

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره پنجاه و دوم، بهمن و اسفند ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

جاذب‌های آشوبناک و متناوب در یک مدل شبکه عصبی مصنوعی پنج بعدی

محمد هادی مصلحی^{*۱}

^(۱) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۲/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۸/۱۶

چکیده

در این مقاله، دینامیک یک مدل جدید از شبکه‌های عصبی هاپفیلد مبتنی بر ۵ نورون ارائه و بررسی شده است. در ضرائب سیناپسی این مدل، دو پارامتر تعریف شده که با تغییر آنها، رفتارهای دینامیکی بسیار غنی، از جمله جاذب شبه‌متناوب (۳-چنبره)، آشوب، آشوب گذرا، ابرآشوب، انشعاب دو برابر سازی دوره تناوب منتهی به آشوب و جاذب‌های همزیست مشاهده خواهند شد. این مدل تقریباً اکثر پدیده‌های دینامیکی مطرح را در بر خواهد گرفت. به طور خاص، ما پدیده انشعاب دو برابر سازی دوره تناوب منتهی به آشوب را مشاهده می‌کنیم که در کارهای قبلی به ندرت در سیستم‌های خودگردان پنج بعدی، بخصوص سیستم هاپفیلد گزارش شده‌اند. با تغییر پارامتر a در یک بازه بسیار کوچک، فرآیند تکامل سیستم از چرخه حدی آغاز می‌شود و پس از عبور از یک سری جاذب‌های متناوب، آشوبناک می‌شود. رفتارهای پیچیده دینامیکی سیستم با استفاده از طیف نمای لیاپونوف، نمودار انشعاب و مقاطع مختلف از فضای فاز بررسی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: آشوب، ابرآشوب، آشوب گذرا، انشعاب دو برابر سازی دوره تناوب، طیف لیاپونوف.

۱- مقدمه

شبکه عصبی هاپفیلد (HNN) که از دینامیک‌های مغز الهام می‌گیرد [۱]، یک مدل با اهمیت در بین شبکه‌های عصبی مصنوعی است که نقش اساسی در محاسبات نورونی^۲ ایفا می‌کند. چنین مدلی قادر به جمع‌آوری برخی از اطلاعات یا نمونه‌ها به روشی مشابه مغز است [۲، ۳].

مطالعات بیولوژیکی متعدد، ظهور دینامیک‌های پیچیده‌ای مثل آشوب را در دینامیک مغز تایید می‌کنند [۴-۹] و اعتقاد بر این است که آشوب نقش مهمی برای پردازش و ذخیره سازی اطلاعات در شبکه‌های عصبی بیولوژیکی دارد [۴، ۱۰-۱۶]. همین موضوع به همراه کاربردهای پرفایده شبکه‌های عصبی هاپفیلد در پردازش اطلاعات و برنامه‌های مهندسی، مانند تشخیص الگو، حافظه انجمنی و پردازش سیگنال، باعث می‌شود تا محققین متعددی کشف دینامیک‌های پیچیده در شبکه‌های عصبی هاپفیلد را در دستور کار خود قرار دهند [۲، ۳].

بسیاری از شبکه‌های عصبی مصنوعی نیز به منظور شبیه‌سازی دینامیک آشوبناک مغز ارائه شده‌اند. اخیراً، برخی تحقیقات عددی و تجربی در مورد دینامیک آشوبناک در شبکه‌های هاپفیلد از جمله وجود جاذب‌های همزیست، مورد توجه قرار گرفته‌اند [۱۰-۱۶].

بررسی ویژگی‌های دینامیکی سیستم عصبی هاپفیلد که بسیار مورد توجه قرار گرفته، بر دو هدف اصلی متمرکز است: اول استخراج شرایط پایداری برای تشخیص مدارهای پایدار از مدارهای تناوبی و دوم یافتن رفتارهای دینامیکی پیچیده، مانند مدار شبه تناوبی، آشوب، آشوب گذرا، ابرآشوب و جاذب‌های همزیست متعدد [۱۰-۱۶]. در این مقاله، به بررسی دینامیک غیرخطی یک شبکه عصبی

جدید هاپفیلد ۵ بعدی که با وزن‌های سیناپسی خاص با اهداف زیر ساخته شده است، پرداخته‌ایم: (الف) برای انجام یک تحلیل سیستماتیک از مدل عصبی پیشنهادی و توضیح مکانیسم آشوب.

(ب) برای تعریف مجموعه‌ای از وزن‌های سیناپسی که در آنها مدل عصبی مورد بررسی، رفتارهای دینامیکی پیچیده، مانند مدار شبه‌تناوبی، آشوب، ابرآشوب و جاذب‌های همزیست را نشان دهد. به طور خاص، ما پدیده انشعاب دو برابر سازی دوره تناوب منتهی به آشوب را در این مدل نشان خواهیم داد که در کارهای قبلی به ندرت در سیستم‌های خودگردان پنج بعدی [۱۷-۱۹]، بخصوص سیستم هاپفیلد گزارش شده‌اند. با تغییر پارامتر a در یک بازه بسیار کوچک، فرآیند تکامل سیستم از چرخه حدی آغاز می‌شود و پس از عبور از یک سری جاذب‌های متناوب، آشوبناک می‌شود. همچنین نشان می‌دهیم که تحت شرایطی سیستم آشوبناک شده ولی پس از مدتی دینامیک آن به نقطه ثابت پایدار و مدار تناوبی پایدار منجر خواهد شد.

ساختار این مقاله علمی به شرح زیر است: در بخش ۲، مفاهیم پایه مرور می‌شود و در بخش ۳، به توصیف ریاضی مدل پیشنهادی پرداخته خواهد شد. در بخش ۴، جزئیات بدست آوردن نتایج عددی و در بخش‌های ۵ تا ۷، به توصیف انواع دینامیک‌های پیچیده‌ای که در این مدل آشکار می‌شود، پرداخته خواهد شد.

۲- مفاهیم پایه

یک سیستم دینامیک پیوسته زمان خودگردان، بوسیله دستگاه معادله دیفرانسیل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) \\ &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)). \end{aligned} \quad (1)$$

^۲ neurocomputing

جواب ϕ_t گذرنده از نقطه $x \in M$ را متناوب گوییم هرگاه عدد ثابت $T > 0$ موجود باشد بطوری که رابطه $\phi_t(x) = \phi_{t+T}(x)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ برقرار باشد. مجموعه حدی متناظر با جواب متناوب، یک منحنی بسته است که توسط $\phi_t(x)$ در یک دوره تناوب رسم می‌شود و با دایره S^1 هم‌ارز توپولوژیک می‌باشد.

(پ) جواب شبه متناوب (حرکت شبه متناوب):

یک تابع شبه‌متناوب، تابعی است که می‌توان آن را به صورت مجموع شمارای $x(t) = \sum_i h_i(t)$ نوشت که در آن، توابع h_i ، توابعی متناوب با دوره تناوب کمینه T_i و فرکانس ω_i هستند. همچنین، یک مجموعه متناهی از فرکانس‌های پایه مانند $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_q\}$ با ویژگی‌های زیر بایستی وجود داشته باشد:

۱- این مجموعه مستقل خطی است.

۲- برای هر i (اندیس توابع تشکیل دهنده مجموع)، اعداد صحیحی مانند k_1, k_2, \dots, k_q و k_q وجود داشته باشد بطوری که $\omega_i = |\sum_{j=1}^q k_j \bar{\omega}_j|$.

یک جواب شبه‌متناوب با q فرکانس پایه را $-q$ متناوب نامند. مجموعه حدی یک جواب $-q$ متناوب، با چنبره $-q$ بعدی $T^q = S^1 \times \dots \times S^1$ دیفیئومورف است که هر S^1 یک فرکانس اصلی را به نمایش می‌گذارد.

تاکنون تعریف کلی پذیرفته شده برای آشوب ارائه نشده است. یکی از تعاریف آشوب به فرم زیر است:

(ت) حرکت آشوبناک:

«آشوب، یک رفتار طولانی مدت غیرمتناوب در یک سیستم غیرتصادفی است که وابستگی حساس به شرایط اولیه را نشان می‌دهد». غیرتصادفی بدین معنی که اگر مقادیر اولیه تغییری نکنند آنگاه خط‌سیر نیز تغییری نخواهد کرد. بدون پرداختن به تعریف معمول، می‌توان گفت که

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بیانگر بردار حالت در زمان t و $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک $-C^r$ تابع ($r \geq 1$) روی یک مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^n$ می‌باشد. فضای متغیرهای وابسته سیستم (۱) فضای حالت آن سیستم نامیده شده و غالباً با M نشان داده می‌شود که در اینجا ما فضای حالت را همان \mathbb{R}^n خواهیم گرفت. میدان برداری f ، برای هر $x \in U$ و هر $t \in \mathbb{R}$ ، شار زیر را تولید خواهد کرد:

$$\begin{aligned} \phi: U \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \phi_t(x) &= \phi(t, x) \end{aligned}$$

که تابع $\phi_t(x)$ یک $-C^r$ تابع بوده و

$$\begin{aligned} \phi'_t(x) &= f(\phi_t(x)), \quad \forall x \in U, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

مجموعه $\{\phi_t(x): t \in \mathbb{R}\}$ یک خط‌سیر سیستم، گذرنده از نقطه x ، نامیده می‌شود. نقطه p یک نقطه ω - حدی از x است هرگاه نقاط $\phi_{t_1}(x)$ ، $\phi_{t_2}(x)$ و ... روی خط‌سیر گذرنده از x موجود باشند بطوری که $\phi_{t_i}(x) \rightarrow p$ هرگاه $t_i \rightarrow \infty$.

برای نقطه x ، مجموعه ω -حدی را، که با نماد $\Omega(x)$ نشان می‌دهیم، بصورت مجموعه همه نقاط ω -حدی نقطه x تعریف می‌کنیم. همچنین یک مجموعه ω -حدی Ω را یک مجموعه جاذب می‌نامیم هرگاه یک همسایگی باز U از Ω موجود باشد بطوری که برای هر $x \in U$ رابطه $\Omega(x) = \Omega$ برقرار باشد. حوزه جاذب از یک مجموعه جاذب را نیز بصورت اجتماع همه‌ی چنین همسایگی‌هایی مثل U در نظر خواهیم گرفت که آن را با نماد B_Ω نمایش می‌دهند.

در اینجا چهار نوع اساسی از مجموعه‌های حدی معرفی می‌شوند:

(الف) نقطه ثابت:

نقطه $x \in M$ را یک نقطه ثابت گوییم هرگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، $\phi_t(x) = x$.

(ب) جواب متناوب (یا حرکت متناوب):

مجموعه همه نماهای لیاپونوف، طیف لیاپونوف (LCES) را تشکیل خواهد داد. در حالت نقطه ثابت پایدار، همه نماهای لیاپونوف منفی هستند. سیستمی که نسبت به شرایط اولیه حساس باشد، حداقل یک نمای لیاپونوف مثبت خواهد داشت. این نمای مثبت یعنی دو مسیر، با فاصله بینهایت کوچک در حالت اولیه، به شدت از یکدیگر جدا می‌شوند. بنابراین حداقل در یک بعد حساسیت بسیار زیاد به تغییرات در شرایط اولیه وجود دارد. هاکن [۱۹۸۳] ثابت کرد که در سیستم‌های زمان پیوسته، برای هر جاذبی غیر از یک نقطه ثابت، یک توان لیاپونوف همیشه صفر است [۲۲].

یکی از ویژگی‌های اصلی آشوب، وابستگی حساس به شرایط اولیه است. با توجه به این وابستگی، خطاهای کوچک اجتناب ناپذیر در شرایط اولیه، به شدت بر وضعیت سیستم‌های آشوبناک تأثیر می‌گذارد. آشوب را می‌توان به عنوان عمل متوالی کشش (در امتداد منیفلد ناپایدار)، فشردن (در امتداد منیفلد پایدار) و تاخوردگی (ناشی از غیرخطی بودن) بخش‌های فضای حالت تصور کرد. از نقطه نظر هندسی، خط سیرهای آشوبناک، جاذب‌های به اصطلاح «عجیب» [۲۳] با ابعاد فراکتال (کسری) را می‌سازند که نتیجه مکانیسم کشش و تا شدن هست. از نظر ریاضی، یک جاذب آشوبناک پیوسته حداقل سه نمای لیاپونوف خواهد داشت: یکی مثبت (انبساط)، یک منفی (انقباض) و یک صفر (در طول مسیر پیشرونده). به دلیل اتلافی بودن سیستم دینامیکی آشوبناک، مجموع کل نماهای لیاپونوف منفی است [۲۴].

با توجه به قضیه پوانکاره- بندیکسون، جاذب‌های عجیب آشوبناک فقط می‌توانند در فضاهای حالت سه بعدی یا بالاتر اتفاق بیفتند. جاذب‌های عجیب، فراکتال هستند بدین معنی که آنها بعد فراکتال (کسری) دارند.

دینامیک‌های آشوبناک با سه خاصیت زیر مشخص می‌شوند:

الف- آنها خط سیرهای کراندار با دینامیکی شبه تصادفی (اما نه تصادفی) و متفاوت با دینامیک‌های معرفی شده در بالا هستند.

ب- آنها به یک مجموعه در فضای فاز به نام جاذب عجیب همگرا می‌شوند که یک منیفلد ساده شبیه نقطه، دایره یا چنبره نیست اما یک ساختار هندسی پیچیده فراکتالی با یک بعد هاسدورف کسری دارد [۲۰].

ج- آنها وابستگی شدید سیستم به شرایط اولیه را نمایان می‌کنند. بدین معنی که خط سیرهای آشوبناک، بطور موضعی از یکدیگر دور می‌شوند و تغییرات خیلی کوچک در شرایط اولیه (نقطه شروع)، باعث تغییرات بزرگ (با سرعت رشد نمایی) در حرکت آنها می‌شود.

تعریف ۱: (نمای لیاپونوف): در فضای فاز n - بعدی، n نمای لیاپونوف متناظر با n جهت متعامد (به عنوان مثال، جهت e_1, e_2, \dots, e_n) وجود دارد. دو نقطه اولیه نزدیک به هم در فضای حالت سیستم را در نظر بگیرید که فاصله آنها در جهت i -ام، برابر مقدار بقدر کافی کوچک $\|\delta_i(\cdot)\|$ است. اگر فاصله این دو نقطه در فضای حالت پس از گذشت زمان t برابر با $\|\delta_i(t)\|$ باشد آنگاه نمای لیاپونوف λ_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta_i(t)}{\delta_i(\cdot)}$$

نماهای مشخصه لیاپونوف به نوعی گسترشی از تحلیل پایداری خطی در مورد حرکات غیر تناوبی هستند. به طور کلی، آنها نرخ معمولی واگرایی نمایی مسیرهای مجاور را اندازه گیری می‌کنند. از این نظر آنها اطلاعاتی در مورد سرعت رشد یک خطای بسیار کوچک در وضعیت اولیه یک سیستم را ارائه می‌دهند [۲۱].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + \tanh(x_1) + 0.7 \tanh \\ \quad - (2.6 - a) \tanh(x_3) - 0.9 \tanh \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + (2 + b) \tanh(x_2) \\ \quad + 3.2 \tanh(x_3) + 0.25 \tanh \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_3 + 3 \tanh(x_1) - 3 \tanh \\ \quad + \tanh(x_2) \\ \frac{dx_4}{dt} = -(1.0 + 3.0a)x_4 + 9.7 \tanh \\ \quad + \tanh(x_2) + \tanh(x_3) \\ \quad + 1.63 \tanh(x_4) + 0.6 \tanh \\ \frac{dx_5}{dt} = -1.0x_5 + 1.0 \tanh(x_1) \\ \quad + \tanh(x_2) + 0.1 \tanh(x_3) \\ \quad + 0.3 \tanh(x_4) + 7.0 \tanh(x_5) \end{array} \right. \quad (3)$$

که در آن a و b پارامترهای قابل تنظیم هستند. ضرایب سیستم، پس از بررسی های فراوان روی مقادیر مختلف، بدست آورده شده‌اند بگونه‌ای که اهداف ما را برآورده کنند.

۴- جزئیات بدست آوردن نتایج عددی

از آنجایی که در حال حاضر تجزیه و تحلیل کامل ریاضی برای سیستم (۳) غیرممکن است، اکثر تحقیقات مبتنی بر تحلیل های عددی و کامپیوتری است. با پیروی از این رویه رایج، این مقاله رویکردی مبتنی بر تحلیل عددی دارد و در واقع نتایج عددی در این مقاله با آزمون و خطای چندین باره به دست آمده‌اند.

به دلیل پیچیدگی های سیستم غیرخطی (۳)، تجزیه و تحلیل کامل ریاضی برای این سیستم غیرممکن است و اکثر تحقیقات مبتنی بر تحلیل های عددی و کامپیوتری است. انتگرال گیری عددی سیستم HNN یک چالش واقعی برای حل کننده های ODE که از طول گام ثابت استفاده می کنند،

کاپلان و یورک [۲۵] یک پیشنهاد جالب ارائه کرده‌اند که بعد هاسدورف (d_H) یک جاذب را به طیف لیاپونوف وابسته می کند. آنها کمیتی به نام بعد لیاپونوف به شرح زیر معرفی نمودند:

$$d_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

که نماهای مشخصه لیاپونوف به فرم معمول زیر مرتب شده‌اند:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$$

و j بزرگترین عدد صحیح است که $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j > 0$.

بطور ویژه کاپلان و یورک یک فرضیه مطرح کردند که در سیستم های اتلافی، برای اکثر جاذبها تساوی $d_L = d_H$ برقرار است. این فرضیه در حالت کلی اثبات نشده است اما نتایج متعددی اعتبار آن را تایید می کند [۲۶]. از نقطه نظر ریاضی، یک رده بندی از جاذب های پیوسته زمان خودگردان بر مبنای طیف لیاپونوف و بعد هاسدورف آنها در جدول ۱ ارائه شده است [۲۷].

۳- بیان ریاضی مدل پیشنهادی

در این بخش، یک مدل شبکه عصبی هاپفیلد ۵- بعدی جدید به فرم زیر را معرفی و مورد مطالعه قرار می دهیم

$$x'_i = c_i x_i + \sum_{j=1}^5 a_{ij} \tanh(x_j) \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, 5$$

که در آن $x_i(t)$ بیانگر وضعیت فعالیت i -امین نورون در زمان t ، c_i بیانگر نرخ شارژ نورون i -ام، a_{ij} بیانگر وزن ارتباطات سیناپسی از i -امین به j -امین نورون است. در سیستم (۲) هر نورون هم به خودش و هم به سایر نورون های شبکه از طریق توابع غیر خطی زیگموئیدی $\tanh(x)$ متصل است.

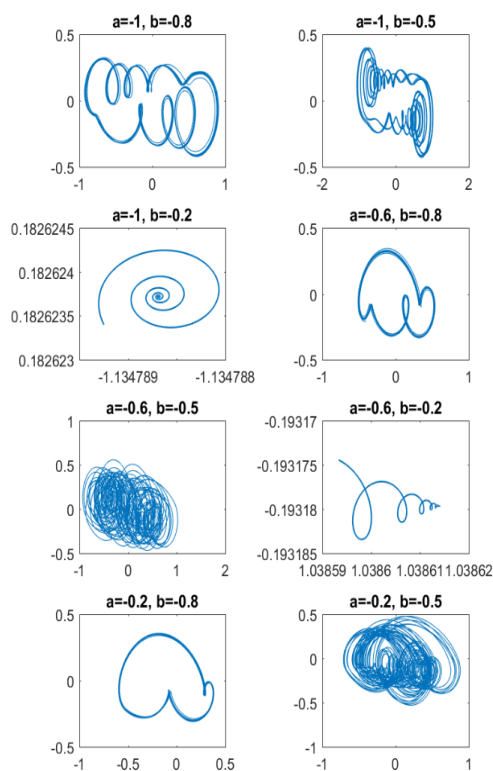
سیستم (۲) را به فرم زیر بازنویسی می کنیم:

بکار گرفته شده است. شرایط اولیه نیز همه جا بصورت

$$[0.2 \ 0.1 \ 0.0 \ 0.0]$$

در نظر گرفته شده مگر اینکه به صراحت مقادیر دیگری ذکر شود.

در شکل ۱، برشی از فضای حالت سیستم (۳) به ازای مقادیر مختلف a و b ترسیم شده است. این شکل وجود جاذب‌های متنوع و پیچیده برای سیستم مذکور را به ازای مقادیر مختلف a و b نشان می‌دهد.



شکل ۱: برشی از فضای حالت سیستم (۳) (x_3) بر حسب (x_2) به ازای مقادیر مختلف a و b .

برای بررسی دقیق و علمی این موضوع، در شکل ۲، بزرگترین نمای لیاپونوف سیستم (۳) با تغییر دو پارامتر a و b روی بازه $[-1, 1]$ ترسیم شده است. ملاحظه می‌شود که در نقاط مختلفی، نمای لیاپونوف مثبت یا صفر وجود دارد و همین

نمایان می‌کند. نتایج عددی به شرایط اولیه، طول گام انتگرالگیری و حتی روش عددی بستگی دارد. بنابراین، برای برخی از مقادیر پارامترها، برخی از روش‌های عددی ممکن است نتایج متفاوت غیرمنتظره‌ای برای مقادیر پارامتر و شرایط اولیه یکسان ارائه دهند.

در این مقاله، برای محاسبه نماهای لیاپونوف از بسته نرم‌افزاری MATDS، قابل اجرا در نرم افزار Matlab، با تغییراتی جهت گرفتن خروجی یک

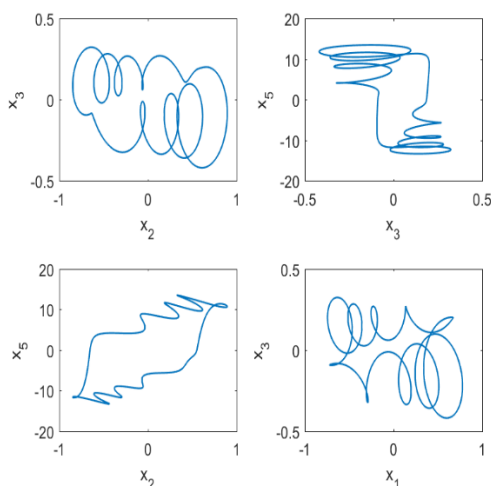
جدول ۱: انواع جاذب‌های خودگردان پیوسته

دینامیک جاذب	بعد هاسدورف (d_H)	طیف LEC (علامت)
قطه ثابت	۰	$-, -, -, -, -$
چرخه حدی (حرکت متناوب)	۱	$0, -, -, -, -$
l -چنبره (حرکت شبه‌متناوب)	l	$\underbrace{+, \dots, +}_{l \geq 2}, \underbrace{-, \dots, -}_{\delta - l}, -$ $2 \leq l \leq N - 1$
k -آشوب	$\delta < d_H < l + k$	$\underbrace{+, \dots, +}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_l, \underbrace{-, \dots, -}_m$ $1 \leq k, l, m \leq 2$ $k + l + m = \delta$

بعدی و دو بعدی مورد نیاز، استفاده شده و برای حل ODE ها نیز حل‌کننده ode45 در محیط نرم افزار Matlab با

$$RelTol = 1.0 \times 10^{-6}$$

$$AbsTol = 1.0 \times 10^{-6}$$



شکل ۳: برشی از فضای حالت سیستم (۳) به ازای

$$b = -0.73 \text{ و } a = -1$$

۵-۲ جواب شبه متناوب (۳-چنبره)

سیستم (۳) را با فرض $a = 0.9$ و $b = -0.1$ در نظر بگیرید. در این حالت نماهای لیاپونوف سیستم تا چهار رقم اعشار به شرح زیر هستند:

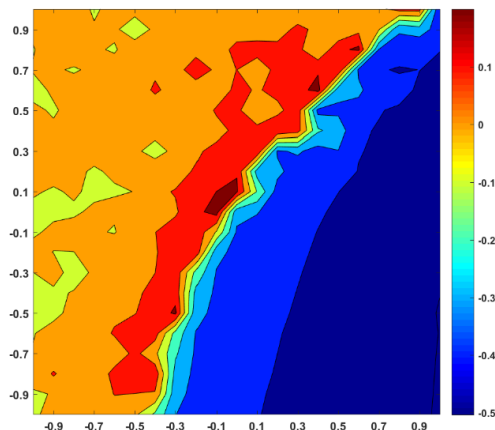
$$10.000 \quad -0.0001 \quad 0.0000 \quad 0.0001 \\ -53.06$$

با گرد کردن نماهای لیاپونوف تا دو (حتی ۳) رقم اعشار، ملاحظه می‌شود که سیستم دارای سه نمای لیاپونوف با مقدار صفر و دو نمای لیاپونوف با مقدار منفی می‌باشد. بنابر اطلاعات مندرج در جدول ۱، سیستم در این حالت یک جواب شبه متناوب خواهد داشت. در شکل ۴، شبیه‌سازی کامپیوتری سیستم نیز با شروع از نقطه

$$[-0.0853 \quad 0.0062 \\ 0.1745 \quad 0.8315 \quad 7.1492]$$

در زمانی که t از ۰ تا ۱۵۰ تغییر می‌کند، وجود ۳-چنبره را تایید می‌کند. در اینجا بعد لیاپونوف برابر با ۳ خواهد بود.

موضوع وجود جواب های متناوب و آشوبناک را متصور می‌سازد.

شکل ۲: بزرگترین نمای لیاپونوف سیستم (۳) با تغییر دو پارامتر a و b روی بازه $[-1, 1]$

۵- جواب متناوب و شبه متناوب

۵-۱ جواب متناوب

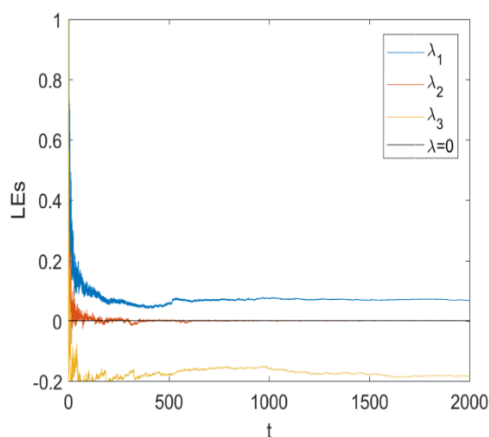
سیستم (۳) را با فرض $a = -1$ و $b = -0.73$ در نظر بگیرید. در این حالت نماهای لیاپونوف سیستم تا چهار رقم اعشار به شرح زیر هستند:

$$9.24 \quad -0.0751 \quad -0.0725 \quad 0.0019 \\ -60.81$$

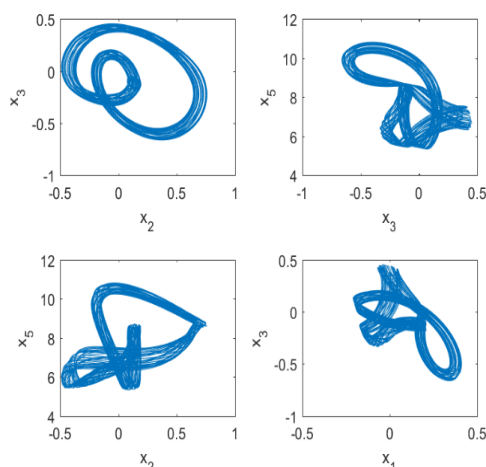
با گرد کردن نماهای لیاپونوف تا دو رقم اعشار، ملاحظه می‌شود که سیستم دارای یک نمای لیاپونوف با مقدار صفر و چهار نمای لیاپونوف با مقدار منفی می‌باشد. بنابر اطلاعات مندرج در جدول ۱، سیستم در این حالت یک جواب متناوب خواهد داشت. در شکل ۳، شبیه‌سازی کامپیوتری سیستم نیز با شروع از نقطه

$$[-0.3078 \quad -0.1321 \\ -0.2702 \quad 1.7929 \quad 4.1642]$$

در زمانی که t از ۰ تا ۱۰۰۰ تغییر می‌کند، وجود جواب متناوب را تایید می‌کند. در اینجا بعد لیاپونوف برابر با ۱ خواهد بود.



شکل ۵: دینامیک نماهای لیاپونوف سیستم (۳) به ازای $a = 1$ و $b = 0.7$. دو نمای لیاپونوف دیگر، کمتر از -0.9 هستند و در این شکل رسم نشده‌اند.



شکل ۴: برشی از فضای حالت سیستم (۳) به ازای $a = 0.9$ و $b = -0.1$

۶- آشوب و ابر آشوب

۶-۱ آشوب

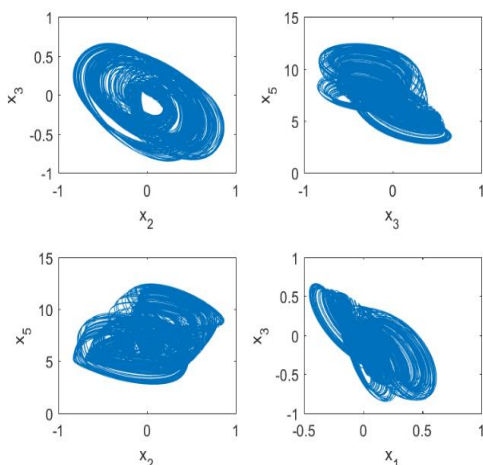
سیستم (۳) را با فرض $a = 1$ و $b = 0.7$ در نظر بگیرید. در این حالت نماهای لیاپونوف سیستم تا چهار رقم اعشار به شرح زیر هستند:

$$0.0680 \quad 0.0000 \quad -0.1858 \quad -9.99 \quad -61.12$$

شکل ۵، دینامیک نماهای لیاپونوف در این حالت را نشان می‌دهد. با گرد کردن نماهای لیاپونوف تا دو رقم اعشار، ملاحظه می‌شود که سیستم دارای یک نمای لیاپونوف با مقدار مثبت، یک نمای لیاپونوف با مقدار صفر و سه نمای لیاپونوف با مقدار منفی می‌باشد. بنابر اطلاعات مندرج در جدول ۱، سیستم در این حالت، آشوبناک خواهد شد. در شکل ۶، شبیه‌سازی کامپیوتری سیستم نیز با شروع از نقطه

$$[0.0137 \quad -0.1404 \quad 0.1029 \quad 0.9584 \quad 7.99999]$$

در زمانی که t از ۰ تا ۱۰۰۰ تغییر می‌کند، وجود آشوب را تایید می‌کند. در اینجا بعد لیاپونوف برابر با ۳.۳۶۶ خواهد بود.

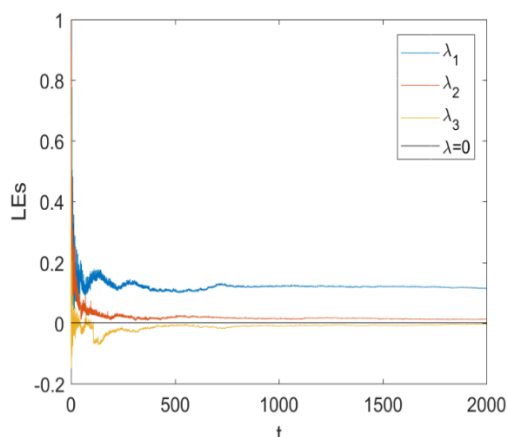


شکل ۶: برشی از فضای حالت سیستم (۳) به ازای $a = 1$ و $b = 0.7$

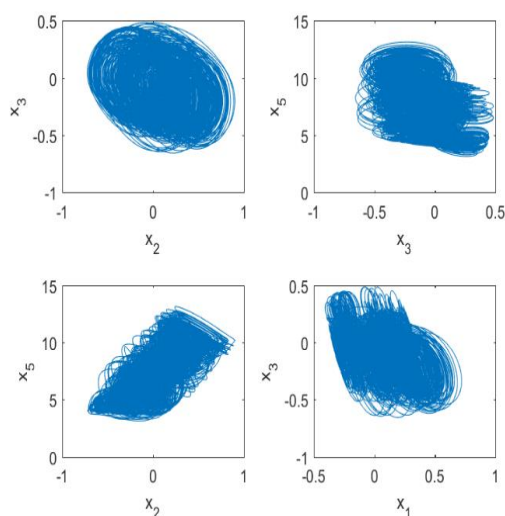
۶-۲ ابر آشوب

در گذشته، یک سیگنال آشوبناک با تنها یک توان مثبت لیاپونوف برای پنهان کردن پیام‌های ارسالی در مخابرات استفاده می‌شد. تا سال ۱۹۹۵، زمانی که پرز و سردیرا ثابت کردند که سیگنال آشوبناک را گاهی اوقات می‌توان به راحتی استخراج کرد، و امنیت انتقال داده‌ها با این روش زیر سوال رفت [۲۸]. با این وجود، سیستم ابرآشوبناک بعد بالا می‌تواند بر این مشکل غلبه کند [۲۹]. سیستم

می‌انجامد و سپس از بین می‌رود. بنابراین، می‌توان آن را به عنوان آشوب گذرا در نظر گرفت.



شکل ۷: دینامیک نماهای لیاپونوف سیستم (۳) با $a = 0.2$ و $b = -0.2$. دو نمای لیاپونوف دیگر، کمتر از -9 هستند و در این شکل رسم نشده‌اند.



شکل ۸: برشی از فضای حالت سیستم (۳) به ازای

$$b = -0.2 \text{ و } a = 0.2$$

در اینجا به نظر می‌رسد که سیستم دارای نوعی "خودکنترلی" بوده که در نتیجه آن می‌تواند رفتار آشوبناک را از بین ببرد. هر چند در نگاه اول، این رفتار سیستم نشان‌دهنده همزیستی یک جاذب

ابراشوبناک در زمان پیوسته، که حداقل بعد آن باید چهار باشد، معمولاً به عنوان یک سیستم آشوبناک با حداقل دو توان لیاپونوف مثبت تعریف می‌شود که نشان می‌دهد پویایی آن در بیش از یک جهت به طور همزمان گسترش می‌یابد. به دلیل کاربردهای بالقوه زیاد، سیستم‌های ابر آشوبناک به طور فعال در بسیاری از زمینه‌های کاربردی فن آوری مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، مانند لیزرها [۳۰] و ارتباطات ایمن [۳۲،۳۱].

اگر سیستم (۳) را با $a = 0.2$ و $b = -0.2$ در نظر بگیریم. در این حالت نماهای لیاپونوف سیستم به شرح زیر هستند:

$$\begin{matrix} 0.1142 & 0.0115 & -0.0004 & -9.99 \\ & & & -66.27 \end{matrix}$$

شکل ۷، دینامیک نماهای لیاپونوف در این حالت را نشان می‌دهد. با گرد کردن نماهای لیاپونوف تا دو رقم اعشار، ملاحظه می‌شود که سیستم دارای دو نمای لیاپونوف با مقدار مثبت، یک نمای لیاپونوف با مقدار صفر و دو نمای لیاپونوف با مقدار منفی می‌باشد. بنابر اطلاعات مندرج در جدول ۱، سیستم در این حالت، ابر آشوبناک (دارای ۳-آشوب) خواهد شد. در شکل ۸، شبیه‌سازی کامپیوتری سیستم نیز با شروع از نقطه

$$\begin{bmatrix} 0.2309 & 0.4191 & 0.2465 \\ -0.5107 & 9.0887 & \end{bmatrix}$$

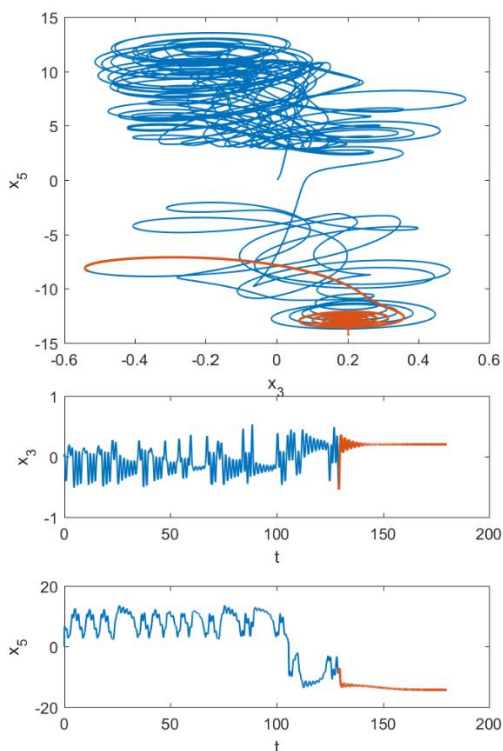
در زمانی که t از ۰ تا ۱۰۰۰ تغییر می‌کند، وجود ابر آشوب را تایید می‌کند. در اینجا بعد لیاپونوف برابر با ۳.۰۱ خواهد بود.

۷- آشوب گذرا

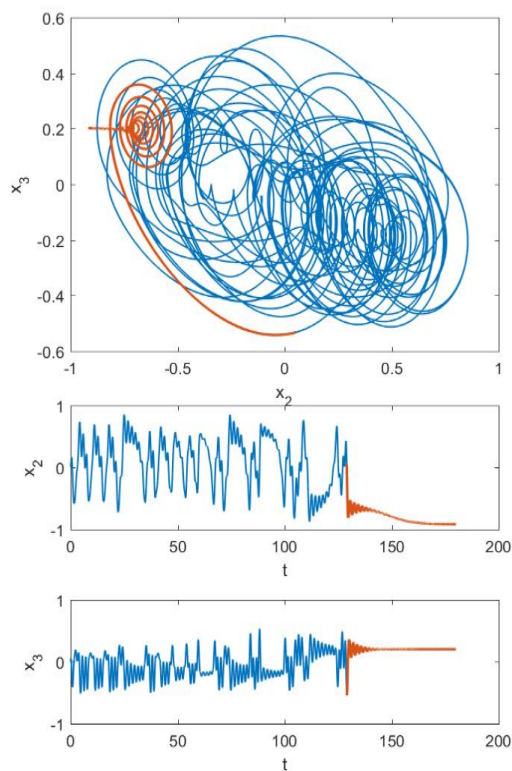
۷-۱ آشوب گذرا به نقطه ثابت پایدار

یک رفتار آشوبناک جالب توجه در $a = 0.28$ و $b = -0.2$ ملاحظه می‌شود. همانطور که نمودار فاز در شکل‌های ۸ و ۹ نشان می‌دهد، رفتار آشوبناک به طور قابل توجهی به طول

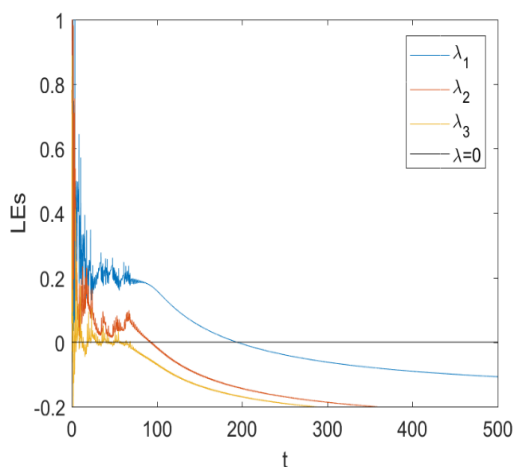
آشوبناک با یک گره کانونی پایدار است اما پس از مدت زمان کافی، با تأثیر قوی‌تر پایداری نقطه ثابت، رفتار آشوبناک از بین می‌رود. این وضعیت بر پیچیدگی فرضی ساختار مرزی حوضه‌های جاذب در هم تنیده سیستم HNN تاکید دارد.



شکل ۹: برشی از فضای حالت سیستم (۳) در $a = -0.28$ و $b = -0.2$ و ترسیم دو متغیر حالت x_3 و x_5 نسبت به زمان



شکل ۸: برشی از فضای حالت سیستم (۳) در $a = -0.28$ و $b = -0.2$ و ترسیم دو متغیر حالت x_2 و x_3 نسبت به زمان

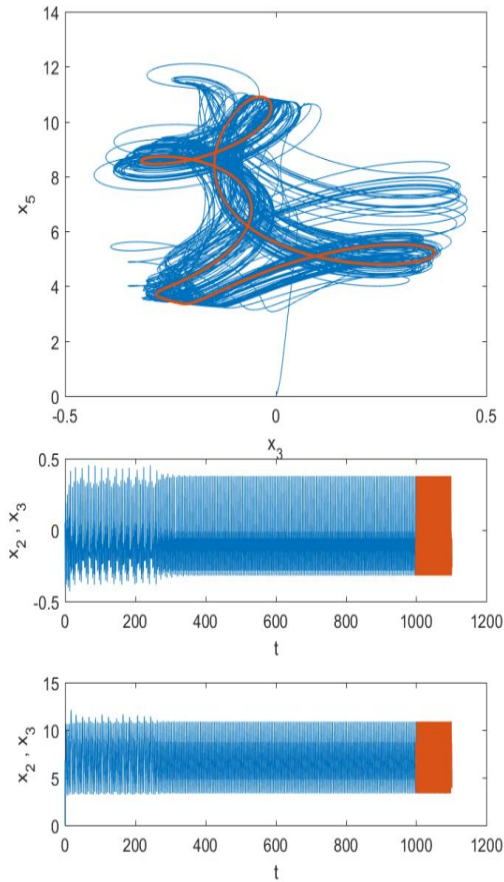


شکل ۱۰: دینامیک نماهای لیاپونوف سیستم (۳) در $a = -0.28$ و $b = -0.2$. دو نمای لیاپونوف دیگر، کمتر از ۹- هستند و در این شکل رسم نشده‌اند.

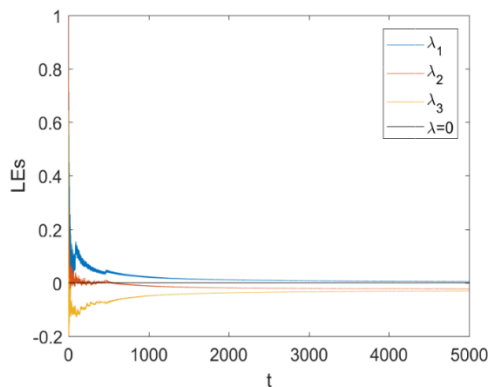
در شکل ۱۰، تغییرات نماهای لیاپونوف سیستم (۳) برای $a = -0.28$ و $b = -0.2$ بر حسب زمان رسم شده است که آشوب گذرا را تایید می‌کند.

۷-۲ آشوب گذرا به چرخه حدی پایدار

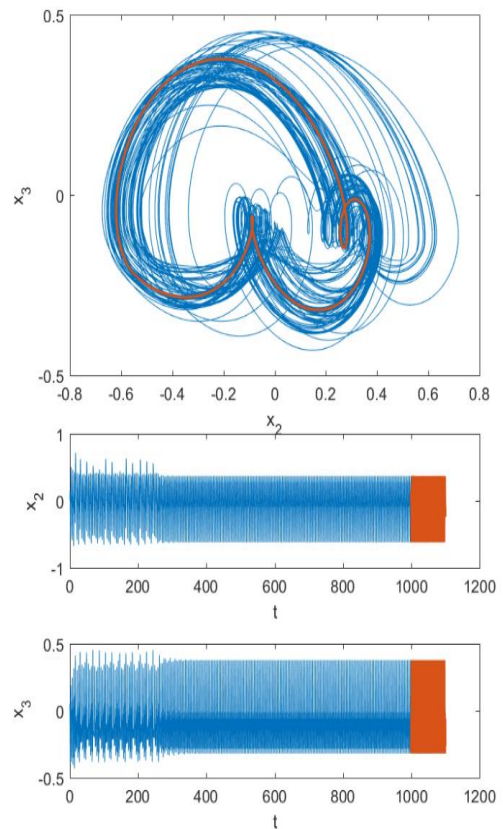
یک رفتار آشوبناک دیگر در $a = -0.2$ و $b = -0.67$ ملاحظه می‌شود. نمودار فاز در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان می‌دهد که رفتار آشوبناک پس از مدتی از بین می‌رود و جای خود را به یک چرخه حدی پایدار (جواب متناوب پایدار) می‌دهد. بنابراین، می‌توان آن را به عنوان آشوب گذرا در نظر گرفت.



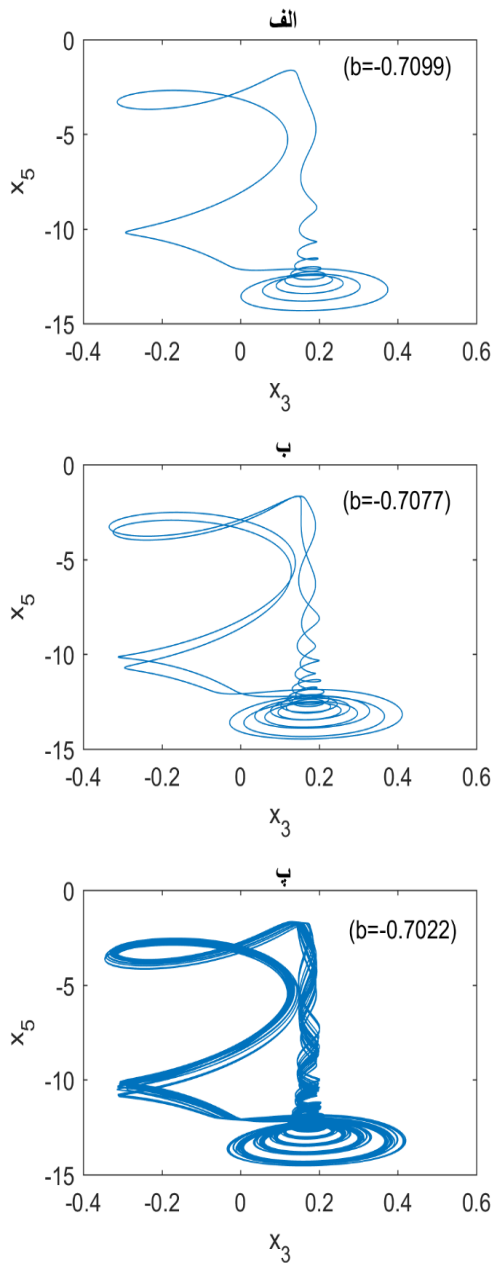
شکل ۱۲: برشی از فضای حالت سیستم (۳) در $a = -0.2$ و $b = -0.67$ و ترسیم دو متغیر حالت x_2 و x_3 نسبت به زمان



شکل ۱۳: دینامیک نماهای لیاپونوف سیستم (۳) در $a = -0.28$ و $b = -0.2$. دو نمای لیاپونوف دیگر، کمتر از ۹- هستند و در این شکل رسم نشده‌اند.



شکل ۱۱: برشی از فضای حالت سیستم (۳) در $a = -0.2$ و $b = -0.67$ و ترسیم دو متغیر حالت x_2 و x_3 نسبت به زمان

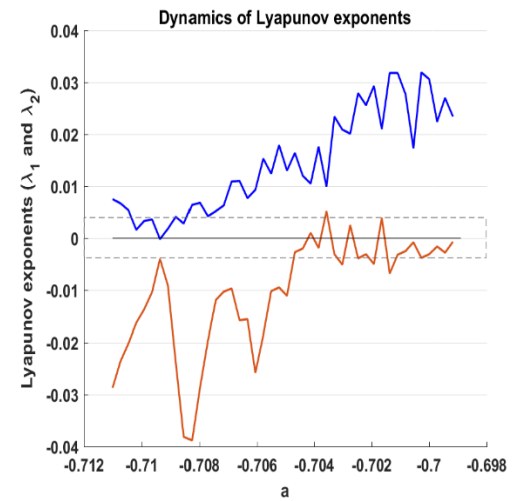


شکل ۱۵: برشهایی از فضای حالت سیستم (۳) با $b = -0.4022$ ، نشان‌دهنده تبدیل انشعاب دو برابر سازی دوره تناوب به سمت آشوب زمانی که a تغییر می‌کند.

در شکل ۱۳، تغییرات نماهای لیاپونوف سیستم (۳) دیگر در $a = -0.2$ و $b = -0.67$ رسم شده که آشوب گذرا را تایید می‌کند.

۸- انشعاب دو برابر سازی دوره تناوب منتهی به آشوب

با ثابت نگه داشتن $b = -0.4022$ و تغییر a روی بازه $[-0.711, -0.699]$ و محاسبه دو نمای لیاپونوف بزرگتر، شکل ۱۴ ترسیم شده است. با در نظر گرفتن نماهای لیاپونوف تا دو رقم اعشار، ملاحظه می‌شود که در این بازه، ابتدا چرخه حدی و سپس آشوب وجود خواهد داشت. در شکل ۱۵ برای برخی از مقادیر a ، سناریوی انشعاب دو برابر سازی دوره تناوب به آشوب مشاهده شده است.



شکل ۱۴: نماهای لیاپونوف سیستم (۳) با $b = -0.4022$ و تغییر a روی بازه $[-0.711, -0.699]$.

در شکل‌های الف ۱۶، ب ۱۶ و پ ۱۶، به ترتیب سری زمانی x_3 (بر حسب t) مربوط به شکل‌های الف ۱۵، ب ۱۵ و پ ۱۵ در بازه زمانی $[400, 500]$ ترسیم شده است. همچنین بازه زمانی $[0, 2000]$

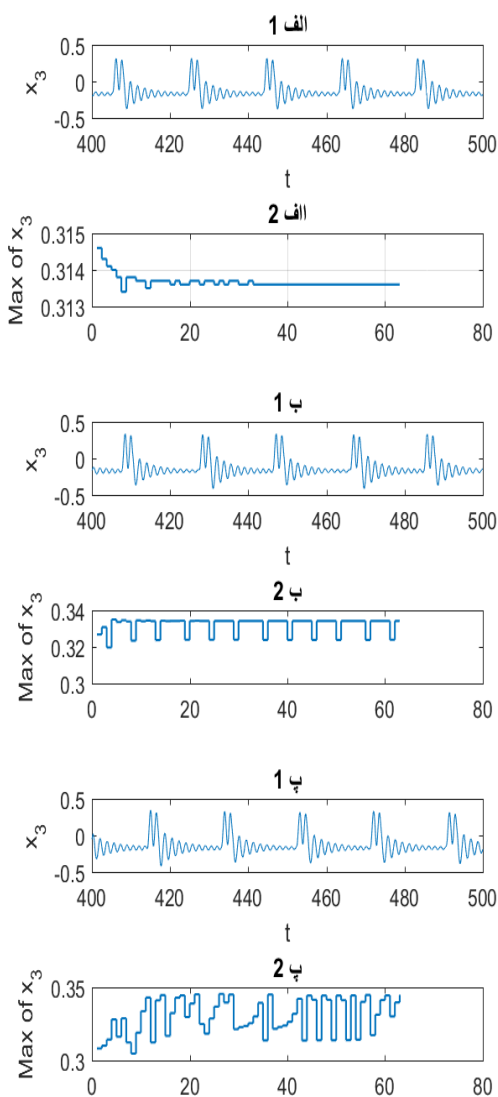
چرخه حدی نشان داده شده در شکل ۱۵ الف می‌باشد، بعد از گذشت زمان مشخص، تنها یک ماکزیمم خواهیم داشت. این موضوع برای شکل ۱۶ ب که مربوط به دوره حدی نشان داده شده در شکل ۱۵ ب می‌باشد، به دو ماکزیمم تبدیل می‌شود در حالی که شکل ۱۶ پ که مربوط به جاذب آشوبناک نشان داده شده در شکل ۱۵ پ می‌باشد، دارای تعداد زیادی ماکزیمم است. این موضوع تاییدی بر تبدیل انشعاب دو برابر سازی دوره تناوب به آشوب نشان داده شده در شکل ۱۵ می‌باشد. در جدول ۲، جزئیات شکل ۱۵، تا چهار رقم اعشار، آورده شده است.

جدول ۲: اطلاعات مربوط به شکل ۱۵

شرط اولیه	شکل ۱۵ الف	$[-0.73, -0.60, 0.13, -2.84, -13.38]$
LES		$0.0036, -0.0078, -0.0858, -9.83, -70.37$
شرط اولیه	شکل ۱۵ ب	$[-0.60, -0.78, 0.22, -2.72, -12.34]$
LES		$0.0039, -0.0096, -0.0779, -9.84, -70.33$
شرط اولیه	شکل ۱۵ پ	$[-0.89, -0.59, 0.10, -2.95, -14.29]$
LES		$0.0230, -0.0000, -0.1017, -9.84, -70.33,$
d_L		۲.۰۲۲۶

۹- هم‌زیستی جاذب‌ها

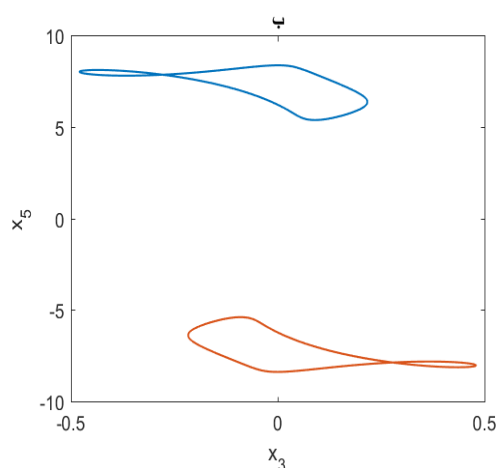
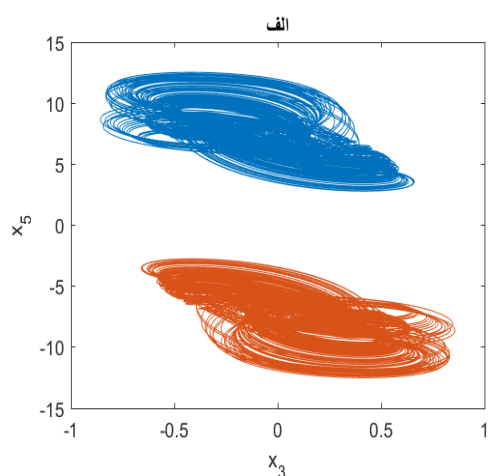
با بررسی بیشتر آشوب، بطور غیر منتظره ای مشخص شده که بسیاری از سیستم‌های آشوبناک دارای چندین حالت پایدار نهایی (جاذب) برای یک مجموعه معین از پارامترها هستند. این پدیده به عنوان چندپایداری یا جاذب‌های همزیست شناخته می‌شود. جالب‌تر اینکه چندپایداری در بسیاری از سیستم‌های طبیعی مشاهده شده است و معمولاً نقش مهمی در عملکرد سیستم‌ها ایفا می‌کند [۳۳].



شکل ۱۶: الف ۱، ب ۱ و پ ۱ مربوط به سری زمانی x_3 (بر حسب t) و الف ۲، ب ۲ و پ ۲ مربوط به ماکزیمم x_3 روی ۷۰ زیربازه حاصل از افراز بازه زمانی $[0, 2000]$ ، به ترتیب مرتبط با به شکل‌های ۱۵ الف، ۱۵ ب و ۱۵ پ

را به ۷۰ قسمت تقسیم کرده و ماکزیمم x_3 روی هر کدام از این قسمت‌ها محاسبه و شکل‌های ۱۶ الف ۲، ۱۶ ب ۲ و ۱۶ پ ۲ با رعایت همان ترتیب قبلی بیانگر ماکزیمم‌ها روی این ۷۰ زیربازه است. ملاحظه می‌شود که در شکل ۱۶ الف ۲ که مربوط به

فرآیند تکامل سیستم از چرخه حدی آغاز می‌شود و پس از عبور از یک سری جاذب‌های متناوب، آشوبناک می‌شود. رفتارهای پیچیده دینامیکی سیستم با استفاده از طیف نمای لیاپونوف، نمودار انشعاب و مقاطع مختلف از فضای فاز بررسی می‌شوند. این موضوع می‌تواند برای محققین در حوزه شبکه‌های عصبی و سیستم‌های غیر خطی راهگشا باشد.



شکل ۱۷: الف- هم‌زیستی دو جاذب آشوبناک

و ب- هم‌زیستی دو چرخه متناوب

شواهد واضح چندپایداری اولین بار به صورت تجربی در یک لیزر گازی کیوسوئیچ آشکار شد [۳۴]. از آن زمان سیستم‌های آشوبناک با چندپایداری به طور گسترده گزارش شده است [۳۵-۳۷]. با این حال، چندپایداری، به عنوان یک جهت تحقیقاتی جدید در نظریه آشوب، هنوز در مراحل ابتدایی خود است. بنابراین، بررسی سیستم‌های آشوب‌زده با چندپایداری نیاز به تحقیقات بیشتری دارد. در شکل ۱۷، هم‌زیستی دو جاذب آشوبناک و دو چرخه متناوب نشان داده شده است. در شکل ۱۷ الف، برشهایی از فضای حالت سیستم (۳) برای $a = 1$ و $b = 0.7$ رسم شده است. شکل آبی با شرط اولیه

$$X = \begin{bmatrix} 0.2726 & 0.5649 \\ -0.4993 & 1.2724 & 9.3347 \end{bmatrix}$$

و شکل قرمز با شرط اولیه $-X$ ترسیم شده است. در شکل ۱۷ ب نیز برشهایی از فضای حالت سیستم (۳) برای $a = 0.9850$ و $b = -4.46$ رسم شده است. شکل آبی با شرط اولیه

$$Y = \begin{bmatrix} -0.0908 & -0.3588 \\ -0.0501 & 0.7396 & 6.7012 \end{bmatrix}$$

و شکل قرمز با شرط اولیه $-Y$ ترسیم شده است.

نتیجه گیری

در این مقاله، ما دینامیک یک مدل از شبکه‌های عصبی هاپفیلد مبتنی بر ۵ نورون با ارائه وزن‌های سیناپسی جدید بررسی و تحلیل کردیم. در ضرائب سیناپسی این مدل، دو پارامتر گنجاندهیم که با تغییر آنها، رفتارهای دینامیکی بسیار غنی، از جمله مدار شبه‌تناوبی (۳-چنبره)، آشوب، آشوب گذرا، ابرآشوب، و انشعاب دو برابر سازی دوره تناوب منتهی به آشوب و جاذب‌های همزیست را آشکار نمودیم. به ویژه، نشان دادیم که با تغییر پارامتر a در یک بازه بسیار کوچک $[-0.711, -0.699]$ ،

- [۸] C. Morris, H. Leca, Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *The Journal of Physiology*, ۳۵, ۱۹۳-۲۱۳ (۱۹۸۱)
- [۹] U. Güçlü, A. J. Gerven, Modeling the dynamics of human brain activity with recurrent neural networks. *Frontiers in Computational Neuroscience*, ۱۱(۷), ۱-۱۴ (۲۰۱۷)
- [۱۰] P. Zheng, W. Tang, J. Zang, Some novel double-scroll chaotic attractors in Hopfield networks. *Neurocomputing*, ۷۳, ۲۲۸۰-۲۲۸۵ (۲۰۱۰)
- [۱۱] Q. Li, S. Tang, H. Zeng, T. Zhou, On hyperchaos in a small memristive neural network. *Nonlinear Dynamics*, ۷۸, ۱۰۸۷-۱۰۹۹ (۲۰۱۴)
- [۱۲] M. F. Danca, L. Kuznets, Hidden chaotic sets in a Hopfield neural system. *Chaos Solitons Fractals*, ۱۰۳, ۱۴۴-۱۵۰ (۲۰۱۷)
- [۱۳] B. Bao, H. Qian, Q. Xu, M. Chen, J. Wang, Y. Yu, Coexisting behaviors of asymmetric attractors in hyperbolic-type memristor based Hopfield neural network. *Frontiers in Computational Neuroscience*, ۱۱(۸۱), ۱-۱۴ (۲۰۱۷)
- [۱۴] B. Bao, H. Qian, J. Wang, Q. Xu, M. Chen, H. Wu, Y. Yu, Numerical analyses and experimental validations of coexisting multiple attractors in Hopfield neural network. *Nonlinear Dynamic*, <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3380-3> (۲۰۱۷)
- [۱۵] Z. T. Njitacke, J. Kengne, H. B. Fotsin, A plethora of behaviors in a memristor based Hopfield neural

فرست منابع

- [۱] J. J. Hopfield, Neurons with graded response have collective computational properties like those of Proceedings of the two-state neurons National Academy of Sciences of the United States of America, ۸۱, ۳۰۸۸-۳۰۹۲ (۱۹۸۴)
- [۲] H. Qiu, X. Chen, W. Liu, G. Zhou, and Y. Wang, J. Lai, A fast l1-solver its applications to robust face recognition. *Journal of Industrial and Management Optimization*, ۸, ۱۶۳-۱۷۸ (۲۰۱۲)
- [۳] Y. J. Wang, G. L. Zhou, L. Caccetta, W. Q. Liu, An alternative Lagrange-dual based algorithm for sparse signal reconstruction. *IEEE Trans Signal Process*, ۵۹, ۱۸۹۵-۱۹۰۱ (۲۰۱۱)
- [۴] X. S. Yang, Q. Yuan Chaos and transient chaos in simple Hopfield neural networks. *Neurocomputing*, ۶۹, ۲۳۲-۲۴۱ (۲۰۰۵)
- [۵] A. L. Hodgkin, A. F. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, ۱۱۷, ۵۰۰-۵۴۴ (۱۹۵۲)
- [۶] E. M. Izhikevich, Which model to use for cortical spiking neurons. *IEEE Trans Neuron Netw*, ۱۵, ۱۰۶۳-۱۰۷۰ (۲۰۰۴)
- [۷] E. M. Izhikevich, *Systems in neuroscience*. MIT Press, Cambridge (۲۰۰۷)

- [۲۱] V. Ivancevic, T. Ivancevic, High-Dimensional Chaotic and Attractor Systems. Springer, Berlin (۲۰۰۶)
- [۲۲] H. Haken, At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does
- [۲۳] D. Ruelle, Strange attractors. The Mathematical Intelligencer, ۲, ۱۲۶-۱۳۷ (۱۹۸۰).
- [۲۴] M. KLEIN, G. BAIER, HIERARCHIES OF DYNAMICAL SYSTEMS. A Chaotic Hierarchy, ۱-۲۳ (۱۹۹۱)
- [۲۵] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, Chaotic behavior of multidimensional differential equations, in Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics, ۷۳۰, ۲۲۸-۳۲۷ Springer, New York (۱۹۷۸).
- [۲۶] D. J. Evans, E. G. D. Cohen, D. J. Searles, F. Bonetto, Note on the Kaplan Yorke Dimension and Linear Transport Coefficients. Journal of Statistical Physics, ۱۰۱, ۱۷-۳۴ (۲۰۰۰)
- [۲۷] M. Klein und G. Baier, Hierarchies of dynamical systems, in: A Chaotic Hierarchy, edited by G. Baier und M. Klein, Singapore: World Scientific, ۱-۲۳ (۱۹۹۱).
- [۲۸] G. Perez and HA. Cerdeira, Extracting messages masked by chaos, Physical Review Letters, ۷۴, ۱۹۷۰-۱۹۷۳ (۱۹۹۵)
- [۲۹] L. Pecora, Hyperchaos harnessed. Physics World, ۹, ۱۷-۱۷ (۱۹۹۶).
- [۳۰] J. P. Goedgebuer, L. Larger, H. Porte. Optical cryptosystem based on networks (HNNs). International Journal of Dynamics and Control. <https://doi.org/10.1007/s40435-018-0435-x> (۲۰۱۸)
- [۱۶] Z. T. Njitacke, J. Kengne, Complex dynamics of a ۴D Hopfield neural networks (HNNs) with a nonlinear synaptic weight: coexistence of multiple attractors and remerging Feigenbaum trees. International Journal of Electronics and Communications, ۹۳, ۲۴۲-۲۵۲ (۲۰۱۸)
- [۱۷] H. M. Mohammadinejad, M. H. Moslehi, Continuous attractors in Hopfield neural networks. International Journal of Differential Equations and Applications, ۱۳(۲), ۶۱-۷۰, (۲۰۱۴)
- [۱۸] G. J. Kitio, C. Ainamon, K. Rajagopal, L. K. Kengne, S. T. Kingni, J. R. M. Pone, Four-Scroll Hyperchaotic Attractor in a Five-Dimensional Memristive Wien Bridge Oscillator: Analysis and Digital Electronic Implementation. Mathematical Problems in Engineering, <https://doi.org/10.1155/2021/4820771>, (۲۰۲۱)
- [۱۹] F. Yu, L. Liu, S. Qian, L. Li, Y. Huang, C. Shi, S. Cai, X. Wu, S. Du, Q. Wan, Chaos-Based Application of a Novel Multistable Δ D Memristive Hyperchaotic System with Coexisting Multiple Attractors. Complexity, <https://doi.org/10.1155/2020/18034196>, (۲۰۲۲)
- [۲۰] B.B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco (۱۹۸۲).

- Turbulence in a Q-Switched Gas Laser. *Physical Review Letters*, ۴۹, ۱۲۱۷ (۱۹۸۲).
- [۳۵] J. C. Sprott, X. Wang, and G. Chen, Coexistence of point, periodic and strange attractors, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, ۲۳(۵), ۱۳۵۰-۹۳ (۲۰۱۳).
- [۳۶] J. Kengne, Z. T. Njitacke, H. B. Fotsin, Dynamical analysis of a simple autonomous jerk system with multiple attractors. *Nonlinear Dynamics*, ۸۳, ۷۵۱-۷۶۵ (۲۰۱۶).
- [۳۷] G. Wang, F. Yuan, G. Chen, Y. Zhang, Coexisting multiple attractors and riddled basins of a memristive system. *Chaos*, ۲۸, ۰۱۳۱۲۵ (۲۰۱۸)
- synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode. *Physical Review Letters*, ۸۰, ۲۲۴۹-۲۲۵۲, (۱۹۹۸).
- [۳۱] C. Li, X. Liao, K. Wong, Lag synchronization of hyperchaos with application to secure communications. *Chaos, Solitons & Fractals*, ۲۳, ۱۸۳-۹۳ (۲۰۰۵).
- [۳۲] T. Gao, Z. Chen. Image encryption based on a new total shuffling algorithm. *Chaos, Solitons & Fractals*, ۳۸, ۲۱۳-۲۲۰ (۲۰۰۸).
- [۳۳] A. N. Pisarchik, U. Feudel, Control of multistability, *Physics Reports*, ۵۴۰(۴), ۱۶۷-۲۱۸ (۲۰۱۴).
- [۳۴] F.T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni, J. Tredicce, Experimental Evidence of Subharmonic Bifurcations, Multistability, and