

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره پنجاهم، مهر و آبان ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## بررسی بعد متریک، گراف خطی و برخی گراف‌های متناظر با گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی

مژگان افخمی

گروه ریاضی، دانشگاه نیشابور، نیشابور، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۸/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۳/۲۶

### چکیده

فرض کنیم  $(P, \leq)$  یک مجموعه مرتب جزئی با کوچکترین عضو 0 باشد. گراف مقسوم علیه صفر  $P$  که با  $\Gamma(P)$  نشان داده می‌شود، گرافی ساده و غیر جهت‌دار است که مجموعه رئوس آن، همه مقسوم علیه‌های صفر غیر صفر  $P$  می‌باشد و دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  مجاورند اگر و فقط اگر  $\{x, y\}^l = \{0\}$  که برای رأس  $z$ ،  $\{z\}^l$  مجموعه همه کران‌های پایین  $z$  می‌باشد. گراف خطی گراف  $G$ ، که با  $L(G)$  نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوسش برابر با مجموعه یال‌های گراف  $G$  است و دو رأس آن مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر آن‌ها در  $G$  رأس مشترک داشته باشند. گراف  $G$  را گراف خطی نامیم هرگاه گرافی مانند  $H$  موجود باشد به طوری که  $G$  با  $L(H)$  یکرخت باشد. در این مقاله، گراف مقسوم علیه صفر خطی یک مجموعه مرتب جزئی را مطالعه می‌کنیم و تمام مجموعه‌های مرتب جزئی با حداکثر سه اتم که  $\Gamma(P)$  متناظر با آن‌ها، گراف خطی است را مشخص می‌کنیم. همچنین تمام گراف‌های همبند با حداکثر پنج رأس و نیز تمام گراف‌های کامل و دو بخشی کامل شاخه‌دار، که متناظر با گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی می‌باشند را رده‌بندی می‌کنیم. به علاوه، بعد متریک  $\Gamma(P)$  را مطالعه می‌نماییم.

**واژه‌های کلیدی:** مجموعه مرتب جزئی، گراف مقسوم علیه صفر، گراف خطی، گراف شاخه‌دار، بعد متریک.

## ۱- مقدمه

در این مقاله برخی از ویژگی‌های گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش دوم، تمام مجموعه‌های مرتب جزئی با حداکثر سه اتم که  $\Gamma(P)$  متناظر با آن‌ها، گراف خطی است را مشخص می‌کنیم.

در بخش سوم و چهارم این مقاله، همه گراف‌های همبند با حداکثر پنج رأس و نیز همه گراف‌های کامل و دو بخشی کامل شاخه‌دار، که می‌توانند متناظر با گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی باشند را رده‌بندی می‌کنیم. سرانجام در بخش پنجم، بعد متریک گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

اکنون به یادآوری برخی تعاریف و نمادها در گراف‌ها [۱۶] و مجموعه‌های مرتب جزئی [۱۷] می‌پردازیم. در گراف  $G$ ، فاصله بین دو رأس متمایز  $a$  و  $b$  که با  $d(a,b)$  نشان داده می‌شود، عبارتست از طول کوتاهترین مسیر بین  $a$  و  $b$ ، در صورت وجود؛ در غیر این صورت قرار می‌دهیم  $d(a,b) = \infty$ . گراف  $G$  همبند نامیده می‌شود هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن، مسیری وجود داشته باشد. فرض کنیم  $G$  گرافی همبند باشد و  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  زیر مجموعه‌ای مرتب از مجموعه رأس‌های  $G$  باشد. برای رأس  $v$  از  $G$ ، بردار

$$r(v | W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$$

یک نمایش<sup>۲</sup> از رأس  $v$  نسبت به  $W$  نامیده می‌شود. مجموعه  $W$  را یک مولد متریک<sup>۳</sup> برای  $G$  نامیم هرگاه رأس‌های متمایز در  $G$  دارای نمایش‌های مختلف نسبت به  $W$  باشند. یک مولد متریک با کوچکترین مرتبه ممکن را پایه متریک<sup>۴</sup> برای  $G$  نامیم و مرتبه آن را بعد متریک<sup>۵</sup>  $G$  گوئیم و با نماد  $\dim(G)$  نشان می‌دهیم. یک خوشه در گراف  $G$ ، یک زیر گراف کامل بیشین است و تعداد رأس‌های بزرگترین خوشه از  $G$  را عدد خوشه‌ای<sup>۶</sup> گوئیم و با نماد  $\omega(G)$  نشان می‌دهیم. برای دو رأس متمایز  $x$  و  $y$ ، اگر  $x$  و  $y$  مجاور باشند از

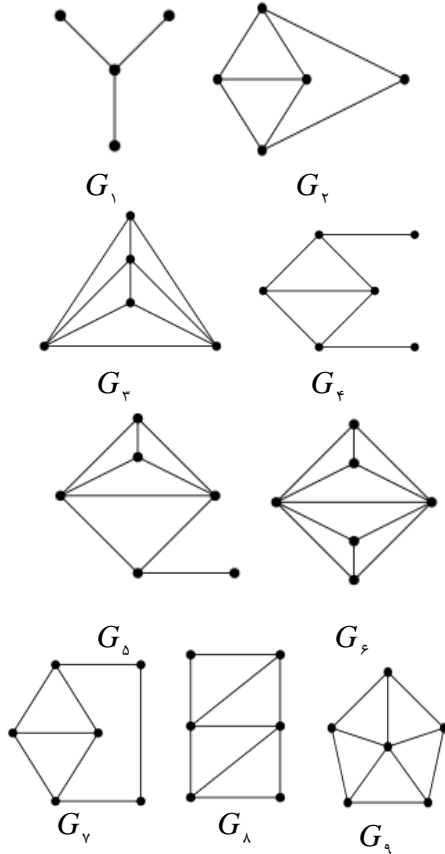
بررسی گراف‌های وابسته به ساختارهای جبری، یکی از شاخه‌های جدید ریاضیات می‌باشد که پیوندی میان نظریه جبر و گراف ایجاد کرده است و در چند دهه اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. یکی از مهم‌ترین گراف‌های جبری، گراف مقسوم علیه صفر است که برای اولین بار در سال ۱۹۸۸ در [۱] برای یک حلقه جابجایی و یک‌دار معرفی شد. گراف مقسوم علیه صفر بر روی دیگر ساختارهای جبری مانند نیم‌گروه‌ها و مجموعه‌های مرتب جزئی نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱].

در [۱۰]، گراف مقسوم علیه صفر مجموعه مرتب جزئی  $(P, \leq)$  با کوچکترین عضو  $0$ ، که با  $\Gamma(P)$  نشان می‌دهیم، به صورت گرافی ساده و غیر جهت‌دار تعریف شده که مجموعه رأس‌های آن، مقسوم علیه‌های صفر غیر بدیهی  $P$  می‌باشد و دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  با هم مجاورند اگر و فقط اگر  $\{x, y\}' = \{0\}$ ، که برای  $z \in P$ ،  $\{z\}'$  مجموعه کران‌های پایین  $z$  در  $P$  می‌باشد.

گراف خطی<sup>۱</sup> گراف  $G$  که با  $L(G)$  نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوسش برابر با مجموعه یال‌های گراف  $G$  است و دو رأس آن مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر آن‌ها در  $G$  رأس مشترک داشته باشند. گراف  $G$  را خطی می‌نامیم هرگاه گرافی مانند  $H$  وجود داشته باشد به طوری که  $G$  با  $L(H)$  یکرخت باشد. اخیراً در [۵] و [۱۲]، گراف مقسوم علیه صفر خطی یک حلقه جابجایی و گراف اشتراکی خطی ایده‌آل‌های یک مجموعه مرتب جزئی بررسی شده‌اند. از دیگر موضوعاتی که اخیراً بسیار مورد توجه قرار گرفته است، مطالعه بعد متریک گراف‌های جبری است. مفهوم بعد متریک، نخستین بار در سال ۱۹۷۵ در [۱۳] معرفی گردید و به دلیل کاربردهای فراوان آن، پژوهش‌های زیادی در این خصوص صورت گرفته است. بعد متریک گراف‌های جبری نیز اخیراً مورد بررسی قرار گرفته است [۱۴, ۱۵].

<sup>۴</sup> metric basis<sup>۵</sup> metric dimension<sup>۶</sup> clique number<sup>۱</sup> line graph<sup>۲</sup> representation<sup>۳</sup> metric generator

**قضیه ۲-۱:** گراف  $G$  گراف خطی است اگر و تنها اگر هیچ کدام از گراف‌های شکل ۱، زیرگراف القایی  $G$  نباشد.



شکل ۱

در این بخش از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم.

**نمادگذاری ۲-۲:** فرض کنیم  $P$  یک مجموعه مرتب

جزئی باشد به طوری که  $A(P) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

و  $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n$  اعداد صحیحی باشند که

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  در این صورت از نماد

$P_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  برای نشان دادن مجموعه

$$\{x \in P; x \in \bigcap_{t=1}^k \{a_{i_t}\}^u \setminus \bigcup_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \{a_j\}^u\}$$

استفاده می‌کنیم.

نماد  $x - y$  استفاده می‌کنیم و مجموعه همه رأس‌های مجاور با رأس  $x$  را با نماد  $N(x)$  نشان می‌دهیم. همچنین گراف کامل  $^y$  با  $n$  رأس را با  $K_n$  و گراف دو بخشی کامل  $^h$  که بخش‌های آن از مرتبه  $m$  و  $n$  می‌باشند را با  $K_{m,n}$  نشان می‌دهیم.  $K_{\setminus n}$  گراف ستاره  $^9$  نامیده می‌شود و گراف دو ستاره  $^{10}$  گرافی است که از دو گراف ستاره تشکیل شده که رأس‌های مرکزی آن‌ها با هم مجاور می‌باشند. مسیر و دور با  $n$  رأس را به ترتیب با  $P_n$  و  $C_n$  نشان می‌دهیم. در مجموعه مرتب جزئی  $(P, \leq)$  با کوچکترین عضو  $0$ ، عضو  $a$  اتم  $^{11}$  نامیده می‌شود هرگاه  $a \neq 0$  و برای عضو  $x \in P$ ، رابطه  $0 \leq x \leq a$  ایجاب کند  $x = 0$  یا  $x = a$ . مجموعه اتم‌های  $P$  را با  $A(P)$  نشان می‌دهیم. فرض کنیم  $S \subseteq P$ . در این صورت مجموعه کران‌های بالا و پایین  $S$  را به ترتیب با  $S''$  و  $S'$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S'' = \{x \in P; \forall s \in S, s \leq x\}$$

و

$$S' = \{x \in P; \forall s \in S, x \leq s\}.$$

مجموعه مقسوم علیه‌های صفر  $P$  که با  $Z(P)$

نشان داده می‌شود، عبارتست از

$$Z(P) = \{x \in P; \exists 0 \neq y \in P, \{x, y\}' = \{0\}\}$$

و  $Z^*(P) = Z(P) \setminus \{0\}$ . واضح است که اگر

$$|A(P)| = 1, \text{ آنگاه } Z^*(P) = \emptyset.$$

## ۲- گراف مقسوم علیه صفر خطی

در این بخش، گراف مقسوم علیه صفر خطی مجموعه

مرتب جزئی  $P$  را مطالعه می‌کنیم و تمام مجموعه‌های

مرتب جزئی با حداکثر سه اتم که  $\Gamma(P)$  متناظر با آن‌ها،

گراف خطی است را شناسایی می‌نماییم. بدین منظور، ابتدا

به یادآوری قضیه زیر از [۱۸]، که در آن گراف‌های خطی

رده‌بندی شده‌اند، می‌پردازیم.

<sup>10</sup> double star graph

<sup>11</sup> atom

<sup>y</sup> complete graph

<sup>h</sup> complete bipartite graph

<sup>9</sup> star graph

می‌دهد و در نتیجه بنا بر قضیه ۲-۱،  $\Gamma(P)$  گراف خطی نخواهد بود که خلاف فرض قضیه است.

(۲) اگر  $1 \leq j \leq n$  وجود داشته باشد به طوری که  $|P_j| \geq 3$ ، آنگاه رئوس مجموعه  $\{a_i, a_j, x, y\}$ ، که در آن  $x, y \in P_j \setminus \{a_j\}$  و  $1 \leq i \neq j \leq n$  تشکیل زیرگراف القایی یکرخت با  $G_1$  می‌دهد که امکان‌پذیر نمی‌باشد.

(۳) فرض کنیم  $1 \leq i \leq n$  وجود داشته باشد به طوری که  $b \in P_{i_1, \dots, i_k}$  اگر  $a_i' \in P_i \setminus \{a_i\}$  و  $|P_i| = 2$  وجود داشته باشد که در آن  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ،  $1 < | \{i_1, \dots, i_k\} | < n$  و  $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$  آنگاه با فرض  $a_{i_1} \in P_{i_1}$  و  $a_{i_2} \in P_{i_2}$ ، رئوس مجموعه  $\{a_i, a_i', b, a_{i_1}, a_{i_2}\}$  تشکیل زیرگراف القایی یکرخت با  $G_2$  می‌دهد که امکان‌پذیر نیست.

اگر  $b \in P_{i_1, \dots, i_k}$  وجود داشته باشد، که در آن  $1 < | \{i_1, i_2, \dots, i_k\} | < n$ ،  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  و  $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$  آنگاه  $1 \leq j \leq n$  را طوری در نظر می‌گیریم که  $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$  در این صورت رئوس مجموعه  $\{a_i, a_i', b, a_j\}$  که در آن  $a_j \in P_j$  تشکیل زیرگراف القایی یکرخت با  $G_3$  می‌دهد که مجدداً امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین حکم برقرار نیست.

در ادامه این بخش، تمام مجموعه‌های مرتب جزئی با دو و سه اتم که  $\Gamma(P)$  متناظر با آن‌ها گراف خطی است را شناسایی می‌کنیم.

**گزاره ۲-۵:** فرض کنیم  $|A(P)| = 2$ . در این صورت  $\Gamma(P)$  گراف خطی است اگر و فقط اگر  $|P_1|, |P_2| \leq 2$  **اثبات:** ابتدا فرض کنیم  $\Gamma(P)$  گراف خطی باشد. بنا بر

قسمت (۲) از قضیه ۲-۴، داریم  $|P_1|, |P_2| \leq 2$ . عکس گزاره با توجه به این که  $\Gamma(P)$  یکرخت با  $K_{|P_1|, |P_2|}$  می‌باشد، که در آن  $|P_1|, |P_2| \leq 2$ ، برقرار است.

**ملاحظه ۲-۳:** با توجه به نمادگذاری ۲-۲، عبارات زیر را داریم.

(۱) برای هر دو رأس متمایز  $x, y \in P_{i_1, \dots, i_k}$  در گراف  $\Gamma(P)$ ،  $x$  و  $y$  با هم مجاور نمی‌باشند.

(۲) اگر دو مجموعه اندیس گذار  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  و  $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$  متمایز باشند، آنگاه

$$P_{i_1, \dots, i_k} \cap P_{j_1, \dots, j_k} = \emptyset.$$

به‌علاوه، هر رأس در  $P_{i_1, \dots, i_k}$  با همه رئوس  $P_{j_1, j_2, \dots, j_k}$  مجاور می‌باشد.

(۳) به ازای هر  $1 \leq i \leq n$ ،  $a_i \in P_i$  و در نتیجه  $P_i$  ناتهی است.

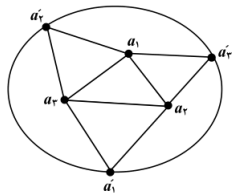
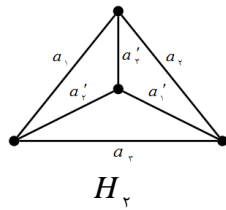
$$Z^*(P) = \left( \bigcup_{\substack{k=1 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n}}^n P_{i_1, \dots, i_k} \right) \setminus P_{1, 2, \dots, n} \quad (۴)$$

فرض کنیم  $|A(P)| = 1$ . در این صورت  $Z^*(P) = \emptyset$  و در نتیجه  $\Gamma(P)$  با  $L(K_1)$  یکرخت می‌باشد و لذا گراف خطی است. در قضیه زیر گراف خطی بودن  $\Gamma(P)$  را در حالتی که  $|A(P)| \geq 2$  بررسی می‌نماییم.

**قضیه ۲-۴:** فرض کنیم  $|A(P)| \geq 2$  و  $\Gamma(P)$  گراف خطی باشد. در این صورت عبارات زیر برقرار هستند. (۱) برای هر  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  که در آن  $| \{i_1, i_2, \dots, i_k\} | < n$ ، داریم  $|P_{i_1, \dots, i_k}| \leq 1$ . (۲) برای هر  $1 \leq i \leq n$ ، داریم  $|P_i| \leq 2$ .

(۳) اگر  $1 \leq i \leq n$  وجود داشته باشد به طوری که  $|P_i| = 2$ ، آنگاه برای هر  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  که در آن  $| \{i_1, i_2, \dots, i_k\} | < n$ ، داریم  $P_{i_1, \dots, i_k} = \emptyset$ .

**اثبات:** (۱) اگر  $P_{i_1, \dots, i_k}$  وجود داشته باشد به طوری که  $| \{i_1, i_2, \dots, i_k\} | < n$  و  $x$  و  $y$  دو عضو متمایز در  $P_{i_1, \dots, i_k}$  باشند، آنگاه رئوس مجموعه  $\{a_{i_1}, x, y, a_{i_2}\}$  که در آن  $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ ، تشکیل زیرگراف القایی یکرخت با  $G_1$  در شکل ۱ را



$L(H_3)$

شکل ۳

عکس گزاره با توجه به قضیه ۲-۴ برقرار می‌باشد.

### ۳- گراف‌های همبند با حداکثر پنج رأس

در این بخش، گراف‌های همبند با حداکثر پنج رأس که متناظر با گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی می‌باشند را مشخص می‌کنیم.

**ملاحظه ۳-۱:** برای هر دو اتم  $a$  و  $b$  در مجموعه مرتب جزئی  $P$  داریم  $\{a, b\}^l = \{0\}$  و لذا  $a$  و  $b$  در  $\Gamma(P)$  مجاور می‌باشند.

**گزاره ۳-۲:** فرض کنیم  $G$  یک گراف همبند با دو یا سه رأس باشد. در این صورت مجموعه مرتب جزئی  $P$  وجود دارد به طوری که  $G = \Gamma(P)$ .

**اثبات:** فرض کنیم  $G$  گراف همبند با دو رأس مجاور  $a$  و  $b$  باشد. مجموعه مرتب جزئی  $P = \{0, a, b\}$  که  $a, b \in A(P)$  را در نظر می‌گیریم. به وضوح  $G = \Gamma(P)$ . اکنون فرض کنیم  $G$  گراف همبند با سه رأس  $a, b, c$  باشد. اگر  $G \cong K_3$ ، آنگاه قرار می‌دهیم  $P = \{0, a, b, c\}$  به طوری که  $a, b, c \in A(P)$ . اگر  $G \cong P_3$ ، آنگاه  $P = \{0, a, b, c\}$  را طوری در نظر می‌گیریم که  $a, b \in A(P)$  و  $c \in \{a\} \setminus \{b\}$ . در نتیجه  $G = \Gamma(P)$ .

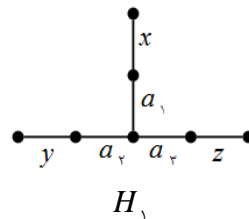
**گزاره ۲-۶:** فرض کنیم  $|A(P)| = 3$ . در این صورت  $\Gamma(P)$  گراف خطی است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) برای هر  $1 \leq i \leq 3$ ،  $|P_i| \leq 2$ .

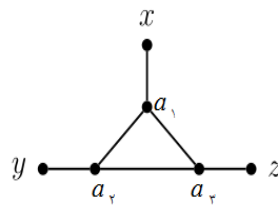
(۲) برای هر  $1 \leq i \neq j \leq 3$ ،  $|P_{ij}| \leq 1$ .

(۳) اگر  $1 \leq i \leq 3$  وجود داشته باشد به طوری که  $|P_i| = 2$ ، آنگاه برای هر  $1 \leq j \neq k \leq 3$ ،  $P_{jk} = \emptyset$ .

**اثبات:** فرض کنیم  $P$  یک مجموعه مرتب جزئی باشد که در شرایط (۱)، (۲) و (۳) صدق می‌کند. در این صورت اگر برای هر  $1 \leq i \leq 3$ ،  $|P_i| = 1$ ، آنگاه  $\Gamma(P)$  با زیرگرافی از گراف  $L(H_3)$  در شکل ۲ یکرخت است، که در آن  $a_i \in P_i$  برای  $1 \leq i \leq 3$ ،  $x \in P_{33}$  و  $y \in P_{13}$ ،  $z \in P_{23}$  لذا  $\Gamma(P)$  گراف خطی است.



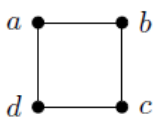
$H_3$



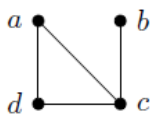
$L(H_3)$

شکل ۲

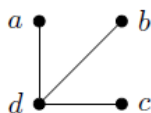
اگر  $1 \leq i \leq 3$  وجود داشته باشد به طوری که  $|P_i| = 2$ ، آنگاه  $\Gamma(P)$  با زیرگرافی از گراف  $L(H_3)$  در شکل ۳ یکرخت است که در آن برای  $1 \leq i \leq 3$ ،  $a_i, a'_i \in P_i$ . در نتیجه  $\Gamma(P)$  گراف خطی است.



شکل ۸

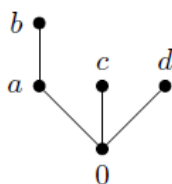


شکل ۷

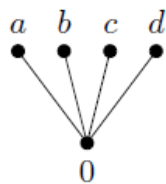


شکل ۹

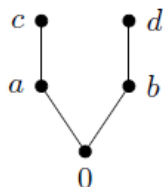
در شکل  $ia$  که  $5 \leq i \leq 9$ ، مجموعه مرتب جزئی که گراف مقسوم علیه صفر آن شکل  $i$  است، نشان داده شده است. بنابراین همه گراف‌های همبند با چهار رأس به جز شکل ۴، می‌توانند گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی باشند.



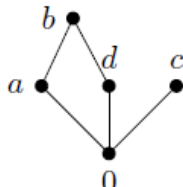
شکل ۶a



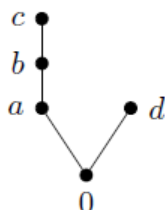
شکل ۵a



شکل ۸a



شکل ۷a

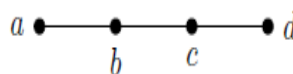


شکل ۹a

**لم ۳-۳:** هر رأس در  $\Gamma(P)$  با حداقل یک اتم در  $P$  مجاور می‌باشد.

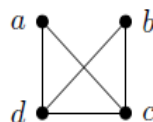
**اثبات:** فرض کنیم رأس  $x$  در  $\Gamma(P)$  با هیچ اتمی مجاور نباشد. پس برای هر اتم  $a \in A(P)$ ،  $x \in \{a\}''$ . بنابراین  $x \notin Z(P)$  که امکان‌پذیر نیست.

**قضیه ۳-۴:** فرض کنیم  $G$  یک گراف همبند با چهار رأس باشد. در این صورت مجموعه مرتب جزئی  $P$  وجود دارد که  $G = \Gamma(P)$  اگر و فقط اگر  $G$  یکریخت با گراف  $P_4$  که در شکل ۴ رسم شده است، نباشد.

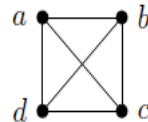


شکل ۴

**اثبات:** فرض کنیم  $G$  گراف شکل ۴ باشد و مجموعه مرتب جزئی  $P$  موجود باشد به طوری که  $G = \Gamma(P)$ . در این صورت چون  $G$  دوری به طول ۳ ندارد، لذا  $|A(P)| \leq 2$  و نیز چون  $Z^*(P) \neq \emptyset$ ، لذا  $|A(P)| < 1$ . بنابراین داریم  $|A(P)| = 2$  و  $Z^*(P) = \{a, b, c, d\}$ . با توجه به لم ۳-۳،  $A(P) = \{a, b\}$  و  $A(P) = \{c, d\}$  امکان‌پذیر نمی‌باشد. لذا فرض کنیم  $A(P) = \{b, c\}$ . در این صورت داریم  $a \in \{c\}'' \setminus \{b\}''$  و  $d \in \{b\}'' \setminus \{c\}''$  که نتیجه می‌دهد  $\{a, d\}' = \{0\}$  که با توجه به مجاور نبودن  $a$  و  $d$  امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین  $G$  نمی‌تواند گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی باشد. به‌عکس، فرض کنیم  $G$  یک گراف همبند با چهار رأس به جز گراف شکل ۴ باشد. در این صورت  $G$  یکی از گراف‌های شکل ۵ تا ۹ می‌باشد.

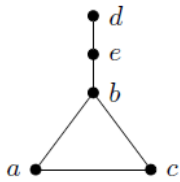


شکل ۶

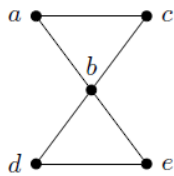


شکل ۵

**قضیه ۳-۷:** فرض کنیم  $G$  یک گراف همبند با پنج رأس باشد. در این صورت مجموعه مرتب جزئی  $P$  وجود دارد به طوری که  $G = \Gamma(P)$  اگر و فقط اگر  $G$  با هیچ یک از گراف‌های رسم شده در شکل‌های ۱۱ تا ۱۹ یکرخت نباشد.

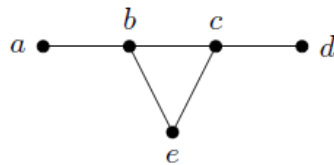


شکل ۱۲

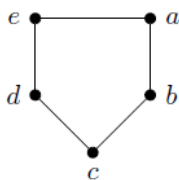


شکل ۱۱

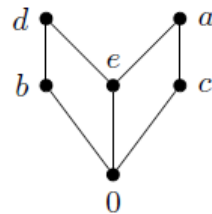
**ملاحظه ۳-۵:** با توجه به قضیه ۳-۴، مسیر  $P_4$  نمی‌تواند گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی باشد. اما مجموعه مرتب جزئی  $P$  وجود دارد به طوری که  $P_4$  زیر گراف القایی  $\Gamma(P)$  باشد. به عنوان مثال گراف شکل ۱۰ و مجموعه مرتب جزئی شکل ۱۰a را در نظر بگیرید.



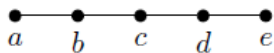
شکل ۱۰



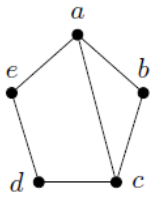
شکل ۱۳



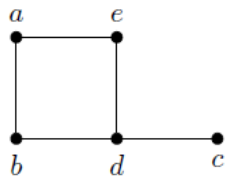
شکل ۱۰a



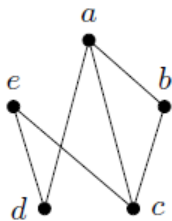
شکل ۱۴



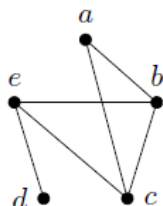
شکل ۱۶



شکل ۱۵



شکل ۱۸



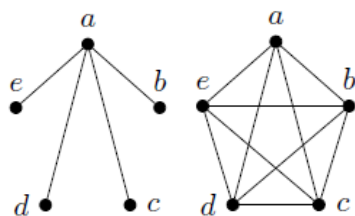
شکل ۱۷

**گزاره ۳-۶:** فرض کنیم  $P_n$  مسیری با  $n \geq 4$  رأس  $C_n$  دوری با  $n \geq 5$  رأس باشد. در این صورت  $P_n$  و  $C_n$  نمی‌توانند گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی باشند.

**اثبات:** بنا به قضیه ۳-۴، مسیر  $P_4$  نمی‌تواند گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی باشد. فرض کنیم مجموعه مرتب جزئی  $P$  موجود باشد به طوری که  $\Gamma(P) = P_n$  و  $n \geq 5$ . با در نظر گرفتن هر دو رأس مجاور در  $P_n$  به عنوان اتم در  $P$ ، چون  $n \geq 5$ ، رأسی در  $P_n$  وجود دارد که با هیچ کدام از اتم‌ها مجاور نیست و بنا بر لم ۳-۳، امکان‌پذیر نمی‌باشد. با به کار بردن استدلال مشابه و با توجه به لم ۳-۳، دور  $C_n$  برای  $n \geq 5$ ، نیز نمی‌تواند گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی باشد.

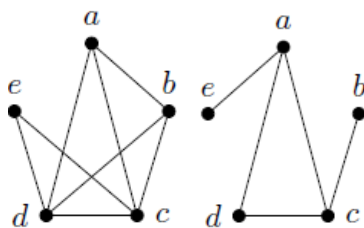
می‌دهد که نتیجه  $a \in \{e\}^u \setminus \{b, c\}^u$  که نتیجه می‌دهد  $\{a, d\}^l = \{0\}$  و لذا  $a$  و  $d$  مجاور می‌باشند که امکان‌پذیر نیست. اگر  $G$  گراف شکل ۱۸ باشد و مجموعه مرتب جزئی  $P$  وجود داشته باشد به طوری که  $A(P) = \{a, b, c\}$ ، آنگاه  $G = \Gamma(P)$  که  $e \in \{a, b\}^u \setminus \{c\}^u$  و  $d \in \{b, c\}^u \setminus \{a\}^u$  نتیجه می‌دهد  $\{a, e\}^l \neq \{0\}$  که با توجه به مجاور بودن  $d$  و  $e$  امکان‌پذیر نیست. اگر  $G$  گراف شکل ۱۹ باشد و مجموعه مرتب جزئی  $P$  وجود داشته باشد به طوری که  $G = \Gamma(P)$ ، آنگاه بنا بر لم ۳-۳، داریم  $A(P) = \{a, c\}$ . در نتیجه  $b \in \{a\}^u \setminus \{c\}^u$  و نتیجه می‌شود  $e, d \in \{c\}^u \setminus \{a\}^u$  که با توجه به مجاور نبودن  $e$  و  $b$  امکان‌پذیر نیست.

به عکس، فرض کنیم  $G$  گرافی همبند با پنج رأس باشد که با هیچ یک از گراف‌های شکل ۱۱ تا ۱۹ یکرخت نباشد. در این صورت  $G$  با یکی از گراف‌های شکل ۲۰ تا ۳۱ یکرخت است.



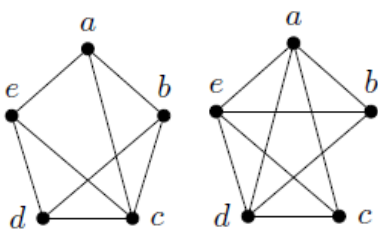
شکل ۲۱

شکل ۲۰



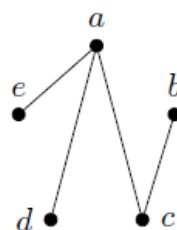
شکل ۲۳

شکل ۲۲



شکل ۲۵

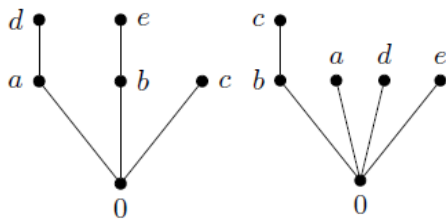
شکل ۲۴



شکل ۱۹

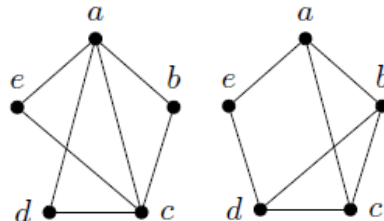
**اثبات:** فرض کنیم  $G$  گراف شکل ۱۱ باشد و مجموعه مرتب جزئی  $P$  موجود باشد به طوری که  $G = \Gamma(P)$  که  $\omega(G) = 3$ ، لذا  $|A(P)| = 3$ . بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض کنیم  $A(P) = \{a, b, c\}$ . چون  $d$  و  $e$  با اتم‌های  $a$  و  $c$  مجاور نیستند، لذا داریم  $d, e \in \{a, c\}^u$ . از طرفی چون  $d$  و  $e$  مجاور هستند، داریم  $\{d, e\}^l = \{0\}$  که امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین  $G$  گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی نمی‌تواند باشد. با روش مشابه، گراف شکل ۱۲ نیز نمی‌تواند گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی باشد. با توجه به گزاره ۳-۳، گراف شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نیز نمی‌توانند گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی باشند. اکنون فرض کنیم  $G$  گراف شکل ۱۵ باشد و مجموعه مرتب جزئی  $P$  موجود باشد به طوری که  $G = \Gamma(P)$ . به وضوح  $|A(P)| = 2$ . بنا بر لم ۳-۳، داریم  $A(P) = \{b, d\}$  یا  $A(P) = \{d, e\}$ . اگر  $A(P) = \{d, e\}$ ، آنگاه  $a \in \{d\}^u \setminus \{b\}^u$  و  $c \in \{b\}^u \setminus \{d\}^u$  که ایجاب می‌کند  $a$  و  $c$  مجاور باشند و این امکان‌پذیر نیست. به طریق مشابه  $A(P) = \{d, e\}$  نیز امکان‌پذیر نمی‌باشد. اگر  $G$  گراف شکل ۱۶ باشد و مجموعه مرتب جزئی  $P$  موجود باشد که  $G = \Gamma(P)$ ، آنگاه داریم  $A(P) = \{a, b, c\}$ ،  $e \in \{b, c\}^u \setminus \{a\}^u$  و  $d \in \{a, b\}^u \setminus \{c\}^u$  که نتیجه می‌دهد  $\{e, d\}^l \neq \{0\}$  که امکان‌پذیر نمی‌باشد. اگر  $G$  گراف شکل ۱۷ باشد و مجموعه مرتب جزئی  $P$  موجود باشد که  $G = \Gamma(P)$ ، آنگاه بنا بر لم ۳-۳، داریم  $A(P) = \{b, c, e\}$ . با توجه به مجاورت‌ها در گراف  $G$  داریم  $d \in \{b, c\}^u \setminus \{e\}^u$  و





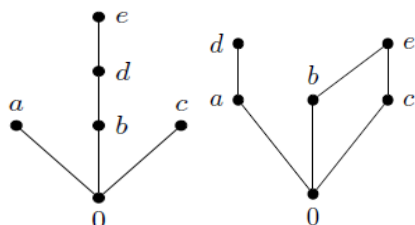
شکل ۲۴a

شکل ۲۵a



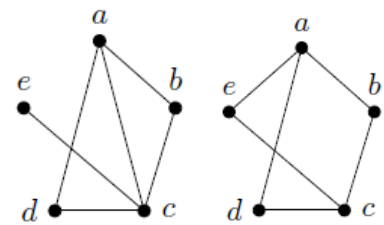
شکل ۲۶

شکل ۲۷



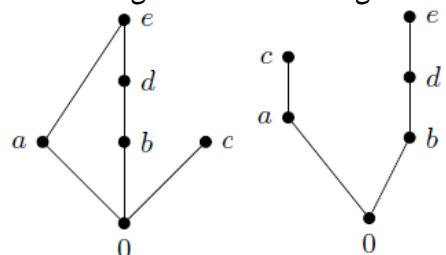
شکل ۲۶a

شکل ۲۷a



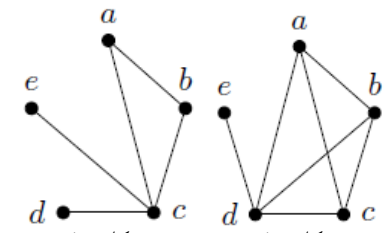
شکل ۲۸

شکل ۲۹



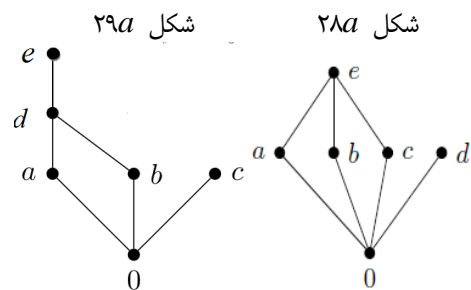
شکل ۲۸a

شکل ۲۹a



شکل ۳۰

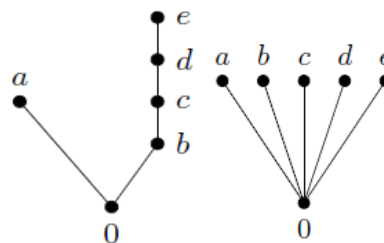
شکل ۳۱



شکل ۳۰a

شکل ۳۱a

اکنون با در نظر گرفتن مجموعه مرتب جزئی شکل ۲۰a تا ۳۱a، به راحتی دیده می‌شود که گراف شکل  $i$  با گراف مقسوم علیه صفر مجموعه مرتب جزئی شکل  $ia$ ، که  $۲۰ \leq i \leq ۳۱$ ، یکرخت می‌باشد و لذا حکم برقرار است.



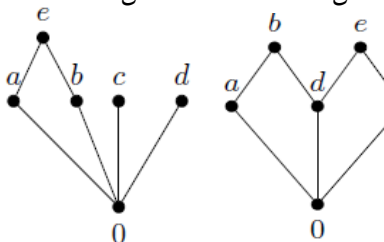
شکل ۲۰a

شکل ۲۱a

### ۴- گراف کامل و دو بخشی کامل

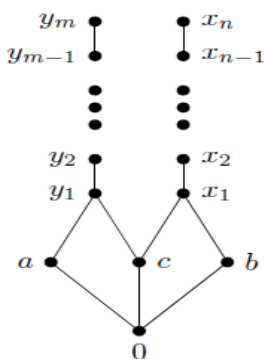
#### شاخه‌دار

فرض کنیم  $a$  راسی در گراف  $G$  باشد و  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  مجموعه‌ای از راس‌های انتهایی (یعنی راس از درجه یک) باشد که با راس  $a$  مجاور می‌باشند. در این صورت مجموعه راس‌های  $\{x_1, \dots, x_n\}$  به همراه یال‌های  $a-x_1, \dots,$

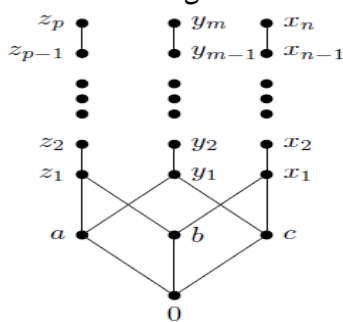


شکل ۲۱a

شکل ۲۲a



شکل ۳۳

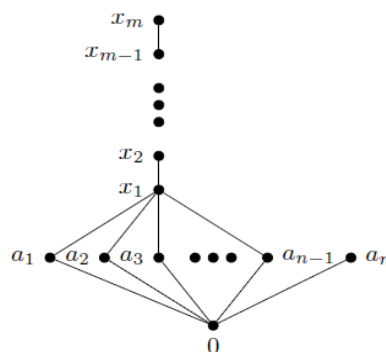


شکل ۳۴

در رأس  $a$  نامیده می‌شود و با  $a-X$  نشان داده می‌شود [۷]. گراف کامل  $K_n$  به همراه شاخه‌های  $a_1-X_1, a_2-X_2, \dots, a_m-X_m$  را با  $K_n(m)$  نشان می‌دهیم که  $1 \leq m \leq n$ .

توجه کنیم  $K_1(1)$  و  $K_2(1)$  گراف ستاره هستند و  $K_2(2)$  گراف دو ستاره می‌باشد. همچنین گراف دو بخشی کامل  $K_{m,n}$  با شاخه  $t$  با  $K_{m,n}(t)$  نشان می‌دهیم.

**مثال ۱-۴:** گراف  $K_n$  برای  $n > 1$  و گراف  $K_n(1)$  برای  $n \geq 1$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $P = \{0, a_1, \dots, a_n\}$  یک مجموعه مرتب جزئی باشد به طوری که  $A(P) = \{a_1, \dots, a_n\}$ . در این صورت داریم  $\Gamma(P) \cong K_n$ . حال فرض کنیم  $a$  رأسی از  $K_n$  باشد و  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  به طوری که  $a-X$  شاخه‌ای در  $K_n$  در رأس  $a$  باشد. مجموعه مرتب جزئی  $P$  در شکل ۳۲ را در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم  $\Gamma(P) = K_n(1)$ .



شکل ۳۲

**مثال ۲-۴:** مجموعه‌های مرتب جزئی شکل‌های ۳۳ و ۳۴ را در نظر بگیریم. در این صورت گراف مقسوم علیه صفر آن‌ها به ترتیب با  $K_2(2)$  و  $K_3(3)$  یکرخت می‌باشد.

**قضیه ۳-۴:** گراف  $K_n(m)$  گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی است اگر و فقط اگر  $m, n \notin \{2\}$ .

**اثبات:** ابتدا فرض کنیم  $G = \Gamma(P)$  یک گراف دو ستاره با مرکزهای  $a_1$  و  $b_1$  باشد به طوری که رأس‌های انتهایی مجاور با  $a_1$  و  $\{a_2, \dots, a_n\}$  و رأس‌های انتهایی مجاور با  $b_1$  باشند. در این صورت بنا بر لم ۳-۳،  $A(P) = \{a, b, a_2, \dots, a_n\}$  که  $a_2 \in \{a_1\}' \setminus \{b_1\}''$  و  $a_3 \in \{b_1\}'' \setminus \{a_1\}''$  نتیجه می‌دهد  $\{a_2, b_2\}' = \{0\}$  که با توجه به مجاور نبودن  $a_2$  و  $b_2$  امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین اگر  $K_n(m)$  گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه  $m, n \notin \{2\}$ .

به عکس، فرض کنیم  $n \neq 2$  و  $m \neq 2$ . با توجه به مثال ۱-۴،  $K_n(1)$  گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی می‌باشد. حال فرض کنیم  $m \geq 3$

<sup>۱۱</sup> horn

پس  $\{a_i\}^l \setminus \{b_i\}^u \in x_i$ . اما در این صورت  $\{x_1, a_1\}^l = \{0\}$  که امکان پذیر نمی‌باشد.

### ۵- بعد متریک $\Gamma(P)$

در این بخش فرض می‌کنیم  $P$  یک مجموعه مرتب جزئی متناهی با کوچکترین عضو  $0$  باشد و  $|A(P)| > 1$ . برای مطالعه بعد متریک گراف  $\Gamma(P)$  ابتدا ملاحظه زیر را بیان می‌کنیم.

**ملاحظه ۵-۱:** با توجه به نمادگذاری ۲-۲، مجموعه‌های

$P_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  که  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  به جز

$P_{i_1, \dots, i_n}$ ، افزایی برای مجموعه رئوس  $\Gamma(P)$  می‌باشند.

به‌علاوه، برای هر دو رأس متمایز  $x, y \in P_{i_1, i_2, \dots, i_k}$

داریم  $N(x) = N(y)$ .

**لم ۵-۲:** فرض کنیم  $W$  یک مولد متریک برای

$\Gamma(P)$  باشد. در این صورت حداکثر یک رأس از هر یک

از مجموعه‌های  $P_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  که

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  می‌تواند در  $W$

نباشد.

**اثبات:** فرض کنیم دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  در

$P_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  موجود باشد به طوری که  $x, y \notin W$ . در

این صورت با توجه به ملاحظه ۵-۱، داریم

$r(x | W) = r(y | W)$  که با توجه به این که  $W$

یک مولد متریک برای  $\Gamma(P)$  است، امکان پذیر

نمی‌باشد. لذا حداکثر یک رأس از هر یک از مجموعه‌های

$P_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  که  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  می‌تواند

در  $W$  نباشد.

اکنون با توجه به افراز ارائه شده برای مجموعه رئوس

$\Gamma(P)$  در ملاحظه ۵-۱ و با استفاده از لم ۵-۲، در حالتی

که هر یک از مجموعه‌های  $P_{i_1, i_2, \dots, i_k}$

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ، در صورت ناتهی بودن

بیش از یک عضو داشته باشند، بعد متریک  $\Gamma(P)$  را

محاسبه می‌نماییم.

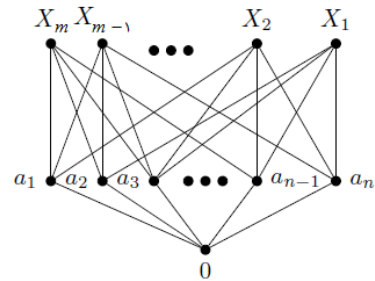
**قضیه ۵-۳:** فرض کنیم  $P$  یک مجموعه مرتب جزئی

باشد که در آن هر یک از مجموعه‌های  $P_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  که

مجموعه مرتب جزئی  $P$  در شکل ۳۵ را در نظر

می‌گیریم. در این صورت داریم  $\Gamma(P) \cong K_n(m)$  و

لذا حکم برقرار است.



شکل ۳۵

**قضیه ۴-۴:** گراف  $K_{m,n}$  گراف مقسوم علیه صفر یک

مجموعه مرتب جزئی می‌باشد ولی  $K_{m,n}(t)$  که

$m, n \geq 2$  و  $t \geq 1$ ، گراف مقسوم علیه صفر یک

مجموعه مرتب جزئی نمی‌باشد.

**اثبات:** مجموعه مرتب جزئی  $P$  را طوری در نظر

می‌گیریم که  $A(P) = \{a_i, b_i\}$  و

برای  $2 \leq i \leq m$   $a_i \in \{b_i\}^u \setminus \{a_i\}^u$  و

برای  $2 \leq j \leq n$   $b_j \in \{a_j\}^u \setminus \{b_j\}^u$  در این

صورت داریم  $\Gamma(P) \cong K_{m,n}$ .

اکنون گراف  $K_{m,n}(t)$  که  $m, n \geq 2$  و  $t \geq 1$  را در

نظر می‌گیریم به طوری که  $V_1 = \{a_1, \dots, a_m\}$  و

$V_2 = \{b_1, \dots, b_n\}$  دو بخش گراف  $K_{m,n}$  باشند.

بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض کنیم  $a_m - X$

شاخه‌ای در  $K_{m,n}(t)$  در رأس  $a_m$  باشد که در آن

$X = \{x_1, \dots, x_r\}$  فرض کنیم مجموعه مرتب

جزئی  $P$  موجود باشد به طوری که

$\Gamma(P) = K_{m,n}(t)$ . چون  $\omega(\Gamma(P)) = 2$ ، داریم

$|A(P)| = 2$ . بدون کاستن از کلیت برهان، فرض کنیم

$A(P) = \{a_i, b_i\}$ ،

$a_1, \dots, a_m \in \{a_i\}^u \setminus \{b_i\}^u$ ،

$b_1, \dots, b_n \in \{b_i\}^u \setminus \{a_i\}^u$ .

حال چون رأس  $x_1$  فقط با  $a_m$  مجاور می‌باشد،

### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله گراف مقسوم علیه صفر خطی وابسته به یک مجموعه مرتب جزئی مورد بررسی قرار گرفته است و تمام مجموعه‌های مرتب جزئی با حداکثر سه اتم که  $\Gamma(P)$  متناظر با آن‌ها، گراف خطی است، شناسایی شده‌اند. همچنین تمام گراف‌های همبند با حداکثر پنج رأس و نیز تمام گراف‌های کامل و دو بخشی کامل شاخه‌دار که متناظر با گراف مقسوم علیه صفر یک مجموعه مرتب جزئی هستند، رده‌بندی شده‌اند. به‌علاوه، با استفاده از افزایش مناسبی برای مجموعه رئوس  $\Gamma(P)$ ، بعد متریک این گراف مورد مطالعه قرار گرفته است.

**تشکر و قدردانی:** نویسنده از نظرات و پیشنهادات ارزشمند داوران محترم، صمیمانه سپاسگزاری می‌نماید. این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی با شماره ۴۰۲/۱۶۷۲۶/س می‌باشد.

یا تهی  $P_{i_1, \dots, i_k}$ ، به جز  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  باشند یا بیش از یک عضو داشته باشند. در این صورت

$$\dim(\Gamma(P)) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ P_{i_1, \dots, i_k} \notin \{\emptyset, P_{1, \dots, n}\}}} (|P_{i_1, \dots, i_k}| - 1).$$

**اثبات:** با توجه به ملاحظه ۲-۳، اعضای مجموعه  $P_{1, \dots, n}$  در مجموعه رئوس گراف  $\Gamma(P)$  قرار ندارند.

فرض کنیم  $x_{i_1, \dots, i_k}$  رأسی دلخواه در  $P_{i_1, \dots, i_k}$  در صورت وجود، باشد. فرض کنیم  $W$  یک مولد متریک دلخواه برای  $\Gamma(P)$  باشد. بنا بر لم ۵-۲ و بدون کاسته شدن از کلیت برهان، داریم

$$\bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (P_{i_1, \dots, i_k} \setminus \{x_{i_1, \dots, i_k}\}) \subseteq W.$$

بنابراین داریم

$$\dim(\Gamma(P)) \geq \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ P_{i_1, \dots, i_k} \notin \{\emptyset, P_{1, \dots, n}\}}} (|P_{i_1, \dots, i_k}| - 1).$$

اکنون فرض کنیم

$$W = \bigcup_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ P_{i_1, \dots, i_k} \notin \{\emptyset, P_{1, \dots, n}\}}} (P_{i_1, \dots, i_k} \setminus \{x_{i_1, \dots, i_k}\}).$$

برای هر دو رأس  $x_{i_1, \dots, i_k}$  و  $x_{j_1, \dots, j_{k'}}$  که به ترتیب در دو مجموعه متمایز  $W$  قرار دارند، نشان می‌دهیم

$$r(x_{i_1, \dots, i_k} | W) \neq r(x_{j_1, \dots, j_{k'}} | W)$$

چون  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \neq \{j_1, j_2, \dots, j_{k'}\}$  بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض کنیم

$$x_{i_1} \in P_{i_1} \cap W \text{ رأس } i_1 \notin \{j_1, j_2, \dots, j_{k'}\} \text{ در نظر می‌گیریم. در این صورت } d(x_{j_1, \dots, j_{k'}}, x_{i_1}) = 1 \text{ در حالی که } d(x_{i_1, \dots, i_k}, x_{i_1}) \neq 1$$

$$r(x_{i_1, \dots, i_k} | W) \neq r(x_{j_1, \dots, j_{k'}} | W).$$

پس  $W$  یک مولد متریک با کمترین رأس ممکن است و لذا پایه متریک برای  $\Gamma(P)$  می‌باشد. لذا داریم

$$\dim(\Gamma(P)) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ P_{i_1, \dots, i_k} \notin \{\emptyset, P_{1, \dots, n}\}}} (|P_{i_1, \dots, i_k}| - 1).$$

[۱۴] S. Pirzada, R. Raja, On the metric dimension of a zero-divisor graph, *Communications in Algebra*, ۴۵: ۱۳۹۹-۱۴۰۸ (۲۰۱۷).

[۱۵] S. Pirzada, M. Imran Bhat, Computing metric dimension of compressed zero divisor graphs associated to rings, *Acta University Sapientiae Mathematica*, ۱۰: ۲۹۸-۳۱۸ (۲۰۱۸).

[۱۶] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York, ۱۹۷۶.

[۱۷] B.A. Davey, H.A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, ۲۰۰۲.

[۱۸] L.W. Beineke, Characterizations of derived graphs, *Journal of Combinatorial Theory*, ۹: ۱۲۹-۱۳۵ (۱۹۷۰).

## منابع

[۱] I. Beck, coloring Commutative rings, *Journal of Algebra*, ۱۱۶: ۲۰۸-۲۲۶ (۱۹۹۸).

[۲] M. Afkhami, Z. Barati, K. Khashyarmanesh, Planar zero divisor graphs of partially ordered sets, *Acta Mathematica Hungarica*, ۱۳۷: ۲۷-۳۵ (۲۰۱۲).

[۳] M. Afkhami, When the comaximal and zero-divisor graphs are ring graphs and outerplanar, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, ۴۴: ۱۷۴۵-۱۷۶۱ (۲۰۱۴).

[۴] D.F. Anderson, P.S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *Journal of Algebra and its Applications*, ۲۱۷: ۴۳۳-۴۴۷ (۱۹۹۹).

[۵] Z. Barati, Line zero divisor graphs, *Journal of Algebra and Its Applications*, ۲۰: ۲۱۵۰۱۵۴-۲۱۵۰۱۶۷ (۲۰۲۱).

[۶] F.R. DeMeyer, L. DeMeyer, Zero-divisor graphs of semigroups, *Journal of Algebra*, L۲۸۹: ۱۹۰-۱۹۸ (۲۰۰۵).

[۷] L. Dancheng, W. Tongsuo, On bipartite zero-divisor graphs, *Discrete Mathematics*, ۳۰۹: ۷۵۵-۷۶۲ (۲۰۰۹).

[۸] R. Halas, M. Jukl, On Beck's coloring of posets, *Discrete Mathematics*, ۳۰۹: ۴۵۸۴-۴۵۸۹ (۲۰۰۹).

[۹] V. Joshi, Zero-divisor graph of a poset with respect to an ideal, *Order*, ۲۹: ۴۹۹-۵۰۶ (۲۰۱۲).

[۱۰] D. Lu, T. Wu, The zero-divisor graphs of posets and an application to semigroups, *Graphs and Combinatorics*, ۲۶: ۷۹۳-۸۰۴ (۲۰۱۰).

[۱۱] Z. Xue, S. Liu, Zero-divisor graphs of partially ordered sets, *Applied Mathematics Letters*, ۲۳: ۴۴۹-۴۵۲ (۲۰۱۰).

[۱۲] S. Khojasteh, Line intersection graphs of ideals of a poset, *Journal of New Research in Mathematics*, doi: ۱۰.۳۰۴۹۵/JNRM.۲۰۲۳.۷.۲۲۹,۲۳۴۲.

[۱۳] P.J. Slater, Leaves of trees, *Congressus Numerantium*, ۱۴: ۵۴۹-۵۵۹ (۱۹۷۵).

