_2}$ به دست می‌آید.

بررسی حالت (ج): فرض کنید $V_1 = \{x\}$ و $V_{12} = \{y\}$ باشند. به وضوح هر رأس $\mathrm{V(G)} - \{\mathrm{x,y}\}$ با y مجاورند و x با هیچ‌کدام از رأس‌های $\mathrm{V(G)} - \{\mathrm{x,y}\}$ مجاور نمی‌باشد. چون G گراف همبند است پس $xy \in E(G)$. بنابراین G گرافی است که از $K_1 + F$، که در آن F گرافی از مرتبه $n-2 \geq 1$ می‌باشد، با الصاق یک برگ در K_1 بدست می‌آید.

دسته بندی گراف‌های G با کمر حداقل ۵ و از مرتبه n با عدد احاطه‌گری ماکسیمال ۲-رنگین کمانی $n-2$

لم ۳. اگر G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq 8$ و $diam(G) \geq 7$ باشد، آن‌گاه $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$.

اثبات: فرض $P: x_1 - x_2 - \cdots - x_{diam(G)+1}$ مسیر قطری برای گراف G باشد. واضح است که

$$f = (\{x_2, x_4, x_6\}, V(G) - \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}, \{x_3, x_7\}, \emptyset\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این‌رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$.

نتیجه ۴. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 7$ و $\gamma_{m2r}(G) = n - 2$ باشد. در این‌صورت $diam\ (G) \leq 6$ می‌باشد.

لم ۵. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 8$ و $g(G) \geq 8$ باشد. در این‌صورت $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$.

اثبات: فرض کنید $C_{\mathrm{m}} = (x_1x_2 \dots x_m)$ یک دور به طول $m \geq 8$ در گراف G باشد. در این‌صورت

$$f = (\{x_2\,, x_4, x_6\}, V(G) \\ -\{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}, \{x_3, x_7\}, \emptyset\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این‌رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$.

نتیجه ۶. اگر $\gamma_{m2r}(G) = n - 2$ باشد، آن‌گاه $g(G) \leq 7$ است.

فرض کنید برای $i = 1,2, \dots, k$، G_iها گراف‌های متمایزی باشند که در آن $k \geq 2$، و $u_i \in V(G_i)$. گراف $G_1{}^\circ G_2{}^\circ \dots {}^\circ G_k$، گرافی است که از اجتماع گراف‌های G_1، G_2،...و G_k با انطباق راس‌های u_1، u_2، ...و u_k در راس u_1 به‌دست می‌آید.

قضیه ۷. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 6$ و $g(G) \in \{6,7\}$ باشد. در این‌صورت $\gamma_{m2r}(G) = n - 2$ اگر و فقط اگر $G \in \{C_6, C_6{}^\circ K_2, C_7\}$.

اثبات: فرض کنید G یک گراف همبند باشد. فرض کنید $C_{g(G)} = (x_1x_2 \dots x_{g(G)})$ یک دور به طول $g(G) \in \{6,7\}$ در گراف G باشد. حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱. $g(G) = 6$.

اگر $n = 6$ باشد، آن‌گاه $G = C_6$ که نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

پس در ادامه اثبات فرض می‌کنیم که $n \geq 7$ باشد. چون G یک گراف همبند است، لذا راسی مانند x_7 وجود دارد که به یکی از راس‌های C_6 مجاور است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید که x_1 و x_7 مجاور باشند. چون $g(G) = 6$ است، بنابراین x_7 نمی‌تواند با هیچ راسی از $V(C_6) - \{x_1\}$ مجاور باشد. حال نشان می‌دهیم که x_7 برگ است و $\deg(x_1) = 3$. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد.

اگر x_7 برگ نباشد، آن‌گاه راسی مانند x_8 وجود دارد که با x_7 مجاور می‌باشد. واضح است که

$$f = (\{x_1, x_3, x_5\}, V(G) \\ -\{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}, \{x_2, x_6\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n - 3$ می‌باشد، که تناقض است.

حال برای قسمت دیگر ادعا فرض (خلف) کنید که $\deg(x_1) \geq 4$ باشد. در این‌صورت راسی مانند x_8 وجود دارد که با x_1 مجاور است. واضح است که

$$f = (\{x_2, x_6, x_7, x_8\}, V(G) \\ -\{x_1, x_2, x_6, x_7, x_8\}, \emptyset, \{x_1\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n - 3$ می‌باشد، که تناقض است.

در پایان نشان می‌دهیم که دقیقاً یکی از راس‌های C_6 از درجه‌ی ۳ می‌باشد و بقیه‌ی راس‌هایش از درجه‌ی ۲ می‌باشند. بدون از دست دادن کلیت مسئله، زیرحالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱-۱: $\deg(x_1) = \deg(x_2) = 3$.

فرض کنید x_8 مجاور راس x_2 باشد. به وضوح

$$f = (\{x_2, x_4, x_6\}, V(G) - \\ \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_8\}, \{x_5, x_8\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n - 3$ می‌باشد، که تناقض است.

حالت ۱-۲: $\deg(x_1) = \deg(x_3) = 3$.

فرض کنید x_8 مجاور راس x_3 باشد. چون $g(G) = 6$ است، بنابراین x_7 و x_8 نمی‌تواند مجاور باشند. در این صورت

$$f = (\{x_2, x_4, x_6, x_8\}, V(G) \\ -\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\} \\ , \{x_5, x_7\}, \{x_3\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n-3$ می‌باشد، که تناقض است.

حالت ۱-۳: $\deg(x_1) = \deg(x_4) = 3$.

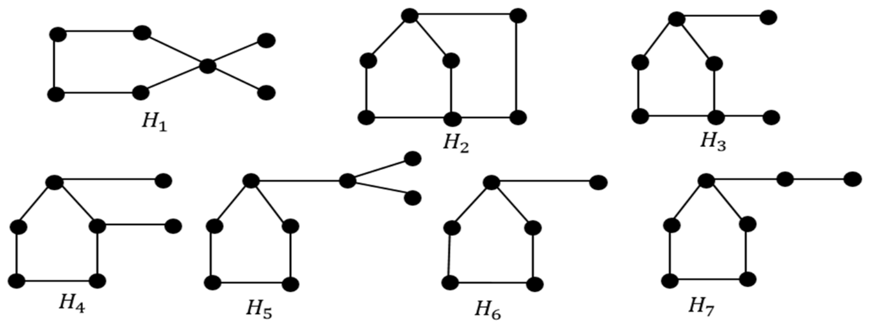
فرض کنید x_8 مجاور راس x_4 باشد. به وضوح
$f = (\{x_1, x_3, x_5\}, V(G) - \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}, \{x_2, x_6\}, \emptyset)$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n-3$ می‌باشد، که تناقض است.

حالت 2: $g(G) = 7$.

اگر $n = 7$ باشد، آن‌گاه $G = C_7$ که نتیجه مطلوب می‌باشد. پس در ادامه اثبات فرض می‌کنیم که $n \geq 8$ باشد. چون G یک گراف همبند است، لذا راسی مانند x_8 وجود دارد که به یکی از راس‌های C_7 مجاور است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید که x_1 و x_8 مجاور باشند. در این‌صورت
$f = (\{x_2, x_4, x_6\}, V(G) - \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}, \{x_3, x_7\}, \emptyset)$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n-3$ می‌باشد، که تناقض است.



خانواده گراف‌های $\mathcal{C}_5$

قضیه ۸. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 5$ و $g(G) = 5$ باشد. در این‌صورت $\gamma_{m2r}(G) = n-2$ اگر و فقط اگر $G \in \mathcal{C}_5$.

اثبات: فرض کنید $C_{g(G)} = (x_1 x_2 \dots x_5)$. اگر $n = 5$ باشد، آن‌گاه $G = C_5$ که با توجه به **گزاره الف** نتیجه می‌گیریم $\gamma_{m2r}(C_5) = 4 = n-1$ که گراف دلخواه نمی‌باشد. پس در ادامه اثبات فرض می‌کنیم که $n \geq 6$ باشد.

ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر رأس x_i که $1 \leq i \leq 5$، $\deg(x_i) \leq 4$. فرض (خلف) کنید که برای بعضی از $1 \leq i \leq 5$، داشته باشیم $\deg(x_i) \geq 5$. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید $\deg(x_1) \geq 5$ باشد. فرض کنید $\{y_1, y_2, y_3\} \subseteq N(x_1) - \{x_2, x_5\}$ باشد. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین هیچ‌کدام از راس‌های y_1، y_2 و y_3 با راس‌های در $V(C_5) - \{x_1\}$ مجاور نمی‌باشند. در این‌صورت
$f = (\{y_1, y_2, y_3, x_2\}, V(G) - \{y_1, y_2, y_3, x_1, x_2\}, \emptyset, \{x_1\})$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است. حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت ۱: برای بعضی از $1 \leq i \leq 5$، $\deg(x_i) = 4$.
بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $\deg(x_1) = 4$. فرض کنید y_1 و y_2 مجاورهای راس x_1 باشند. نشان می‌دهیم هر راس از $V(C_5) - \{x_1\}$ از درجه‌ی ۲ می‌باشد.
فرض کنید $\deg(x_3) \geq 3$ یا $\deg(x_4) \geq 3$ باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید

$\deg(x_3) \geq 3$ باشد. فرض کنید y_3 با x_3 مجاور باشد. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین y_1 و y_2 نمی‌توانند باهم مجاور باشند و هم‌چنین راس y_3 حداکثر با یکی از راس‌های y_1 و y_2 مجاور می‌باشد. در این‌صورت

$$f = (\{y_2, y_3, x_2, x_4, x_5\}, V(G) - (V(C_5) \cup \{y_2, y_3\}, \emptyset, \{x_1, x_3\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این‌رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است.

حال فرض کنید که $\deg(x_3) = \deg(x_4) = 2$ باشد. اگر یکی از رأس‌های x_2 یا x_5 از درجه حداقل ۳ باشد، فرض کنید $\deg(x_2) \geq 3$ و w با x_2 مجاور باشد. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین راس w با هیچ‌کدام از راس‌های y_1 و y_2 مجاور نمی‌باشد. در این‌صورت

$$f = (\{y_1, y_2, x_3, x_5\}, V(G) - (\{y_1, y_2, x_1, x_3, x_4, x_5\}, \{x_4\}, \{x_1\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است.

در پایان ادعا می‌کنیم که $n = 7$ می‌باشد. فرض (خلف) کنید که $n \geq 8$ است. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید که $y_1y_3 \in E(G)$. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین $y_2y_3 \notin E(G)$. در این‌صورت

$$f = (\{y_1, x_2, x_5\}, V(G) - (\{y_1, x_1, x_2, x_5\}, \{x_1\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این‌رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است.

بنابراین با توجه به مفروضات بالا نتیجه می‌گیریم که $G \cong H_1$.

در ادامه اثبات فرض می‌کنیم هر راس C_5 از درجه‌ی حداکثر ۳ باشد.

حالت۲: برای بعضی از $1 \leq i \leq 5$، $\deg(x_i) = 3$.

بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $\deg(x_1) = 3$. با توجه به **حالت ۱**، هر رأس C_5 از درجه‌ی حداکثر ۳ می‌باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که حداکثر دو راس C_5 از درجه‌ی ۳ و بقیه‌ی راس‌ها از درجه‌ی ۲ می‌باشند. فرض (خلف) کنید که سه راس متوالی C_5 از درجه‌ی ۳ باشند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید y_1، y_2 و y_3 به‌ترتیب مجاورهای x_1، x_2 و x_3 باشند. در این‌صورت

$$f = (\{x_1, x_2, x_4\}, V(G) - (\{y_2, x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_5, y_2\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این‌رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است.

حال در حالت دیگر، فرض (خلف) کنید که سه راس نامتوالی از C_5 از درجه‌ی ۳ باشند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید y_1، y_2 و y_3 به‌ترتیب مجاورهای x_1، x_2 و x_4 باشند. اگر y_1 و y_3 مجاور نباشند، آن‌گاه

$$f = (\{x_2, x_3, x_5, y_3\}, V(G) - (\{y_2, y_3, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{y_2\}, \{x_4\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این‌رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است.

حال فرض کنید y_1 و y_3 مجاور باشند. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین y_1 با هیچ‌کدام از راس‌های x_3، x_5 و y_2 مجاور نمی‌باشد. در این‌صورت

$$f = (\{y_2, x_3, x_5\}, V(G) - (\{y_2, y_3, x_3, x_4, x_5\}, \{x_4, y_3\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G است که نتیجه می‌دهد $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است.

حال زیرحالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

زیر حالت ۲-۱: دو راس نامجاور C_5 از درجه‌ی ۳ باشند.

بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید که y_1 و y_2 به‌ترتیب مجاورهای x_1 و x_3 باشند. دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

(الف): y_1 و y_2 مجاور باشند.

فرض کنید $\deg(y_1) \geq 3$ یا $\deg(y_2) \geq 3$ باشد، مثلاً $\deg(y_2) \geq 3$ باشد. فرض کنید y_3 مجاور y_2 باشد. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین y_3 با هیچ‌کدام از راس‌های x_2، x_4 و y_1 مجاور نمی‌باشد. در این صورت

$f = (\{y_1, x_2, x_4\}, V(G) - (\{y_1, x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_1, x_5\}, \emptyset)$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این‌رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است. به این‌ترتیب نتیجه می‌گیریم که $\deg(y_1) = \deg(y_2) = 2$. نشان می‌دهیم که برای هر $i = 2,4,5$ داریم $\deg(x_i) = 2$. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $\deg(x_2) \geq 3$ باشد. فرض کنید w مجاور x_2 باشد. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین w با هیچ‌کدام از راس‌های x_3، x_5 و y_1 مجاور نمی‌باشد. در این‌صورت

$f = (\{y_1, x_3, x_5\}, V(G) - (\{y_1, y_2, x_3, x_4, x_5\}, \{y_2, x_4\}, \emptyset)$

یک **M2RDF** برای گراف G می باشد و از اینرو $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است.
حال اگر $\deg(x_4) = 3$ یا $\deg(x_5) = 3$ باشد، آن‌گاه با توجه به بررسی قبل از **حالت ۲-۱** نتیجه می‌گیریم که یک **M2RDF** با وزن حداکثر $n-3$ برای گراف G وجود دارد، که تناقض است.
با توجه به مفروضات بالا نتیجه می‌گیریم که $G \cong H_2$.
(ب): y_1 و y_2 مجاور نباشند.
ابتدا نشان می‌دهیم y_1 و y_2 برگ هستند. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $deg(y_1) \geq 2$ باشد. در این‌صورت

$f = (\{y_1, x_2, x_5\}, V(G) - \{y_1, x_1, x_2, x_5\}, \{x_1\}, \emptyset)$

یک **M2RDF** برای گراف G است که نتیجه می دهد $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است.
بنابراین برای هر $i = 1,2$، $\deg(y_i) = 1$ می‌باشد.
به این ترتیب با توجه به مفروضات بالا نتیجه می‌گیریم که $G \cong H_3$.

زیر حالت ۲-۲: دو راس مجاور C_5 از درجه‌ی ۳ باشند.

فرض کنید y_1 و y_2 به‌ترتیب مجاورهای x_1 و x_2 باشند. نشان می‌دهیم y_1 و y_2 برگ هستند. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد. لذا راسی مانند y_3 وجود دارد که با y_1 یا y_2 مجاور است، مثلاً y_1. در این صورت

$f = (\{y_1, x_3, x_5\}, V(G) - \{y_1, y_3, x_3, x_4, x_5\}, \{y_3, x_4\}, \emptyset)$

یک **M2RDF** برای گراف G است که نتیجه می دهد $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است.
به این‌ترتیب با توجه به مفروضات بالا نتیجه می‌گیریم که $G \cong H_4$.

زیر حالت ۲-۳: دقیقاً یک راس C_5 از درجه‌ی ۳ باشد.

بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید که $\deg(x_1) = 3$ و بقیه‌ی راس‌های C_5 از درجه‌ی ۲ باشند. نشان می‌دهیم که یال آویزان در x_1 حداکثر یک‌بار زیرتقسیم می‌شود. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد. لذا مسیری مانند $P: x_1w_1w_2w_3$ در گراف G وجود دارد. در این‌صورت

$f = (\{w_1, x_2, x_5\}, V(G) - \{w_1, x_1, x_2, x_5\}, \{x_1\}, \emptyset)$

یک **M2RDF** برای گراف G است که نتیجه می دهد $\gamma_{m2r}(G) \leq n-3$، که تناقض است.
حال نشان می‌دهیم $\deg(w_1) \leq 3$. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد. فرض کنید $\deg(w_1) \geq 4$ باشد. در این صورت

$f = (N(w_1), V(G) - (N(w_1) \cup \{x_1\}, \emptyset, \{w_1\})$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر n-۳ می‌باشد، که تناقض است.
به این‌ترتیب با توجه به مفروضات بالا نتیجه می‌گیریم که $G \in \{H_5, H_6, H_7\}$.

فهرست منابع

1. H. Abdollahzadeh Ahangar, J. Amjadi, S.M. Sheikholeslami, D. Kuziak, Maximal 2-rainbow domination of a graph, AKCE Int. J. Graphs and combin., 13(2) (2016), 157-164.

2. H. Abdollahzadeh Ahangar, S.M. Sheikholeslami, D. Kuziak, On the maximal 2-rainbow domination of a graph, Submitted.

3. B. Brešar, M.A. Henning, D.F. Rall, Rainbow domination in graphs, Taiwanese J. Math., 12 (2008), 213–225.

4. B. Brešar, T.K. Šumenjak, On the 2-rainbow domination in graphs, Discrete Appl. Math., 155 (2007), 2394–2400.

5. G.J. Chang, J. Wu, X. Zhu, Rainbow domination on trees, Discrete Appl. Math., 158 (2010), 8–12.

6. N. Dehgardi, S.M. Sheikholeslami, L. Volkmann, The rainbow domination subdivision numbers of graphs, Mat. Vesnik, 67 (2015), 102–114.

7. M. Falahat, S.M. Sheikholeslami, L. Volkmann, New bounds on the rainbow domination subdivision number, Filomat, 28 (2014), 615–622.

8. T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater (Eds.), Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Inc., New York (1998).

9. T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, Domination in Graphs: Advanced Topics, Marcel Dekker, Inc., New York (1998).

10. V.R. Kulli, Theory of Domination in Graphs, Vishwa International Publications (2010).

11. V.R. Kulli, B. Janakiram, The maximal domination number of a graph, Graph Theory Notes of New York, vol. XXXIII, New York Academy of Sciences (1997), 11–13.

12. V.R. Kulli, B. Janakiram, A note on maximal domination number of a graph, Graph Theory Notes of New York, vol. XXXIII, New York Academy of Sciences XXXIII (2000), 35–36.

13. D. Meierling, S.M. Sheikholeslami, L. Volkmann, Nordhaus-Gaddum bounds on the k-rainbow domatic number of a graph, Appl. Math. Lett., 24 (2011), 1758–1761.

14. S.M. Sheikholeslami, L. Volkmann, The k-rainbow domatic number of a graph, Discuss. Math. Graph Theory, 32 (2012), 129–140.

15. D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, Inc. (2000).

16. G. Xu, 2-rainbow domination of generalized Petersen graphs $P(n,3)$, Discrete Appl. Math., 157 (2009), 2570–2573.