



پایایی اولام برای یک دستگاه بیضوی شبه-یکنوا از معادلات لاپلاسی

مهدی چوبین^۱، محمدباقر قائمی^۲

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران

^(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

^(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۱۰

چکیده

در این مقاله، پایایی هایرز-اولام-راسیاس دستگاه بیضوی شبه-یکنوا (همیاری) از معادلات لاپلاسی

$$\begin{aligned} -\Delta u &= F(x, u, v), \quad x \in \Omega, \\ -\Delta v &= G(x, u, v), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (*)$$

با شرایط مرزی دیریکله همگن که در کاربردهای مختلف از جمله پویایی جمعیت و ژنتیک جمعیت به وجود می‌آید را بررسی می‌کنیم که در آن Ω یک دامنه کراندار با مرز هموار $\partial\Omega$ در $\mathbb{R}^n$ ، Δz عملگر لاپلاس n -بعدی تعریف شده با ضابطه $\Delta z := \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}$ و $F, G: \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی معین هستند. هدف ما در این مقاله، بررسی پایایی هایرز-اولام-راسیاس دستگاه (*) با استفاده از روش جدید جواب‌های پایینی و بالایی به دو مفهوم «کلاسیک» و «ضعیف» می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: پایایی اولام، دستگاه بیضوی شبه-یکنوا، جواب‌های پایینی و بالایی

۱- مقدمه

پایایی معادلات تابعی یک ابزار بسیار مهم در زمینه‌های مختلف ریاضیات است. این مساله با سوال اولام [۱] در سال ۱۹۴۰ به این شکل مطرح شد که:

«تحت چه شرایطی یک نگاشت جمعی نزدیک به یک نگاشت جمعی تقریبی وجود دارد.»

هایرز [۲] برای اولین بار به سوال اولام درباره نگاشت‌های جمعی تقریبی در فضاهای باناخ پاسخ داد. نتیجه‌ای که هایرز ارائه داد به شرح زیر است:

فرض کنید E_1 و E_2 فضاهای باناخ حقیقی باشند و $\varepsilon > 0$. آن‌گاه برای هر نگاشت $f: E_1 \rightarrow E_2$ که به ازای هر $x, y \in E_1$

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon, \quad (1)$$

یک نگاشت جمعی $g: E_1 \rightarrow E_2$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in E_1$ $\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$. راسیاس [۳] با در نظر گرفتن یک تابع φ وابسته به x و y به جای ε در (۱) نتیجه هایرز را تعمیم داد و این مفهوم امروزه تحت عنوان تعمیم پایایی هایرز-اولام یا پایایی هایرز-اولام-راسیاس شناخته شده است. بعد از آن، تعمیم‌ها و صورت‌های مختلفی از این نتیجه بیان شد، به [۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴] و منابع آن‌ها مراجعه کنید. آلسینا و گر اولین نویسندگانی بودند که پایایی هایرز-اولام یک معادله دیفرانسیل را بررسی کردند ([۱۱]). آن‌ها ثابت کرده‌اند اگر I به بازه باز در $\mathbb{R}$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، برای هر نگاشت مشتق‌پذیر $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ به طوری که به ازای $x \in I$

$$\|f'(x) - f(x)\| \leq \varepsilon,$$

یک نگاشت مشتق‌پذیر $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ با ویژگی $g'(x) = g(x)$ موجود است به طوری که به ازای $x \in I$

$$\|f(x) - g(x)\| \leq 3\varepsilon.$$

این نتیجه به پایداری معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول و معادله دیفرانسیل خطی مرتبه بالاتر با ضرایب ثابت [۱۴، ۱۳، ۱۲]، معادله انتگرال دیفرانسیل کسری [۱۵]، معادلات دیفرانسیل اویلر [۱۶]، معادلات دینامیکی خطی در مقیاس‌های زمانی [۱۷] و غیره، تعمیم داده شد.

بررسی پایایی هایرز-اولام در معادلات دیفرانسیل جزئی به تازگی آغاز شده است که بعنوان نمونه می‌توان نتایج بدست آمده توسط یونگ [۱۸]، [۱۹]، لونگو و روس [۲۰]، [۲۱] را در این‌جا ذکر کرد. یونگ [۲۲] پایایی هایرز-اولام معادلات دیفرانسیل به شکل $y' = f(x, y(x))$ و گاورتا و همکاران [۲۳] پایایی هایرز-اولام معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با شرایط مرزی به شکل $y'' = \beta(x)y$ را ثابت کردند.

چوبین و جانشیری [۲۴] پایایی هایرز-اولام و هایرز-اولام-راسیاس معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

$$y' = f(x, y(x))$$

را بدون فرض پیوستگی لپشیتز^۲، بر اساس یک روش جدید با عنوان «روش جواب‌های پایینی و بالایی»^۳ اثبات کردند و برخی نتایج بدست آمده قبلی که با روش معمول در این موضوع یعنی روش نقطه ثابت^۴ بدست آمده بود را بهبود بخشیدند. آن‌ها همچنین پایایی هایرز-اولام معادلات دیفرانسیل بیضوی مرتبه دوم $-\Delta u(x) = f(x, u(x))$ با شرایط مرزی دیریکله همگن را ثابت کردند.

² Lipschitz continuity

³ upper and lower solutions method

⁴ fixed point approach

در این مقاله، ما به اثبات پایایی هایرز-اولام-راسیاس دستگاه لاپلاسی بیضوی با شرایط مرزی دیریکله همگن

$$-\Delta u = F(x, u, v), \quad x \in \Omega, \quad (۲)$$

$$-\Delta v = G(x, u, v), \quad x \in \Omega,$$

$$u = 0 = v, \quad x \in \partial\Omega,$$

می‌پردازیم، که در آن Δz عملگر لاپلاس تعریف شده با ضابطه $\Delta z := \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}$ یک دامنه کراندار با

مرز هموار $\partial\Omega$ در $\mathbb{R}^n$ و $F, G: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی معین هستند. دستگاه (۲) را یک دستگاه «شبه یکنوا»^۵

یا «همیاری»^۶ می‌نامیم هرگاه F نسبت به v و G نسبت به u ناکاهشی^۷ باشند.

هدف ما در این مقاله، بررسی پایایی هایرز-اولام-راسیاس دستگاه (۲) با استفاده از روش جدید جواب‌های پایینی و بالایی به دو مفهوم «کلاسیک»^۸ و «ضعیف»^۹ می‌باشد. روش جواب‌های پایینی و بالایی ابزاری شناخته شده برای اثبات نتایج وجود جواب برای بسیاری از کلاس‌های مسایل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌باشد. این یک واقعیت شناخته شده است که وجود جواب‌های پایینی و بالایی α و β با شرط $\alpha \leq \beta$ حاکی از وجود یک جواب u با ویژگی $\alpha \leq u \leq \beta$ است. اولین استفاده روش جواب‌های پایینی و بالایی برای اثبات وجود جواب کلاسی از معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی را می‌توان در پیکارد جستجو کرد. در سال ۱۸۹۰ برای معادلات دیفرانسیل جزئی [۲۵] و در ۱۸۹۳ برای معادلات دیفرانسیل معمولی [۲۶]، او تکرارهای یکنوا را از یک جواب پایینی معرفی کرد. موفقیت عمده در سال ۱۹۳۱ برای یک مساله معادله دیفرانسیل معمولی دیریکله توسط اسکورزا دراگونی [۲۷] و در سال ۱۹۵۴ برای یک مساله معادله دیفرانسیل جزئی دیریکله توسط ناگومو [۲۸] به دست آمد. اثبات وجود جواب به مفهوم کلاسیک با شروع از آمان [۲۹] به طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته است (برای اطلاعات بیشتر به [۳۰]، [۳۱] مراجعه شود). بعداً دانسر-سویرز [۳۲] و کانادا-دراک-گامز [۳۳]، [۳۴] وجود جواب را به معنای ضعیف ثابت کردند.

۲- پایایی هایرز-اولام-راسیاس دستگاه (۲)

این بخش به مطالعه پایایی هایرز-اولام-راسیاس دستگاه (۲) با شرایط مرزی دیریکله اختصاص دارد. برای نمایش بهتر، این بخش را به دو زیر بخش تقسیم می‌کنیم. این به این دلیل است که جواب‌های دستگاه (۲) را می‌توان در دو دسته طبقه بندی کرد، دسته اول جواب‌های کلاسیک و دیگری جواب‌های به مفهوم ضعیف. به طور شگفت-انگیزی یک معادله دیفرانسیل ممکن است جواب‌هایی داشته باشد که دقیقاً مشتق پذیر نیستند و فرمول ضعیف اجازه می‌دهد چنین جواب‌هایی را پیدا کنیم. قبل از ادامه، توجه داشته باشیم که در این بخش Ω یک دامنه کراندار در $\mathbb{R}^n$ با مرز هموار $\partial\Omega$ ، فضای باناخ متشکل از همه توابع پیوسته روی فضای فشرده $\bar{\Omega}$ ، $C^2(\Omega)$ فضای متشکل از همه توابعی که مشتقات تا مرتبه دوم آن‌ها روی Ω موجود و پیوسته است، $L^\infty(\Omega)$ و $W^{1,2}(\Omega)$ و $W_0^{1,2}(\Omega)$ فضاهای تابعی شناخته شده لبگ و سوبولف هستند.

زوج $(u, v) \in [C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^2$ را یک جواب کلاسیک دستگاه (۲) می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in \bar{\Omega}$ در دستگاه (۲) صدق کند. همچنین می‌گوییم $(u, v) \in [W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)]^2$ یک جواب ضعیف دستگاه (۲) است هرگاه روی $\partial\Omega$ ، $u = v = 0$ و به ازای هر

⁵ quasi-monotone

⁶ cooperative

⁷ nondecreasing

⁸ classical

⁹ weak

$$z \in W := \{\xi \in W_0^{1,2}(\Omega) | \xi \geq 0\}$$

داشته باشیم

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla z dx &= \int_{\Omega} F(x, u, v) z dx, \\ \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla z dx &= \int_{\Omega} G(x, u, v) z dx. \end{aligned}$$

درواقع، وقتی به معنای ضعیف به دنبال جواب هستیم، $-\Delta$ را به عنوان یک نگاشت از فضای سوبولف $W^{1,2}(\Omega)$ به $(W^{1,2}(\Omega))^*$ و با ضابطه

$$\langle -\Delta u, z \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla z dx$$

در نظر می‌گیریم.

در ادامه، پایایی هایرز-اولام-راسیاس دستگاه (۲) را به دو مفهوم کلاسیک و ضعیف تعریف می‌کنیم و هر دو مفهوم پایایی را به ترتیب در دو زیربخش ۲-۱ و ۲-۲ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف ۲-۱. فرض کنید $\epsilon, \epsilon > 0$. اگر برای هر $(u, v) \in [C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^2$ نامساوی‌های دیفرانسل

$$\begin{aligned} |\Delta u + F(x, u, v)| &\leq \epsilon, \\ |\Delta v + G(x, u, v)| &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

به ازای هر $x \in \Omega$ برقرار باشد و روی $\partial\Omega$ $u = v = 0$ آن‌گاه جواب (کلاسیک) $(\hat{u}, \hat{v}) \in [C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^2$ از دستگاه (۲) موجود باشد به گونه‌ای که برای هر $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} |u(x) - \hat{u}(x)| &\leq K(\epsilon, \epsilon), \\ |v(x) - \hat{v}(x)| &\leq K(\epsilon, \epsilon), \end{aligned}$$

که در آن K عبارتی است تنها بر حسب ϵ و ϵ . در این صورت می‌گوییم که مساله (۲) دارای «پایایی هایرز-اولام با شرایط مرزی دیریکله همگن به مفهوم کلاسیک» است.

اگر تعریف بالا وقتی در آن ϵ, ϵ و K را توسط ϕ, ψ و جایگزین می‌کنیم همچنان درست باشد که در آن $\phi, \psi, \phi: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ توابعی هستند که به $u, v, \hat{u}, \hat{v}$ وابسته نیستند، در این صورت می‌گوییم که مساله

(۲) دارای «پایایی هایرز-اولام-راسیاس با شرایط مرزی دیریکله همگن به مفهوم کلاسیک» است. به طور مشابه پایایی

هایرز-اولام و هایرز-اولام-راسیاس با شرایط مرزی دیریکله همگن به مفهوم ضعیف قابل تعریف است. در واقع

می‌گوییم که مساله (۲) دارای «پایایی هایرز-اولام-راسیاس با شرایط مرزی دیریکله همگن به مفهوم ضعیف» است

هرگاه برای هر $(u, v) \in [W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)]^2$ اگر روابط زیر

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla z dx - \int_{\Omega} F(x, u, v) z dx \right| &\leq \int_{\Omega} \phi(x) z dx, \\ \left| \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla z dx - \int_{\Omega} G(x, u, v) z dx \right| &\leq \int_{\Omega} \psi(x) z dx, \end{aligned}$$

$$u(x) = v(x) = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

به ازای هر $z \in W$ برقرار باشند، آن‌گاه نتیجه شود جواب ضعیف $(\hat{u}, \hat{v}) \in [W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)]^2$ از

دستگاه (۲) موجود است به گونه‌ای که برای هر $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} |u(x) - \hat{u}(x)| &\leq \phi(x), \\ |v(x) - \hat{v}(x)| &\leq \psi(x). \end{aligned}$$

۲-۱ پایایی دستگاه (۲) به مفهوم کلاسیک

در این زیر بخش پایایی هایرز-اولام-راسیاس دستگاه (۲) را به مفهوم کلاسیک بررسی می‌کنیم. ابتدا نیاز داریم که تعریف زیر را بیان کنیم که بر اساس مرجع [۲۹] است.

تعریف ۲-۱-۱. فرض کنید $0 < \mu \leq 1$ و (X, d) یک فضای متریک فشرده با بیشتر از یک نقطه باشد. در این صورت تابع $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ را μ -هولدر^{۱۰} پیوسته می‌نامیم هرگاه

$$\sup \left\{ \frac{|f(p) - f(q)|}{d(p, q)^\mu} : p, q \in X, p \neq q \right\} < +\infty.$$

یک تابع ۱-هولدر پیوسته را پیوسته لیپشتیتز می‌نامیم.

در ادامه فرضیات ثابت زیر را که در طول این زیربخش و همچنین برای برقراری لم بعدی به آن‌ها نیاز داریم از مرجع [۲۹] بیان می‌کنیم. فرض کنید I یک بازه بسته در $\mathbb{R}$ با درون ناتهی است و قرار دهید $X = \bar{\Omega} \times I^2$ فرض کنید توابع $F, G: X \rightarrow \mathbb{R}$ در فرضیات (ف ۱) و (ف ۲) زیر صدق می‌کنند:

(ف ۱) F و G توابعی μ -هولدر پیوسته با شرط $0 < \mu < 1$ هستند.

(ف ۲) ثابت‌های نامنفی c و c' وجود دارند به طوری که به ازای هر $x \in \Omega$ و $s, s', t, t' \in I$ با شرط $s > s'$ و $t > t'$ نامساوی‌های زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} F(x, s, t) - F(x, s', t) &\geq -c(s - s'), \\ G(x, s, t) - G(x, s, t') &\geq -c'(t - t'). \end{aligned}$$

روش ما بر اساس روش جواب‌های پایینی و بالایی است که به شرح زیر است.

تعریف ۲-۱-۲. یک جواب پایینی (کلاسیک) از دستگاه (۲) یک زوج $(\underline{u}, \underline{v}) \in [C^\gamma(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^2$ است به طوری که

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u} &\leq F(x, \underline{u}, \underline{v}), \quad x \in \Omega, \\ -\Delta \underline{v} &\leq G(x, \underline{u}, \underline{v}), \quad x \in \Omega, \\ \underline{u} &\leq 0, \underline{v} \leq 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

و یک جواب بالایی (کلاسیک) از دستگاه (۲) یک زوج $(\bar{u}, \bar{v}) \in [C^\gamma(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^2$ است به طوری که

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{u} &\geq F(x, \bar{u}, \bar{v}), \quad x \in \Omega, \\ -\Delta \bar{v} &\geq G(x, \bar{u}, \bar{v}), \quad x \in \Omega, \\ \bar{u} &\geq 0, \bar{v} \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

می‌گوییم $(u, v) \leq (u_1, v_1)$ ، اگر به ازای هر $x \in \bar{\Omega}$ و $u(x) \leq u_1(x)$ و $v(x) \leq v_1(x)$ هم‌اکنون آماده‌ایم تا لم اصلی این زیر بخش [۲۹] را بیان کنیم.

¹⁰ Hö lder

لم ۱-۲-۳. فرض کنید فرضیات (ف ۱) و (ف ۲) برقرار باشند. اگر یک جواب پایینی $(\underline{u}, \underline{v})$ و یک جواب بالایی $(\overline{u}, \overline{v})$ از دستگاه (۲) موجود باشند به طوری که به ازای هر $x \in \overline{\Omega}$ ، در شرط $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\overline{u}, \overline{v})$ صدق کنند، آن‌گاه یک جواب کلاسیک (u, v) از دستگاه (۲) موجود است به طوری که

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u, v) \leq (\overline{u}, \overline{v}).$$

حال نتیجه اصلی این زیربخش را بیان می‌کنیم. در واقع ثابت می‌کنیم دستگاه (۲) به مفهوم کلاسیک پایای هایرز-اولام-راسیاس با شرایط مرزی دیریکله همگن است.

قضیه ۱-۲-۴. دستگاه شبه-یکنوای (۲) را تحت فرضیات (ف ۱) و (ف ۲) در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $\theta, \vartheta \in L^\infty(0, |I|)$ و توابع t نافزایشی^{۱۱} است و $F(x, s, t)$ نسبت به مولفه s و $G(x, s, t)$ نسبت به مولفه t نافزایشی^{۱۱} است و $t > 0$ و $s > s'$ با شرط $s, s', t, t' \in I$ و $x \in \Omega$ هر به ازای هر $t' > 0$ نامساوی‌های زیر برقرارند:

$$F(x, s, t) - F(x, s, t') \leq \theta(t - t'), \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} G(x, s, t) - G(x, s', t) \\ \leq \vartheta(s - s'). \end{aligned}$$

اگر $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in [C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})]^2$ موجود باشد به طوری که

$$|\Delta \tilde{u}(x) + F(x, \tilde{u}(x), \tilde{v}(x))| \leq \varphi(x), x \in \Omega, \quad (۴)$$

$$|\Delta \tilde{v}(x) + G(x, \tilde{u}(x), \tilde{v}(x))| \leq \psi(x), x \in \Omega,$$

$$\tilde{u}(x) = \tilde{v}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

که در آن $(u, v) \in [C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})]^2$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in \Omega$ و $\varphi, \psi > 0$ و $\varphi, \psi \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ، آن‌گاه یک جواب کلاسیک $(u, v) \in [C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})]^2$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in \Omega$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq (M + L) \|e\|_\infty, \quad (۵)$$

$$|v(x) - \tilde{v}(x)| \leq (M + L) \|e\|_\infty,$$

که در آن e جواب مثبت یکتای معادله

$$-\Delta e = 1, \quad x \in \Omega,$$

$$e = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

است و

$$\begin{aligned} M &:= \max \{ \|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \}, \\ L &:= \max \{ \|\theta\|_\infty, \|\vartheta\|_\infty \}. \end{aligned}$$

¹¹ nonincreasing

اثبات. فرض کنید $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in [C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^2$ در (۴) صدق کند. در این صورت به ازای هر $x \in \Omega$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F(x, \tilde{u}, \tilde{v}) - \varphi(x) &\leq -\Delta \tilde{u}(x) \leq F(x, \tilde{u}, \tilde{v}) + \varphi(x), \\ G(x, \tilde{u}, \tilde{v}) - \psi(x) &\leq -\Delta \tilde{v}(x) \leq G(x, \tilde{u}, \tilde{v}) + \psi(x). \end{aligned} \quad (۶)$$

هم‌اکنون قضیه ۲-۴ را با ساختن یک جواب پایینی $(\underline{u}, \underline{v})$ و یک جواب بالایی $(\bar{u}, \bar{v})$ از دستگاه (۲) با شرط $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\bar{u}, \bar{v})$ ثابت خواهیم کرد. فرض می‌کنیم e جواب مثبت یکتای معادله

$$\begin{aligned} -\Delta e &= 1, \quad x \in \Omega, \\ e &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

است و قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} M &:= \max \{ \|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \}, \\ L &:= \max \{ \|\theta\|_\infty, \|\vartheta\|_\infty \}. \end{aligned}$$

زوج‌های $(\underline{u}, \underline{v})$ و $(\bar{u}, \bar{v})$ متعلق به $[C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} (\underline{u}, \underline{v}) &:= (\tilde{u} - (M+L)e, \tilde{v} - (M+L)e), \\ (\bar{u}, \bar{v}) &:= (\tilde{u} + (M+L)e, \tilde{v} + (M+L)e). \end{aligned}$$

در این صورت روی $\partial\Omega$ خواهیم داشت $\underline{u} = \underline{v} = 0$ ، $\bar{u} = \bar{v} = 0$ و برای هر $x \in \Omega$ نیز طبق (۶) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u} &= -\Delta \tilde{u} - (M+L)(-e\Delta) \\ &\leq [F(x, \tilde{u}, \tilde{v}) - L] + [\varphi(x) - M] \\ &\leq F(x, \underline{u}, \underline{v}) - L \\ &\leq F(x, \underline{u}, \underline{v}), \end{aligned}$$

که نامساوی آخر از رابطه (۳) حاصل می‌شود به این صورت که

$$F(x, \underline{u}, \underline{v}) - F(x, \underline{u}, \underline{v}) \leq \|\theta\|_\infty \leq L.$$

به همین ترتیب بنابر (۳) برای هر $x \in \Omega$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{u} &= -\Delta \tilde{u} + (M+L)(-e\Delta) \\ &\geq [F(x, \tilde{u}, \tilde{v}) + L] + [M - \varphi(x)] \\ &\geq F(x, \bar{u}, \bar{v}) + L \\ &\geq F(x, \bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت برای هر $x \in \Omega$

$$-\Delta \underline{v} \leq G(x, \underline{u}, \underline{v}), \quad -\Delta \bar{v} \geq G(x, \bar{u}, \bar{v}).$$

از این رو زوج‌های $(\underline{u}, \underline{v})$ و $(\bar{u}, \bar{v})$ به ترتیب یک جواب پایینی و بالایی از دستگاه (۲) می‌باشند. از آنجا که در $\bar{\Omega}$ ، $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\bar{u}, \bar{v})$ ، بنابر لم ۲-۱-۳ یک جواب کلاسیک (u, v) از دستگاه (۲) وجود دارد به طوری که

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u, v) \leq (\bar{u}, \bar{v}).$$

به علاوه

$$\begin{aligned} |u(x) - \tilde{u}(x)| &\leq (M + L) \|e\|_{\infty}, \\ |v(x) - \tilde{v}(x)| &\leq (M + L) \|e\|_{\infty}. \end{aligned}$$

بنابراین دستگاه شبه-یکنوای (۲) به مفهوم کلاسیک پایای هایرز-اولام-راسیاس با شرایط مرزی دیریکله همگن است.

۲-۲ پایایی دستگاه (۲) به مفهوم ضعیف

جواب‌های به مفهوم ضعیف بسیار مهم هستند، زیرا بسیاری از معادلات دیفرانسیل حاکم بر پدیده‌های دنیای واقعی به قدر کافی جواب‌های هموار را قبول نمی‌کنند، بنابراین تنها راه حل چنین معادلاتی استفاده از فرمول ضعیف است. در واقع، حتی برای آن دسته از مسایل مقدار مرزی که به نظر می‌رسد به صورت کلاسیک قابل حل باشند، معمولاً در ابتدا جستجوی نوع مناسب جواب ضعیف به مصلحت است. فرضیات زیر در کل این زیربخش مورد نیاز خواهد بود:

(ف۳) توابع $G(x, s, t)$ و $F(x, s, t)$ کاراتئودوری^{۱۲} هستند (یعنی $F(x, \dots)$ و $G(x, \dots)$ تقریباً همه جا^{۱۳} در Ω پیوسته هستند، $F(\cdot, s, t)$ و $G(\cdot, s, t)$ به ازای هر $(s, t) \in I^2$ اندازه‌پذیر^{۱۴} هستند) و اگر s و t به مجموعه‌های کراندار متعلق باشد، $F(\cdot, s, t)$ و $G(\cdot, s, t)$ کراندار هستند.

(ف۴) تابع پیوسته و افزایشی^{۱۵} $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $h(0) = 0$ و نگاشت‌های $s \mapsto F(x, s, t) + h(s)$ و $t \mapsto G(x, s, t) + h(t)$ تقریباً همه جا $x \in \Omega$ ناکاهشی است.

ابتدا جواب ضعیف پایینی و بالایی دستگاه (۲) را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲-۲-۱. می‌گوییم $(\underline{u}, \underline{v})$ و $(\bar{u}, \bar{v})$ متعلق به $[W^{1,2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)]^2$ به ترتیب یک جواب ضعیف پایینی و بالایی از دستگاه (۲) هستند هرگاه روی $\partial\Omega$ داشته باشیم

$$\underline{u} \leq 0 \leq \bar{u}, \quad \underline{v} \leq 0 \leq \bar{v},$$

و برای هر $z \in W$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \underline{u} \cdot \nabla z \, dx &\leq \int_{\Omega} F(x, \underline{u}, \underline{v}) z \, dx, \\ \int_{\Omega} \nabla \underline{v} \cdot \nabla z \, dx &\leq \int_{\Omega} G(x, \underline{u}, \underline{v}) z \, dx, \\ \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla z \, dx &\geq \int_{\Omega} F(x, \bar{u}, \bar{v}) z \, dx, \end{aligned}$$

¹² Carathéodory

¹³ almost everywhere

¹⁴ measurable

¹⁵ increasing

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{v} \cdot \nabla z dx \geq \int_{\Omega} G(x, \bar{u}, \bar{v}) z dx.$$

لم اصلی این زیربخش از مرجع [۳۴] به شرح زیر است.

لم ۲-۲-۲. فرض کنید فرضیات (ف۳) و (ف۴) برقرار باشند. اگر یک جواب ضعیف پایینی $(\underline{u}, \underline{v})$ و یک جواب ضعیف بالایی $(\bar{u}, \bar{v})$ از دستگاه (۲) موجود باشد به طوری که تقریباً همه جا در Ω ، در شرط $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\bar{u}, \bar{v})$ صدق کنند، آن‌گاه یک جواب ضعیف (u, v) از دستگاه (۲) موجود است به طوری که

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u, v) \leq (\bar{u}, \bar{v}).$$

هم‌اکنون آماده‌ایم تا نتیجه اصلی این زیربخش یعنی پایایی هایرز-اولام-راسیاس دستگاه (۲) با شرایط مرزی دیریکله همگن به مفهوم ضعیف را ثابت کنیم.

قضیه ۳-۲-۲. دستگاه شبه-یکنوای (۲) را تحت فرضیات (ف۳) و (ف۴) در نظر بگیرید و فرض کنید M و L معرفی شده در قضیه ۲-۱-۴ باشند. همچنین فرض کنید $F(x, s, t)$ نسبت به مولفه s و $G(x, s, t)$ نسبت به مولفه t نافزایشی است و توابع $\theta, \vartheta \in L^{\infty}(0, |I|)$ موجود هستند به طوری که به ازای هر $x \in \Omega$ و $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in [W^{1,2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)]^2$ اگر $t > t'$ و $s > s'$ با شرط $s, s', t, t' \in I$ موجود باشد به طوری که هر $z \in W$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla z dx - \int_{\Omega} F(x, \tilde{u}, \tilde{v}) z dx \right| &\leq \int_{\Omega} \varphi(x) z dx, \\ \left| \int_{\Omega} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla z dx - \int_{\Omega} G(x, \tilde{u}, \tilde{v}) z dx \right| &\leq \int_{\Omega} \psi(x) z dx, \\ \tilde{u}(x) = \tilde{v}(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

که در آن $(u, v) \in [W^{1,2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)]^2$ و $\varphi, \psi \in C(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ و $\varphi, \psi > 0$ ، آن‌گاه یک جواب ضعیف (u, v) از دستگاه (۲) وجود دارد به طوری که در (۵) صدق می‌کند. به عبارتی، دستگاه (۲) به مفهوم ضعیف پایایی هایرز-اولام-راسیاس با شرایط مرزی دیریکله همگن است.

اثبات. مشابه اثبات قضیه ۲-۱-۴ قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}) &:= (\tilde{u} - (M+L)e, \tilde{v} - (M+L)e), \\ (u, v) &:= (\tilde{u} + (M+L)e, \tilde{v} + (M+L)e). \end{aligned}$$

در این صورت روی $\partial\Omega$ ، $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{v}} = u = v = 0$. از آن‌جا که برای هر $z \in W$

$$\int_{\Omega} F(x, \tilde{u}, \tilde{v}) z dx - \int_{\Omega} \varphi z dx \leq \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla z dx \leq \int_{\Omega} F(x, \tilde{u}, \tilde{v}) z dx + \int_{\Omega} \varphi z dx$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \underline{\underline{u}} \cdot \nabla z dx &= \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla z dx - (M+L) \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla z dx \\ &\leq \int_{\Omega} [F(x, \tilde{u}, \tilde{v}) - L] z dx + \int_{\Omega} [\varphi(x) - M] z dx \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\Omega} [F(x, \underline{u}, \tilde{v}) - L] z dx \leq \int_{\Omega} F(x, \underline{u}, \underline{v}) z dx,$$

و

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla z dx &= \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla z dx + (M + L) \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla z dx \\ &\geq \int_{\Omega} [F(x, \tilde{u}, \tilde{v}) + L] z dx + \int_{\Omega} [M - \varphi(x)] z dx \\ &\geq \int_{\Omega} [F(x, \bar{u}, \tilde{v}) + L] z dx \geq \int_{\Omega} F(x, \bar{u}, \bar{v}) z dx. \end{aligned}$$

به طور مشابه برای همه $z \in W$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \underline{v} \cdot \nabla z dx &\leq \int_{\Omega} G(x, \underline{u}, \underline{v}) z dx, \\ \int_{\Omega} \nabla \bar{v} \cdot \nabla z dx &\geq \int_{\Omega} G(x, \bar{u}, \bar{v}) z dx. \end{aligned}$$

از آنجا که $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\bar{u}, \bar{v})$ ، بنابر لم ۲-۲-۲ حکم نتیجه می‌شود.

- [1] S. M. Ulam, "A Collection of the Mathematical Problems," *Interscience, New York*, 1960.
- [2] D. H. Hyers, "On the stability of the linear functional equation," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 27, pp. 222–224, 1941.
- [3] Th. M. Rassias, "On the stability of the linear mapping in Banach spaces," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 72, pp. 297–300, 1978.
- [4] Y. J. Cho, M. B. Ghaemi, M. Choubin, and M. Eshaghi Gordji, "On the Hyers-Ulam stability of sextic functional equations in β -homogeneous probabilistic modular spaces," *Math. Inequal. Appl.*, vol. 16, pp. 1097–1114, 2013.
- [5] S. Czerwik, "Functional Equations and Inequalities in Several Variables," *World Scientific*, 2002.
- [6] G.-L. Forti, "Comments on the core of the direct method for proving Hyers-Ulam stability of functional equations," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 295, pp. 127–133, 2004.
- [7] D. H. Hyers, G. Isac, and Th. M. Rassias, "Stability of Functional Equations in Several Variables," *Birkhäuser, Basel*, 1998.
- [8] S.-M. Jung, "Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Mathematical Analysis," *Hadronic Press, Palm Harbour*, 2001.
- [9] D. Popa, "Hyers-Ulam-Rassias stability of a linear recurrence," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 309, pp. 591–597, 2005.
- [10] T. Aoki, "On the stability of the linear transformations in Banach spaces," *J. Math. Soc. Japan*, vol. 2, pp. 64–66, 1950.
- [11] C. Alsina and R. Ger, "On some inequalities and stability results related to the exponential function," *J. Inequal. Appl.*, vol. 2, pp. 373–380, 1998.
- [12] T. Miura, S. Miyajima, and S. E. Takahasi, "Hyers-Ulam stability of linear differential operator with constant coefficients," *Math. Nachr.*, vol. 258, pp. 90–96, 2003.
- [13] S. E. Takahasi, T. Miura, and S. Miyajima, "On the Hyers-Ulam stability of the Banach space-valued differential equation $y'=\lambda y$," *Bull. Korean Math. Soc.*, vol. 39, pp. 309–315, 2002.
- [14] S. E. Takahasi, H. Takagi, T. Miura, and S. Miyajima, "The Hyers-Ulam stability constants of first order linear differential operators," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 296, pp. 403–409, 2004.
- [15] E. C. de Oliveira and J. V. C. Sousa, "Ulam-Hyers-Rassias stability for a class of fractional integro-differential equations," *Results Math.*, vol. 73, p. 111, 2018. <https://doi.org/10.1007/s00025-018-0872-z>
- [16] D. Popa and G. Pugna, "Hyers-Ulam stability of Euler's differential equation," *Results Math.*, vol. 69, pp. 317–325, 2016.
- [17] Y. Shen, "The Ulam stability of first order linear dynamic equations on time scales," *Results Math.*, vol. 72, pp. 1881–1895, 2017.
- [18] S.-M. Jung and K.-S. Lee, "Hyers-Ulam stability of first order linear partial differential equations with constant coefficients," *Math. Inequal. Appl.*, vol. 10, pp. 261–266, 2007.

- [19] S.-M. Jung, “Hyers-Ulam stability of linear partial differential equations of first order,” *Appl. Math. Lett.*, vol. 22, pp. 70–74, 2009.
- [20] N. Lungu and I. A. Rus, “Ulam stability of nonlinear hyperbolic partial differential equations,” *Carpathian J. Math.*, vol. 24, pp. 403–408, 2008.
- [21] I. A. Rus, “Remarks on Ulam stability of the operatorial equations,” *Fixed Point Theory*, vol. 10, pp. 305–320, 2009.
- [22] S.-M. Jung, “A Fixed Point Approach to the Stability of Differential Equations $y' = F(x, y)$,” *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 33, no. 1, pp. 47–56, 2010.
- [23] P. Găvrut ă, S.-M. Jung, and Y. Le, “Hyers-Ulam stability for second-ordered linear partial differential equations with boundary condition,” *EJDE*, vol. 2011, no. 80, pp. 1–5, 2011.