دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دهم، شماره پنجاه و یکم، آذر و دی ۱۴۰۳
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

نتایجی در مورد خاصیت آرتینی مدول‌های کوهمولوژی موضعی در نقطهٔ ارتفاع ایده‌آل

میریوسف صادقی[*1]، خدیجه احمدی آملی[2]، مریم چقامیرزا[3]

[(۱و۲و۳)] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۳/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۱۰

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابجاییِ نوتری، I یک ایده‌آل غیرصفر از R و M یک R - مدول تولید شدهٔ متناهی باشند. ابتدا نشان می‌دهیم درصورتیکه $IM \neq M$ و $\mathrm{MinAss_R}(M/IM) \subseteq \mathrm{Min}(I) \backslash \mathrm{Max}(R)$ باشند، آن‌گاه $\mathrm{Supp}_R H_I^{\mathrm{ht}_M I}(M) \nsubseteq \mathrm{Max}(R)$ و بنابراین R -مدول $H_I^{\mathrm{ht}_M I}(M)$ آرتینی نیست. به عنوان نتیجه‌ای از آن و با انتخاب حلقه R به‌جای M، این مطلب حاصل می‌شود که اگر $\mathrm{Min}(I) \backslash \mathrm{Max}(R) \neq \emptyset$ ، آنگاه R - مدول $H_I^{\mathrm{ht} I}(R)$ آرتینی نیست. سپس در حالتی که R یک حلقه موضعی باشد، شرایطی را ارائه داده‌ایم که تحت آن‌ها R -مدول $H_I^{\dim R-1}(R)$ می‌تواند آرتینی باشد.

واژه‌های کلیدی: مدول‌های کوهمولوژی موضعی، مدول‌های آرتینی، حلقه‌های موضعی، حلقه‌های کوهن- مکالی، حلقه‌های به طور تحلیلی تحویل‌ناپذیر.

---

[*] عهده‌دار مکاتبات: Email: my.sadeghi@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

در سرتاسر این مقاله، R بیانگر یک حلقهٔ جابجاییِ نوتری با عضو همانی غیر صفر، I بیانگر یک ایده‌آل غیر صفر از R و M یک R-مدول تولید شدهٔ متناهی می‌باشند. بطور معمول، از نمادهای $\mathbb{N}_0$ برای نمایش مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی، از $\mathrm{Min}(I)$ برای نمایش مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول مینیمال I و از $\mathrm{Max}(R)$ برای نمایش مجموعهٔ تمام ایده‌آل‌های ماگزیمال حلقه R استفاده خواهیم کرد. برای R - مدول M ، مقصود از نماد $\mathrm{Supp}_R(M)$ ، تکیه‌گاه M نسبت به حلقهٔ R می‌باشد که عبارت است از مجموعهٔ:

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_P \neq 0\}.$$

i-اُمین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایده‌آل I به‌صورت

$$H_I^i(M) := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}_R^i\,(R/I^n, M),$$

تعریف می‌شود. برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینهٔ این مدول‌ها و هر نمادی که در مورد آن توضیح کافی داده نشده است، به [۱] و [۲] مراجعه شود.

هیونِکه در [۳] سؤالات زیر را مطرح کرده است:

۱. در چه مواقعی R-مدول $H_I^i(M)$ آرتینی است؟

۲. در چه مواقعی مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول وابستهٔ $H_I^i(M)$ متناهی است؟

آرتینی بودن مدول $H_I^i(M)$ در مرجع [۱] و در قضیه‌های ۷. ۱. ۳ و ۷. ۱. ۶ و همچنین در تمرینات ۷. ۱. ۴ و ۷. ۱. ۷ مطالعه شده است.

علاوه بر این، همان‌طور که هونکه [۳] در قضیه‌های ۱.۴ و ۲.۴ نیز به آن‌ها اشاره کرده است، دو نتیجهٔ مهم در دههٔ هفتاد و طی سال‌های ۱۹۷۳ و ۱۹۷۷ در مورد آرتینی بودن $H_I^i(R)$ روی حلقه‌های موضعی منظم اثبات شده‌اند. یکی از این نتایج توسط اوگوس و روی حلقه‌های موضعی منظم از مشخصهٔ صفر و دیگری توسط هارتشورن و اسپیزر روی حلقه‌های موضعی منظم از مشخصه p به شرح زیر مورد بررسی قرار گرفته‌اند:

قضیه ۱.۱. ([۴] را ببینید) فرض کنید $(R,\underline{m},k)$ یک حلقهٔ موضعی منظم و شامل (میدان اعداد گویا) باشد. همچنین فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه R باشد به طوری‌که برای هر $i < n$، تکیه‌گاه $H_I^n(R)$ فقط شامل ایده‌آل ماگزیمال $\underline{m}$ باشد. در این‌صورت برای هر $i < n$، R-مدول $H_I^n(R)$ آرتینی است.

قضیه ۲.۱. ([۵] را ببینید) فرض کنید $(R,\underline{m},k)$ یک حلقهٔ موضعی منظم از مشخصهٔ $p > 0$ باشد. همچنین فرض کنید I یک ایده‌آل از R باشد به طوری‌که برای برخی اعداد طبیعی n ، تکیه گاه $H_I^n(R)$ فقط شامل ایده‌آل ماگزیمال $\underline{m}$ باشد. در این‌صورت $H_I^n(R)$ آرتینی است.

معمولاً اطلاعات چندان زیادی دربارهٔ $H_I^i(M)$ در نقطهٔ $i = \dim M - 1$ در دسترس نیست. به عبارت دیگر مدولهای کوهمولوژی موضعی در این نقطه زیاد شناخته شده نیستند. هرچند مارلی در نتیجه ۵.۲ از [۶] نشان داده است که تکیه‌گاه $H_I^i(M)$ در نقاط $i := \dim M$ و $i := \dim R$ یک مجموعهٔ متناهی است.

در این مقاله، ما عمدتاً خواص آرتینی بودن و آرتینی نبودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی را مورد بحث قرار داده‌ایم. با توجه به اینکه مدول‌های آرتینی دارای تکیه‌گاه متناهی هستند و تکیه‌گاه هر مدول شامل مجموعه ایده‌آل‌های اول وابستهٔ آن مدول نیز است، از این‌رو بررسی آرتینی بودن $H_I^i(M)$، در پاسخ به سؤال دوم هیونکه نیز مفید خواهد بود.

اگر بخواهیم با جزئیات بیشتری توضیح دهیم، به عنوان اولین و یکی از نتایج مهم در این مقاله، نشان می‌دهیم در صورتی که R یک حلقهٔ نوتری دلخواه،

M یک R-مدول تولید شدهٔ متناهی و I یک ایده‌آل از R باشند به‌طوری‌که $IM \neq M$ و

$\mathrm{MinAss}_R(M/IM) \subseteq \mathrm{Min}(I) \backslash \mathrm{Max}(R)$،

آن‌گاه R-مدول $H_I^{\mathrm{ht}_M I}(M)$ آرتینی نیست (گزارهٔ ۱.۲ را ببینید).

حال با به کار بردن مطلب فوق برای خود حلقهٔ R، نتیجه می‌شود که اگر $\mathrm{Min}(I) \backslash \mathrm{Max}(R) \neq \emptyset$، آن‌گاه R-مدول $H_I^{\mathrm{ht}I}(R)$ آرتینی نیست (نتیجهٔ ۲.۲ را ببینید). به عنوان یک نتیجهٔ مهم از این مطلب، نتیجهٔ ۴.۲ حاصل می‌شود که بیان می‌کند: اگر $(R, \underline{m})$ یک حلقهٔ موضعی و I ایده‌آلی از R باشند به‌طوری‌که $\dim R/I > ۰$، آن‌گاه R-مدول $H_I^{\mathrm{ht}I}(R)$ آرتینی نیست.

این بدان معنی است که روی یک حلقهٔ موضعی دلخواه مانند R، $H_I^{\mathrm{ht}I}(R)$ آرتینی است اگر و تنها اگر $\dim R/I = ۰$ و اگر و تنها اگر به ازای هر R-مدول تولیده شدهٔ متناهی M و هر $i \in \mathbb{N}_0$، R-مدول $H_I^i(M)$ آرتینی باشد (نتیجهٔ ۷.۲ را ببینید).

علاوه بر این، در این مقاله نتایج جالبی را روی حلقه‌های موضعی به طور تحلیلی تحویل‌ناپذیر[۲] و همچنین روی حلقه‌های کوهن-مکالی (نه لزوماً موضعی) ارائه می‌دهیم (نتیجهٔ ۸.۲ و گزارهٔ ۹.۲ را ببینید). لازم به یادآوری است که حلقهٔ موضعی $(R, \underline{m})$ یک حلقهٔ به‌طور تحلیلی تحویل‌ناپذیر نامیده می‌شود، هرگاه $\hat{R}$ (یعنی حلقه کامل شده R نسبت به ایده‌آل ماگزیمال $\underline{m}$) یک حوزهٔ صحیح باشد.

در نهایت و به عنوان آخرین و یکی از مهم‌ترین نتایج در این مقاله، در گزارهٔ ۱۱.۲ شرایطی را ارائه می‌دهیم که تحت آن‌ها R-مدول $H_I^{\dim R - ۱}(R)$ می‌تواند آرتینی باشد.

۲- نتایج اصلی

مطالب این بخش را با یک گزاره شروع می‌کنیم که نقاطی را مشخص می‌کند که در آن‌ها مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی نیستند. در ادامه، منظور ما از $\mathrm{ht}\, I$ یعنی ارتفاع ایده‌آل I نسبت به حلقهٔ R می‌باشد، که عبارت است از:

$\mathrm{ht} I = \min\{\mathrm{ht}\, P \mid P \in \mathrm{Min}(I)\}$.

همچنین منظور ما از $\mathrm{ht}_M I$، یعنی ارتفاع I نسبت به R-مدول M که عبارت است از :

$$\mathrm{ht}_M I = \min\{\mathrm{ht}_M P \mid P \in \mathrm{Supp}_R(M),\ P \supseteq I\},$$

که در آن $\mathrm{ht}_M P = \dim_{R_P}(M_P)$ (تعریف ۶.۱۵ و تمرین ۱۵.۱۷ از [۲] را ملاحظه کنید).

گزاره ۱.۲. فرض کنید R یک حلقه نوتری دلخواه، M یک R-مدول تولید شدهٔ متناهی و I ایده‌آلی از R باشند به‌طوری‌که $IM \neq M$ و

$\mathrm{MinAss}_R(M/IM) \subseteq \mathrm{Min}(I) \backslash \mathrm{Max}(R)$.

در این صورت:

$$\mathrm{Supp}_R H_I^{\mathrm{ht}_M I}(M) \nsubseteq \mathrm{Max}(R)$$

و در نتیجه R-مدول $H_I^{\mathrm{ht}_M I}(M)$ آرتینی نیست.

برهان: قرار می‌دهیم $t = \mathrm{ht}_M I$. در این‌صورت

$P \in \mathrm{MinAss}_R(M/IM) \backslash \mathrm{Max}(R)$،

چنان موجود است به‌طوری‌که $t = \mathrm{ht}_M P = \dim_{R_P}(M_P)$. از طرف دیگر چون $P \in \mathrm{Min}(I)$، بنابراین $\sqrt{IR_P} = PR_P$ و لذا قضیهٔ صفر نشدن گروتندیک نتیجه می‌دهد که

$$(H_I^t(M))_P \cong H_{IR_P}^t(M_P) \cong H_{PR_P}^t(M_P) \neq ۰.$$

بنابراین $P \in \mathrm{Supp}_R H_I^{\mathrm{ht}_M I}(M) \backslash \mathrm{Max}(R)$ و از این‌رو خواهیم داشت:

$$\mathrm{Supp}_R H_I^{\mathrm{ht}_M I}(M) \nsubseteq \mathrm{Max}(R).$$

به عنوان چند نتیجهٔ فوری از گزاره ۱.۲ ، نتایج بعدی حاصل می‌شوند.

[۲] Analytically irreducible Local ring.

نتیجه ۲.۲. فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $\mathrm{Min}(I)\backslash\mathrm{Max}(R) \neq \emptyset$. قرار دهید $s = \mathrm{ht}\, I$. دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\mathrm{Supp}_R H_I^s(R) \nsubseteq \mathrm{Max}(R)$$

و بنابراین R -مدول $H_I^s(R)$ آرتینی نیست. بویژه در حالتی‌که $(R,\underline{m})$ یک حلقهٔ موضعی بوده و $\sqrt{I} \neq \underline{m}$ (یا به‌طور معادل $s < \dim R$) باشد، آن‌گاه $H_I^s(R)$ آرتینی نیست.

برهان: از اینکه $\mathrm{Ass}_R(R/I) = ass(I)$ ، لذا شرایط گزارهٔ ۱.۲ برقرار هستند.

نتیجه ۳.۲. فرض کنید $(R,\underline{m})$ یک حلقهٔ موضعی از بعد n و M یک R-مدول تولید شدهٔ متناهی باشند. همچنین فرض کنید I یک ایده‌آل با بعد یک از R (یعنی $\dim R/I = ۱$) باشد به‌طوری‌که:

$$\mathrm{MinAss}_R(M/IM) \nsubseteq \{\underline{m}\}.$$

قرار دهید $t = \mathrm{ht}_M I$. در این‌صورت

$$\mathrm{Supp}_R H_I^t(M) \nsubseteq \{\underline{m}\},$$

و در نتیجه $H_I^t(M)$ آرتینی نیست.

برهان: از اینکه $\dim R/I = ۱$ و

$$\mathrm{MinSupp}_R(M/IM) = \mathrm{MinAss}_R(M/IM) \nsubseteq \{\underline{m}\},$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathrm{MinAss}_R(M/IM) \subseteq \mathrm{Min}(I).$$

حال حکم با توجه به گزارهٔ ۱.۲ به راحتی حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۲. فرض کنید R یک حلقهٔ نوتری دلخواه (نه لزوماً موضعی) و I یک ایده‌آل از R با شرط $\dim R/I > ۰$ باشند. قرار دهید $s = \mathrm{ht}\, I$. در این‌صورت R -مدول $H_I^s(R)$ آرتینی نیست.

برهان: با توجه به این‌که $\dim R/I > ۰$ ، لذا خواهیم داشت:

$$\mathrm{Min}(I)\backslash\mathrm{Max}(R) \neq \emptyset$$

و حکم به راحتی از نتیجهٔ ۲.۲ به دست می‌آید.

در نتایج قبلی شرایطی بررسی شد که مدول‌های کوهمولوژی موضعی درنقطهٔ ارتفاع ایده‌آل I ، آرتینی نبودند. گزارهٔ بعدی به عنوان نتیجهٔ دیگری از گزارهٔ ۱.۲ ، شرایطی را بررسی می‌کند که تحت آن‌ها مدول کوهمولوژی موضعی می‌تواند در نقطهٔ ارتفاع ایده‌آل، آرتینی باشد. در حقیقت گزارهٔ ۵.۲ بیانگر آن است که اگر $H_I^i(M)$ در نقطهٔ $i = \mathrm{ht}_M I$ آرتینی باشد، آن‌گاه این مدول به ازای هر $i \in \mathbb{N}_۰$ نیز آرتینی است. این مطلب نشان می‌دهد عکس تمرین ۴.۱.۷ از [۱] تحت شرایطی برقرار است.

گزاره ۵.۲. فرض کنید $(R,\underline{m})$ یک حلقهٔ موضعی و M یک R-مدول تولید شدهٔ متناهی باشند. همچنین فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $IM \neq M$ و

$$\mathrm{MinAss}_R(M/IM) \subseteq \mathrm{Min}(I).$$

قرار دهید $t = \mathrm{ht}_M I$. در این‌صورت گزاره‌های زیر با هم معادل هستند:

(۱) $\mathrm{Supp}_R H_I^t(M) \subseteq \{\underline{m}\}$؛

(۲) $\mathrm{Min}(I) \subseteq \{\underline{m}\}$؛

(۳) به ازای هر $i \in \mathbb{N}_۰$، $H_I^i(M)$ آرتینی است؛

(۴) $H_I^t(M)$ آرتینی است.

برهان: (۲) → (۱) : به برهان خلف، فرض کنیم حکم برقرار نباشد و $\mathrm{Min}(I) \nsubseteq \{\underline{m}\}$. بنابراین با توجه به فرض خواهیم داشت:

$$\mathrm{MinAss}_R(M/IM) \subseteq \mathrm{Min}(I)\backslash\{\underline{m}\}.$$

حال بنابر گزارهٔ ۱.۲، نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{Supp}_R H_I^t(M) \nsubseteq \{\underline{m}\}$$

و این متناقض با فرض است. لذا باید داشته باشیم:

$$\mathrm{Min}(I) \subseteq \{\underline{m}\}.$$

(۳) → (۲): از این‌که $\operatorname{Min}(I) \subseteq \{\underline{m}\}$، لذا $\sqrt{I} = \underline{m}$ و در نتیجه به ازای هر $i \in \mathbb{N}_0$، خواهیم داشت $H_I^i(M) \cong H_{\underline{m}}^i(M)$ و بنابراین به ازای هر $i \in \mathbb{N}_0$، $H_I^i(M)$ آرتینی خواهد بود.

(۱) → (۴) → (۳): بدیهی هستند.

به عنوان یک نتیجه از گزارهٔ ۵.۲، نتیجهٔ ۷.۲ حاصل می‌شود. برای دست‌یابی به این نتیجه، به گزارهٔ ۶.۲ نیازمندیم.

گزاره ۶.۲. فرض کنید R یک حلقهٔ نوتری دلخواه (نه لزوماً موضعی) و $t \in \mathbb{N}_0$. در این‌صورت به ازای هر $i \geq t$، $H_I^i(R)$ آرتینی است اگروتنها اگر به ازای هر R-مدول تولید شدهٔ متناهی M و هر $i \geq t$، $H_I^i(M)$ آرتینی باشد.

برهان: ($\Leftarrow$) فرض کنیم به ازای هر $i \geq t$، $H_I^i(R)$ آرتینی و M یک R-مدول تولید شدهٔ متناهی دلخواه باشند. در این صورت رشتهٔ دقیق کوتاهی به صورت:

$$0 \to K \to F \to M \to 0,$$

موجود است که در آن F یک R-مدول آزاد تولید شدهٔ متناهی است. قرار می‌دهیم $n = \operatorname{ara}(I)$. بنابراین با توجه به نتیجهٔ ۳.۳.۳ از [۱]، برای هر $i > n$ خواهیم داشت:

$$H_I^i(K) = H_I^i(F) = H_I^i(M) = 0 .$$

حال بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود، می‌توانیم فرض کنیم $t \leq n$ و از این رو کافی است حکم را برای تمام مقادیر i که $t \leq i \leq n$ اثبات کنیم. به استقراء نزولی حکم را ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض کنید $i = n$. از اینکه رشته

$$H_I^n(K) \to H_I^n(F) \to H_I^n(M) \to 0 ,$$

دقیق است و به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}_0$، $H_I^i(-)$ یک تابعگون جمعی است، لذا $H_I^n(F)$ آرتینی است و درنتیجه $H_I^n(M)$ نیز آرتینی خواهد بود. حال حکم به استقراء نزولی روی i هایی‌که $t \leq i \leq n$ و با توجه به رشته دقیق بلند:

$$\cdots \to H_I^{i-1}(M) \to H_I^i(K) \to H_I^i(F)$$
$$\to H_I^i(M) \to H_I^{i+1}(K) \to \cdots,$$

حاصل می‌شود.

($\Rightarrow$) این قسمت بدیهی است.

نتیجه ۷.۲. فرض کنید $(R, \underline{m})$ یک حلقهٔ نوتری موضعی و I یک ایده‌آل از R باشند. قرار دهید $s = \operatorname{ht} I$. در این‌صورت گزاره‌های زیر با هم معادل هستند:

(۱) $\operatorname{Supp}_R H_I^s(R) \subseteq \{\underline{m}\}$؛

(۲) $\operatorname{Min}(I) \subseteq \{\underline{m}\}$؛

(۳) به ازای هر $i \in \mathbb{N}_0$، $H_I^i(R)$ آرتینی است؛

(۴) به ازای هر $i \in \mathbb{N}_0$ و هر R-مدول تولید شدهٔ متناهی M، $H_I^i(M)$ آرتینی است.

برهان: حکم به راحتی از گزاره‌های ۲. ۵ و ۶.۲ حاصل می‌شود.

نتیجه ۸.۲. فرض کنید $(R, \underline{m})$ یک حلقهٔ نوتری موضعیِ به‌طور تحلیلی تحویل‌ناپذیر از بعد n و I یک ایده‌آل سره از R باشند. قرار دهید $s = \operatorname{ht} I$. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(۱) اگر $H_I^n(R) = 0$، آنگاه $H_I^s(R)$ آرتینی نیست.

(۲) اگر $H_I^n(R) \neq 0$، آنگاه برای هر R-مدول تولید شدهٔ متناهی مانند M و هر $i \in \mathbb{N}_0$، $H_I^i(M)$ آرتینی است.

برهان: از این‌که R یک حلقهٔ به‌طور تحلیلی تحویل‌ناپذیر است، لذا $\hat{R}$ یک حوزهٔ صحیح است. از این‌رو بنابر قضیهٔ صفر شدن لیختن‌بام- هارتشورن (قضیهٔ ۱.۲.۸ از [۱]) داریم $H_I^n(R) = ۰$ اگر و تنها اگر $\dim R/I > ۰$. حال هر دو قسمت حکم از نتایج ۲. ۴ و ۲. ۷ حاصل می‌شوند.

گزارهٔ بعدی به عنوان کاربرد دیگری از نتیجهٔ ۲. ۲، برای R-رشته‌ها و حلقه‌های کوهن- مکالی مفید است.

نتیجه ۹.۲. فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $\mathrm{Min}(I)\setminus \mathrm{Max}(R) \neq \emptyset$. در این صورت احکام زیر برقرار هستند:

(۱) اگر I توسط یک R-رشتهٔ منظم به طول s تولید شود، آنگاه

$$\mathrm{Supp}_R H_I^s(R) \nsubseteq \mathrm{Max}(R)$$

و بنابراین $H_I^s(R)$ آرتینی نیست.

(۲) اگر R یک حلقه کوهن-مکالی باشد، آنگاه

$$\mathrm{g} := \mathrm{grade}(I,R) = \inf \{ i \geq ۰ \mid \text{آرتینی نیست } H_I^i(R)\}.$$

بویژه R-مدول $H_I^{\mathrm{g}}(R)$ آرتینی نیست.

برهان: با توجه به اینکه I توسط یک R-رشتهٔ منظم به طول s تولید می‌شود، داریم $s = \mathrm{ht}\, I$. بنابراین قسمت (۱) حکم از نتیجهٔ ۲. ۲ حاصل می‌شود. برای قسمت (۲)، توجه شود که R یک حلقه کوهن-مکالی است، لذا $\mathrm{g} = \mathrm{ht}\, I$ و بنابراین حکم از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

مؤلفین در تعریف ۲. ۱ از [۷]، به ازای عدد صحیح دلخواه $n \geq -۱$، کلاس R-مدول‌های $\mathrm{FD}_{\leq n}$ را معرفی کردند. یادآوری می‌شود X یک R-مدول $\mathrm{FD}_{\leq n}$ نامیده می‌شود، هرگاه R-زیرمدول تولید شدهٔ متناهی N از X چنان موجود باشد که:

$$\dim X/N \leq n\,.$$

همچنین به طور مشابه در تعریف ۲. ۱از [۸]، مؤلفین به ازای عدد صحیح $n \geq ۰$، کلاس R-مدول‌های در بعد کمتر از n را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین یادآوری می‌شود X یک R-مدول در بعد کمتر از n نامیده می‌شود، هرگاه R-زیرمدول تولید شدهٔ متناهی N از X چنان موجود باشد که:

$$\mathrm{dimSupp}\, X/N \leq n\,.$$

به راحتی قابل بررسی است که به ازای nهای مناسب، کلاس R-مدول‌های $\mathrm{FD}_{\leq n}$ و همچنین کلاس R-مدول‌های در بعد کمتر از n، تعمیمی از کلاس R-مدول‌های تولید شدهٔ متناهی، کلاس R-مدول‌های آرتینی و کلاس R-مدول‌های مینی‌ماکس هستند. برای بررسی این موضوع به لم ۲. ۳ از [۷] و تبصرهٔ ۲. ۲ از [۸] مراجعه شود.

از طرف دیگر ملکرسون در گزارهٔ ۳. ۱۱ از [۹] نشان داده که اگر X یک R-مدول باشد به طوری‌که به ازای هر $i \geq ۰$، R-مدول $\mathrm{Ext}_R^i(R/I,X)$ تولید شدهٔ متناهی باشد و به ازای هر $i \neq s$، $H_I^i(X)$ یک R-مدول I-هم‌متناهی باشد، آنگاه $H_I^s(X)$ نیز I-هم‌متناهی است. یادآوری می‌شود که کلاس R-مدول‌های I-هم‌متناهی توسط هارتشورن در [۱۰] به این‌صورت معرفی شده است که : یک R-مدول مانند X ، I-هم‌متناهی نامیده می‌شود هرگاه $\mathrm{Supp}_R X \subseteq \mathrm{V}(I)$ و همچنین به‌ازای هر $i \geq ۰$، R-مدول $\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)$، تولید شدهٔ متناهی باشد.

نتیجهٔ بعدی نشان می‌دهد که گزارهٔ ۳. ۱۱ ملکرسون[۹] در مورد کلاس R-مدول‌های $\mathrm{FD}_{\leq}$. لزوماً برقرار نیست.

نتیجه ۱۰.۲. فرض کنید R یک حلقه کوهن-مکالی از بعد n و I ایده‌آلی از آن باشرط $\dim R/I = ۱$ باشند. در این‌صورت $H_I^{n-۱}(R)$ یک R-مدول

$\mathrm{FD}_{\leq}$. نیست و بنابراین نمی‌تواند مینی‌ماکس یا آرتینی باشد.

برهان: فرض کنیم حکم برقرار نباشد و $H_I^{n-1}(R)$ یک R-مدول $\mathrm{FD}_{\leq}$. باشد (فرض خلف). در این صورت یک رشتهٔ دقیق کوتاه مانند

$$0 \to N \to H_I^{n-1}(R) \to L \to 0, \quad (\bigstar)$$

وجود دارد که در آن N یک R-مدول تولید شدهٔ متناهی است و همچنین $\mathrm{Supp}_R L \subseteq \mathrm{Max}(R)$. ابتدا نشان می‌دهیم که:

$$\mathrm{Supp}_R H_I^{n-1}(R) \subseteq \mathrm{Max}(R).$$

برای این منظور فرض کنیم $P \in \mathrm{Spec}(R)\backslash\mathrm{Max}(R)$، دلخواه باشد. با توجه به رشتهٔ دقیق $(\bigstar)$ و آرتینی بودن مدول $H_I^n(R)$، نتیجه می‌شودکه به‌ازای هر $i \geq n-1$ $\left(H_I^i(R)\right)_P$ یک R_P-مدول تولید شدهٔ متناهی است. بنابراین گزارهٔ ۱.۳ از [۱۱] ایجاب می‌کند که به ازای هر $i \geq n-1$، $(H_I^i(M))_P = 0$. از این رو خواهیم داشت:

$$\mathrm{Supp}_R H_I^{n-1}(R) \subseteq \mathrm{Max}(R),$$

و این با توجه به گزارهٔ ۹.۲، یک تناقض است.

با توجه به قضیهٔ ۷. ۱. ۵ از [۱]، می‌دانیم که اگر R یک حلقهٔ جابجاییِ نوتری، M یک R-مدول تولید شدهٔ متناهی از بعد d و I یک ایده‌آل دلخواه از R باشند، آنگاه $H_I^d(M)$ آرتینی است.
علاوه بر این، همان‌طور که در مقدمه نیز به آن اشاره شد، مارلی در نتیجهٔ ۵.۲ از [۶]، نشان داده که روی حلقهٔ موضعی R، به ازای هر R-مدول تولید شدهٔ متناهی M با بعد d و هر ایده‌آل دلخواه I از R، مجموعه‌های $\mathrm{Supp}_R H_I^{d-1}(M)$ و $\mathrm{Ass}_R H_I^{d-1}(M)$ متناهی هستند.
به عنوان آخرین نتیجه در این مقاله، در گزارهٔ ۱۱.۲، شرایطی را ارائه می‌دهیم که تحت آن‌ها و در حالتی که R یک حلقه موضعی با بعد n باشد، R-مدول $H_I^{n-1}(R)$ آرتینی است.

گزاره ۱۱.۲. فرض کنید $(R,\underline{m})$ یک حلقهٔ موضعی با بعد n و I یک ایده‌آل از R با شرط $\dim R/I \leq 1$ باشند. در این صورت تحت هرکدام از شرایط زیر $H_I^{n-1}(R)$ آرتینی است:

(۱) $\mathrm{Supp}_R H_I^{n-1}(R) \subseteq \{\underline{m}\}$؛

(۲) برای هر ایده‌آل اول مینیمال P از I داریم:

$$\mathrm{ht}\, P < n-1.$$

برهان: در صورتی‌که $\dim R/I = 0$، آن‌گاه حکم از نتیجهٔ ۲. ۷ حاصل می‌شود. در حالت $\dim R/I = 1$، ابتدا فرض کنیم شرط (۱) برقرار باشد و داشته باشیم:

$$\mathrm{Supp}_R H_I^{n-1}(R) \subseteq \{\underline{m}\}.$$

بنابراین می‌توان فرض کرد:

$$\mathrm{Supp}_R H_I^{n-1}(R) = \{\underline{m}\}.$$

از اینکه $\dim R/I = 1$، لذا $x \in \underline{m} \setminus I$ موجود است و با توجه به اینکه

$$I \subsetneq I + Rx \subseteq \underline{m}$$

بنابراین داریم:

$$\dim R/(I+Rx) = 0.$$

از طرف دیگر با توجه به گزارهٔ ۸. ۱. ۲ از [۱]، رشتهٔ دقیقی به صورت:

$$H_{I+Rx}^{n-1}(R) \to H_I^{n-1}(R) \to H_I^{n-1}(R_x) \to H_{I+Rx}^n(R),$$

وجود دارد. حال باتوجه به نتیجهٔ ۷.۲، R-مدول $H_{I+Rx}^{n-1}(R)$ آرتینی است و همچنین از اینکه

$H_I^{n-1}(R_x) = 0$ ، لذا $H_I^{n-1}(R)$ نیز آرتینی خواهد بود.

حال فرض کنیم شرط (۲) برقرار باشد. نشان می‌دهیم:

$\mathrm{Supp}_R H_I^{n-1}(R) \subseteq \{\underline{m}\}$
و بنابراین حکم از قسمت (۱) حاصل می‌شود. برای این منظور فرض کنیم $P \in \mathrm{Supp}_R H_I^{n-1}(R)$ دلخواه باشد. در این صورت $(H_I^{n-1}(R))_P \neq 0$ و لذا قضیهٔ صفر شدن گروتندیک ایجاب می‌کند که $n-1 \leq \dim R_P$. بنابراین با توجه به فرض (۲)، P نمی‌تواند یک ایده‌آل اول مینیمال از I باشد. حال باتوجه به این‌که $\dim R/I = 1$ و $I \subseteq P$، بنابراین $P = \underline{m}$ و این نتیجه می‌دهد که:
$\mathrm{Supp}_R H_I^{n-1}(R) = \{\underline{m}\}$.

فهرست منابع

[۱] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications. ۲nd ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press (۲۰۱۳).

[۲] R. Y. Sharp, Steps in commutative Algebra. Second edition. London Mathematical Society Student Text ۱۹, Cambridge University Press (۲۰۰۰).

[۳] C. Huneke, Problems on local cohomology, Free Resolutions in commutative algebra and algebraic geometry (Sundance, Utah, ۱۹۹۰), Research Notes in Mathematics ۲, Boston, Ma, Jones and Bartlett Publisher, (۱۹۹۲), ۹۳-۱۰۸.

[۴] A. Ogus, Local cohomological dimension of algebraic varieties. Annals of Math., ۹۸ (۱۹۷۳), ۳۲۷-۳۶۵.

[۵] R. Hartshorne and R. Speiser, Local cohomological dimension in characteristic p. Ann. Math., ۱۰۵ (۱۹۷۷), ۴۵-۷۹.

[۶] T. Marley, The associated primes of local cohomology modules over rings of small dimension. manuscripta math., ۱۰۴ (۲۰۰۱), ۵۱۹-۵۲۵.

[۷] M. Aghapournahr and K. Bahmanpour, Cofiniteness of weakly Laskerian local cohomology modules. Bull. Math. Soc. Math. Romanie, ۱۰۵ (۲۰۱۴), ۳۴۷-۳۶۵.

[۸] D. Asadollahi and R. Naghipour, Faltings' Local-global Principle for the Finiteness of local cohomology modules. Commun. Algebra, ۴۳ (۲۰۱۵), ۹۵۳-۹۵۸.

[۹] L. Melkersson, Modules cofinite whit respect to an ideal. J. Algebra, ۲۸۵ (۲۰۰۵), ۶۴۹-۶۶۸.

[۱۰] R. Hartshorne, Affine duality and cofiniteness. Invent. Math., ۹ (۱۹۷۰), ۱۴۵-۱۶۴.

[۱۱] K. I. Yoshida, Cofiniteness of local cohomology modules for ideals of dimension one. Nagoya Math. J., ۱۴۷ (۱۹۹۷), ۱۷۹-۱۹۱.