دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

برخی از شکاف‌های توپولوژیکی یک فضای متریک تعمیم‌یافته

یوسف سهولی[۱]، خدیجه جاهدی[۲]*

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۰۵

چکیده

در این مقاله به تعریف همسایگی نقاط واقع در فضای متریک تعمیم‌یافته معرفی شده توسط جللی_سامت[1]، می‌پردازیم. بدین ترتیب که $\mathcal{T}_d$ را گردایه اجتماع تمام همسایگی‌های فوق در نظر گرفته و آن را توپولوژی تعمیم یافته القایی توسط d به سبک سازار[2] می‌نامیم.

در بخش نتایج اصلی نشان می‌دهیم که برخی از خواص مقدماتی که در هر فضای متریک معمولی موجود است لزوماً در فضای متریک تعمیم یافته به سبک جللی _سامت وجود ندارد. هم چنین با استفاده از تعریف همسایگی‌ها نشان می‌دهیم توپولوژی تعمیم یافته $\mathcal{T}_d$ لزوماً سازگار نیست. علاوه بر آن روشی برای ساخت متریک تعمیم‌یافته جللی_سامت که هر نقطه‌اش دارای خود فاصله صفر باشد، معرفی می‌کنیم.

با قرار دادن مفهوم همگرایی آماری به جای همگرایی معمولی در تعریف فضای متریک تعمیم‌یافته به روش جللی_سامت، فضای متریک تعمیم‌یافته آماری را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که هر دو فضای متریک تعمیم‌یافته با هم معادلند.

واژه‌های کلیدی: متریک، متریک تعمیم‌یافته، توپولوژی، توپولوژی تعمیم‌یافته به سبک سازار، همگرایی آماری، چگالی طبیعی.

رده‌بندی موضوعی: 11J83، 54E35، 26A03.

---

*. عهده دار مکاتبات

Email: mjahedi 80 @yahoo.com

[1] Jleli-Samet
[2] Csaszar

۱- تاریخچه و مقدمه

اخیراً فضاهای متریک تعمیم یافته‌ی متعددی از سوی ریاضی‌دانان معرفی شده است. به طور مثال می‌توان به فضاهای متریک جزئی [12]، شبه متریک [6] و b_متریک [5] اشاره نمود.

جللی و سامت، در سال ۲۰۱۵ اقدام به معرفی یک فضای متریک تعمیم‌یافته [12] کردند که لزوماً خاصیت نامساوی مثلثی را نداشته، ضمن اینکه هر فاصله هر نقطه‌ی با خودش نیز الزاماً صفر نمی باشد. در این فضا امکان نامتناهی بودن فاصله نقاط نیز وجود دارد. خاصیت صفر نبودن خود فاصله‌ها در این فضای متریک تعمیم‌یافته، امکان مطالعه‌ی معانی علامت‌گذاری شبکه جریان داده‌ها [15] را میسر می‌کند که این خاصیت در علوم زیستی و کامپیوتری از اهمیت خاصی برخوردار است [2].

فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی و تابع $d: X\times X \to [0,+\infty]$ داده شده باشد. برای هر $x\in X$، مجموعه $C(X,d,x)$ را مجموعه دنباله‌های X_مقدار مانند $\{x_n\}_n$ می‌گیریم که
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$$

تعریف ۱. ۱ (جللی_سامت)[12]. فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی و تابع $d: X\times X \to [0,+\infty]$ با شرایط زیر داده شده باشد. برای هر x و y واقع در X،

$$d_1)\ d(x,y)=0 \Rightarrow x=y\ ,$$
$$d_2)\ d(x,y)=d(y,x)\ ,$$
$$d_3)\ \exists\ c>0: \forall (x,y)\in X\times X\ ,\quad \{x_n\}_n\in C(X,d,x)\ ,\quad d(x,y)\le c\,\overline{\lim_{n\to\infty}} d(x_n,y).$$

در این صورت زوج مرتب (X,d) را فضای متریک تعمیم‌یافته به سبک جللی_سامت می‌نامیم. از این پس برای راحتی آن را فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ نامیده می‌شود.

اگر عدد مثبت c_1 در رابطه d_3 از تعریف ۱. ۱ صدق کند آن‌گاه رابطه d_3 برای هر عدد $c>c_1$ نیز برقرار است. اگر $C(X,d,x)\neq\varnothing$، بنابر خاصیت اینفیمم می‌توان از عدد منحصر به فرد c_x به جای c در خاصیت d_3 استفاده کرد [12].

توجه شود طبق خاصیت d_3 از تعریف ۱. ۱، حد دنباله $\{x_n\}_n$ در فضای متریک $(J-S)$ منحصر به فرد است. به عبارتی اگر x و y دو عضو متمایز در X بوده و $\{x_n\}\in C(X,d,x)$، آن‌گاه $\{x_n\}\notin C(X,d,y)$.

فضاهای متریک معمولی، متریک در رفته[3] [11] و b_متریک[5]، مثال‌هایی از فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ هستند ([12]).

تعریف ۱. ۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متر-یک تعمیم‌یافته $(J-S)$ و $\{x_n\}_n$ نیز یک دنباله X_مقدار باشد.

۱- دنباله $\{x_n\}_n$ را d_کوشی (به اختصار کوشی) [7] نامیم اگر رابطه زیر برقرار باشد، $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=0$.

۲- زیر مجموعه A از X را یک زیرمجموعه چگال دنباله‌ای (به اختصار چگال) نامیم هرگاه برای هر $x\in X$، $C(A,d,x)\neq$.

در این حالت می‌نویسیم $\overline{A}^d=X$.

۳- فضای (X,d) را کامل نامیم، هرگاه هر دنباله کوشی در آن یک دنباله همگرا در X باشد.

مفهوم نقاط ثابت و قضایای مربوط به آن در فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ مورد علاقه برخی از ریاضی‌دانان بوده که برای مثال می‌توان به مقاله‌های [8, 11, 15] مراجعه کرد.

---
[3] Dislocated metric

در این مقاله ابتدا با ارائه چند مثال نشان می‌دهیم بعضی از خواص فضای متریک لزوماً در فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ برقرار نیست.

در مثال ۲. ۳ نشان می‌دهیم که متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ d نه تنها پیوسته نیست بلکه هر دنباله همگرای آن لزوماً کوشی نمی‌باشد.

مفهوم توپولوژی تعمیم‌یافته سال ۲۰۰۲ در [3] توسط سازار معرفی گردید. یک گردایه $\mathcal{T}$ از زیرمجموعه‌های X را توپولوژی تعمیم‌یافته (به اختصار GT) نامیم اگر و تنها اگر $\in \mathcal{T}$ و $\mathcal{T}$ تحت اجتماع دلخواه بسته باشد. در این صورت هر مجموعه A واقع در $\mathcal{T}$ را یک مجموعه باز و متمم آن را یک مجموعه بسته تعریف می‌کنیم. واضح است که هر فضای توپولوژی، یک فضای توپولوژی تعمیم‌یافته نیز می‌باشد. فضای توپولوژی تعمیم یافته $\mathcal{T}$ را هاسدورف نامیم هرگاه هر دو نقطه متمایز از آن توسط دو مجموعه باز مجزا شامل آن نقاط از هم جدا گردند. همچنین دنباله‌ی $\{x_n\}_n$ از مقادیر X همگرا به x در توپولوژی تعمیم‌یافته $\mathcal{T}$ نامیم هرگاه هر مجموعه باز شامل x دارای نقاطی از $\{x_n\}_n$ باشد. برای اطلاعات بیشتر درباره توپولوژی تعمیم‌یافته به سبک سازار می‌توان به [1, 4] مراجعه کرد.

می‌دانیم که توپولوژی تولید شده توسط هر متریک معمولی یک توپولوژی سازگار تشکیل می‌دهد. به عبارت دیگر همگرایی دنباله ای عناصر یک فضای متریک معمولی (X,d) با همگرایی آن در فضای توپولوژی القا شده توسط d معادل است. در این مقاله با ذکر مثالی به بررسی شکاف توپولوژیکی ناسازگار بودن توپولوژی تعمیم یافته تولید شده توسط متریک تعمیم یافته (J_S) می‌پردازیم. هم چنین نشان خواهیم داد که اگر تابع پیوسته‌ای از یک فضای متریک بروی (پوشا) یک فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ داشته باشیم، آن‌گاه تمام اعضای فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ دارای خاصیت خود فاصله صفر می‌شوند.

مفهوم همگرایی آماری در سال ۱۹۸۸ توسط فرآیدی در [9] به عنوان تعمیمی از همگرایی معمولی مطرح شد. فرض کنید $K \subseteq$ داده شده باشد. چگالی طبیعی یا به اختصار چگالی K را با نماد $\delta(K)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف گردیده است

$$\delta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left|\{k\in K,\ k\le n\}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\chi_K(k).$$

هنگامی که χ_K بیانگر تابع مشخصه روی K و $|A|$ کاردینالیتی مجموعه A باشد. مجموعه K را چگال در نامیم هرگاه $\delta(K)=۱$ یا $\delta(K^c)=\circ$.

تعریف ۱. ۳ ([9]). دنباله حقیقی‌مقدار $\{x_n\}_n$ را همگرایی آماری به x نامیم هرگاه برای هر $\varepsilon>\circ$ $\delta(\{k\in\ :|x_k\ \ x|\ge\varepsilon\})=0$. در این صورت می‌نویسیم $st-\lim_{n\to\infty}x_n=x$. کایا و همکارانش در [12] نشان دادند که دنباله $\{x_n\}_n$ همگرای آماری به l است اگر و فقط اگر $K\subseteq$ موجود باشد که $\delta(K)=۱$ و

$$st-\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}}x_n=l. \qquad (۱)$$

با توجه به آن‌که چگالی مجموعه‌های متناهی صفر است هر دنباله همگرای معمولی یک دنباله همگرای آماری خواهد بود. در حالی که هر دنباله همگرای آماری لزوماً همگرای معمولی نخواهد بود. به طور مثال اگر $x_k=۱$ برای kهای مربع و در غیر این صورت $x_k=\circ$، آن‌گاه

$$\left|\{k\le n:x_k\ne\circ\}\right|\le\sqrt{n}\ .$$

بنابر این $st-\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ در حالی که دنباله فوق همگرا نیست.

فرآیدی و اورهان [10] در سال ۱۹۱۷ تعریفی برای حد بالایی آماری به صورت زیر آوردند و ارتباط حد بالایی آماری و حد بالایی معمولی را به صورت رابطه (۲) معرفی کرده‌اند.

فرض کنیم $x=\{x_n\}_n$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد و قرار دهید

$$B_x = \{b \in \ : \delta\{k: x_k > b\} \neq 0\}$$

در این صورت حد بالایی آماری به صورت زیر تعریف می‌گردد،

$$\overline{st-\lim} := \begin{cases} \sup B_x & B_x \neq \varnothing \\ -\infty & B_x = \varnothing \end{cases}$$

بر اساس قضیه ۲ در [10] رابطه زیر برقرار است

$$\overline{st-\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n. \qquad (۲)$$

با توجه به اینکه فضای دنباله‌های همگرای معمولی به طور محض درون فضای دنباله‌های همگرای آماری قرار می‌گیرند، به نظر می‌رسد که با در نظر گرفتن مفهوم همگرایی آماری در شرط d_3 از تعریف ۱. ۱ به فضای متریک تعمیم‌یافته وسیع‌تری نسبت به متریک تعمیم‌یافته جللی_سامت به نام فضای متریک تعمیم‌یافته آماری خواهیم رسید. لیکن در بخش پایانی مقاله نشان می‌دهیم که هر دو فضای متریک تعمیم‌یافته با هم معادلند.

۲- نتایج اصلی

از لم زیر شرط کافی برای برقراری خاصیت صفر بودن خود فاصله عناصر فضای متریک تعمیم‌یافته به سبک جللی_سامت استفاده می‌کنیم.

لم ۲. ۱. ([13]) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ و $x\in X$ داده شده باشد.

$C(X,d,x)\neq\varnothing$ اگر و تنها اگر $d(x,x)=0$.

لم ۲. ۲. اگر فضای متریک تعمیم‌یافته (X,d) تعمیم‌یافته به روش جللی_سامت دارای یک زیر مجموعه چگال دنباله‌ای مانند A باشد، آن‌گاه هر $x\in X$ نیز دارای خود فاصله صفر است.

اثبات. فرض کنید $x\in X$. با توجه به چگال بودن A در X، دنباله A_مقدار $\{x_n\}_n$ موجود است که $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$. از اینرو $C(A,d,x)\neq$

بنا بر لم ۲. ۱، $d(x,x)=0$ برای هر $x\in X$. بنابراین تمام عناصر X دارای خود فاصله ی صفر هستند. $\square$

در زیر مثالی خواهیم آورد که نشان می‌دهد d _متر تعمیم‌یافته $(J-S)$ لزوماً پیوسته نیست، حتی نسبت به یک مولفه آن نیز پیوسته نمی‌باشد.

مثال ۲. ۳. فرض کنید $\{x_n\}_n$ یک دنباله از اعداد گویا، a و b دو عضو متمایز از باشند. قرار دهید $X=\{x_n\}_n\cup\{a,b\}$، جائیکه $n\in$ و تابع d را به صورت زیر تعریف کنید.

$$d(x,y)=\begin{cases} d(y,x) & x,y\in X \\ \frac{1}{n} & (x,y)=(x_n,a) \\ 0 & (x,y)=(a,a) \\ 2 & (x,y)=(x_n,b) \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

بدین ترتیب d یک متر تعمیم‌یافته $(J-S)$

است و $C_a = ۱$. زیرا طبق تعریف هر دو خاصیت d_1 و d_2 برقرار بوده و برای بررسی خاصیت d_3 نیز کافی است به نابرابری‌های زیر دقت کنیم:

$$d(a,a) = 0,$$

و برای هر m

$$d(a,x_m) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} d(x_n,x_m),$$
$$d(a,b) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} d(x_n,b).$$

رابطه $d(x_n,b) \not\le d(x_n,a)+d(a,b)$ نشان می‌دهد که d متریک نیست. از طرفی $\lim_{n\to\infty} d(x_n,a) = ۰$ در حالی‌که

$$d(x_n,b) - d(a,b) \not\longrightarrow ۰ \ as\ n\to\infty.$$

مطالب فوق نشان می‌دهد که d پیوسته نمی‌باشد.

نتیجه ۲. ۴. در مثال ۲. ۳ دیده می‌شود برای هر m و n واقع در

$$d(x_n,x_m) = ۱.$$

بنابراین $\{x_n\}_n$ یک دنباله d_همگرا می‌باشد که کوشی نیست.

در واقع یکی از خواص مقدماتی و کاربردی فضاهای متریک در این فضا اتفاق نمی افتد و احتمال می رود بسیاری از پدیده هایی که در فضای متریک وجود دارد قابل مدلسازی در فضاهای متریک تعمیم‌یافته ی محض (J_S) نباشد.

برای تحقیق در خواص توپولوژیکی فضای متریک تعمیم‌یافته $(J\text{-}S)$ X نیاز به شناخت همسایگی‌های نقاط x از X داشتیم که در زیر با توجه به شرایط سه گانه نقاط در این فضا به معرفی همسایگی‌ها پرداختیم.

هر عضو $x \in X$ در یکی از سه حالت زیر صدق می‌کند.

i) $d(x,x) = ۰$ در این حالت بنابر لم ۱ . ۲، $C(X,d,x) \ne \varnothing$.

ii) $۰ < d(x,x) < \infty$

iii) $d(x,x) = \infty$.

تعریف ۲. ۵. فرض کنید (X,d) یک فضای متر-یک تعمیم‌یافته $(J-S)$ است. برای $x \in X$ و $r > ۰$، همسایگی به مرکز x و شعاع r را با $N_r(x)$ نمایش داده و به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم:

(i) اگر $d(x,x) = ۰$، قرار می‌دهیم

$$N_r(x) = \{y \in X \ : c_x \overline{\lim}\, d(x_n,y) < r \ , for\ all\ \{x_n\} \in C(X,d,x)\},$$

که عدد مثبت c_x، همان عدد مثبت منحصر به فرد خاصیت $(d_۳)$ از تعریف ۱. ۱ می‌باشد.

(ii) اگر $۰ < d(x,x) < \infty$ آن‌گاه

$$N_r(x) = \{y \in X \ : d(x,y) < r + d(x,x)\}.$$

(iii) اگر $d(x,x) = \infty$، آن‌گاه $N_r(x) = X$. در هر سه حالت برای هر $x \in X$، $x \in N_r(x)$ خواهد بود و اگر $r_۱ < r_۲$، آن‌گاه

$$N_{r_۱}(x) \subseteq N_{r_۲}(x).$$

هم چنین $X = \bigcup_{x\in X} N_r(x)$، برای هر $r > ۰$.

تعریف ۲. ۶. فرض کنید (X,d) یک فضای متر-یک تعمیم‌یافته $(J-S)$ و خانواده $N = \{N_r(x) : x \in X, r > ۰\}$.

گردایه $\mathcal{T}_d$ شامل تمام اجتماع‌ها از همسایگی‌های N را توپولوژی تعمیم‌یافته القایی توسط d به سبک سازار می‌باشد. در حقیقت $\mathcal{T}_d$ در تعریف توپولوژی تعمیم‌یافته به سبک سازار [3] صدق می‌کند. در این حالت $(X,\mathcal{T}_d)$ را فضای توپولوژی تعمیم‌یافته القایی توسط d می‌نامیم. هر مجموعه

واقع در $\mathcal{T}_d$ را یک مجموعه باز و متمم آن را مجموعه بسته می‌باشد.

تعاریف شمارایی اول و خاصیت هاسدورف بودن را شبیه آنچه در توپولوژی ارائه می‌گردد، در نظر می‌گیریم.

می‌دانیم که اگر $(X,\mathcal{T}_{d'})$ توپولوژی القایی توسط یک متریک معمولی مانند d' باشد، آن‌گاه موارد زیر همواره برقرار است.

۱) اگر $\{x_n\}_n$ و $\{y_n\}_n$ دو دنباله‌ی همگرا به $x \in X$ باشند، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = ۰$.

۲) $\mathcal{T}_{d'}$ با متریک معمولی d' سازگار است. به عبارت دیگر برای هر دنباله X_مقدار $\{x_n\}_n$، دو گزاره زیر با هم معادل می‌باشند.

الف) $\lim_{n\to\infty} d'(x_n, x) = ۰$.

ب) $\{x_n\}_n$ یک دنباله همگرا در $\mathcal{T}_{d'}$ است. در واقع هر مجموعه باز از x شامل نقاطی از $\{x_n\}_n$ می‌گردد.

مثال‌های زیر نشان می‌دهد که خواص بالا برای توپولوژی تعمیم‌یافته $\mathcal{T}_d$ القایی توسط متر تعمیم-یافته $(J-S)$ d لزوماً برقرار نیست.

مثال ۲. ۷. فرض کنید $X=\{x_n\}_n \cup \{y_n\}_n \cup \{a\}$ به‌طوری‌که برای هر $n \in$

$x_n \in \quad , \ y_n \in \quad ^c ,$

و $a \in$. تابع d را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم

$$d(x,y)=\begin{cases} d(y,x) & x,y \in X \\ ۰ & (x,y)=(a,a) \\ \frac{۱}{n} & (x,y)=(x_n,a) \ or \ (y_n,a) \\ ۱ & otherwise \end{cases}$$

تابع d یک $(J-S)$ متریک تعمیم‌یافته است که در آن $C_a=۱$ و خاصیت نامساوی مثلثی ندارد. زیرا برای هر $n > 2$،

$d(x_n, y_n) > d(x_n, a) + d(a, y_n).$

ازطرفی نابرابری‌های $d(a, x_m) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} d(x_n, x_m)$ و $d(a, y_m) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} d(x_n, y_m)$ برقراری خاصیت d_3 از تعریف ۱. ۱ با انتخاب $C_a=۱$ برای متریک d را ضمانت می‌کند.

هر دو دنباله $\{x_n\}_n$ و $\{y_n\}_n$ واقع در $C(X,d,a)$ بوده در حالی‌که برای هر $n \in$ داریم $d(x_n, y_n)=۱$. بنابراین خاصیت ۱ در متریک تعمیم یافته جللی_ سامت برقرار نیست.

با انتخاب خانواده $\{N_{\frac{1}{n}}(x): x \in X, n \in \quad \}$ می‌توان نشان داد که توپولوژی تعمیم یافته القایی توسط متریک تعمیم یافته جللی_سامت، $\mathcal{T}_d$، دارای خاصیت شمارای اول است. مثال بعدی نشان می‌دهد که خاصیت هاسدورف برای توپولوژی القایی تعمیم‌یافته $\mathcal{T}_d$ برقرار نیست درحالی که هر دنباله‌ی همگرا در d، دارای حد منحصر به فرد است.

مثال ۲. ۸. فرض کنید a و b دو عدد متمایز از اعداد گنگ و $\{x_n\}_n$ یک دنباله از اعداد گویا باشد. برای هر $n \in$، مجموعه $X=\{x_n\}_n \cup \{a,b\}$ و نگاشت $d: X\times X \to [۰,+\infty]$ با ضابطه

$$d(x,y)=\begin{cases} d(y,x) & x,y \in X \\ \frac{۱}{n} & (x,y)=(x_n,a) \\ ۰ & (x,y)=(a,a) \\ \infty & (x,y)=(b,b) \\ \frac{۱}{۲} & otherwise \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم. (X,d) فضای متریک تعمیم یافته $(J-S)$ است که در آن $C_a=\frac{۱}{۲}$. با توجه به تعریف ۲. ۵، همسایگی به مرکز b برابر با X بوده که همواره دارای اشتراک با تمام همسایگی‌های به مرکز x_n می‌باشد. پس امکان مجزا سازی دو عضو متمایز x_n و b توسط مجموعه‌های باز مجزا وجود ندارد. در این صورت X دارای خاصیت هاسدورف نمی‌باشد.

علاوه بر آن اگر در مثال ۲. ۸، $d(b,b)=\frac{1}{2}<\infty$ قرار دهیم نابرابری $d(x_n,b)<r+d(x_n,x_n)$ نشان می‌دهد که b در تمام همسایگیهای به مرکز x_n قرار دارد. از این رو فضای جدید نیز هاسدورف نخواهد بود.

نتیجه ۲. ۹. مثال ۲. ۸ نشان می‌دهد که توپولوژی تعمیم‌یافته القایی $\mathcal{T}_d$ نسبت به d سازگار نیست. توجه کنید که دنباله $\{x_n\}_n$ در متر d همگرا به a است. زیرا

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,a)=0,$$

در حالی که همسایگی $N_{\frac{1}{8}}(a)$ تنها شامل عضو a بوده و هیچ عضوی از x_n را شامل نمی‌شود. به عبارت دیگر $\{x_n\}_n$ در $\mathcal{T}_d$ به a همگرا نمی‌شود. در قسمت بعد به معرفی یک شرط کافی برای کامل بودن فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ می‌پردازیم.

تعریف ۲. ۱۰. زیرمجموعه F از فضای متریک تعمیم‌یافته $X(J-S)$ را یک مجموعه d_فشرده دنباله‌ای نامیم، هرگاه هر دنباله X_مقدار $\{x_n\}_n$ دارای یک زیر دنباله همگرا به یک نقطه $x\in F$ باشد.

قضیه ۲. ۱۱. اگر (X,d) یک فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ فشرده دنباله‌ای باشد، آن‌گاه X یک فضای کامل است.

اثبات. با توجه به خاصیت فشردگی دنباله‌ای X، برای هر دنباله X_مقدار کوشی مانند $\{x_n\}_n$، حتماً یک زیر دنباله d_همگرای $\{x_{n_k}\}_k$ وجود دارد که به نقطه‌ای مانند $x\in X$ همگرا گردد.
بر طبق d_3 از تعریف ۱. ۱، عدد مثبت c_x چنان یافت می‌شود که برای هر n،

$$d(x_n,x)\le c_x \overline{\lim_{n_k\to\infty}}\, d(x_n,x_{n_k}).$$

از آن‌جا که $\{x_n\}_n$ کوشی می‌باشد، قسمت سمت راست رابطه بالا به صفر همگرا می‌گردد، اگر $n\to\infty$. در این صورت $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$. □

تعریف ۲. ۱۲. فرض کنید (X,d) و (Y,d') دو فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ باشند. تابع f از X به توی Y را پیوسته دنباله‌ای نامیم هرگاه برای دنباله $\{x_n\}$ واقع در $C(X,d,x)$، داشته باشیم $\{f(x_n)\}\in C(Y,d',f(x))$.

قضیه ۲. ۱۳. فرض کنید f یک تابع پیوسته دنباله‌ای از فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ (X,d) به توی فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ (Y,d') باشد.

a) فرض کنید $x\in X$ به قسمی که $d(x,x)=0$، آن‌گاه $f(x)\in Y$ نیز دارای خود فاصله صفر خواهد بود.

b) اگر X دارای یک زیر مجموعه چگال دنباله‌ای مانند A باشد آن‌گاه تمام اعضای $f(X)$ دارای خاصیت خود فاصله صفر هستند.

به علاوه اگر تابع f با خواص (b) پوشا نیز باشد، آن‌گاه (Y,d') یک فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ با خاصیت خود فاصله‌های صفر است.

اثبات. a) فرض کنید $x\in X$ چنان باشد که $d(x,x)=0$ طبق لم ۲. ۱، $C(X,d,x)\neq\varnothing$.

به عبارتی دنباله X_مقدار $\{x_n\}$ چنان یافت شود که $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$. پیوستگی دنباله‌ای f نشان می‌دهد که $\lim_{n\to\infty} d(f(x_n),f(x))=0$ یا $C(Y,d',f(x))\neq\varnothing$

بنابراین $d(f(x),f(x))=0$.

b) فرض کنید A یک زیر مجموعه از X با خاصیت $\overline{A}^d = X$ باشد. طبق لم ۲. ۲ هر عضو x واقع در X دارای خاصیت $d(x,x)=0$ است و بنابر (a) هر عضو از مجموعه $f(X)$ دارای خود فاصله صفر خواهد بود.
همچنین اگر شرط پوشایی تابع f به قسمت (b) اضافه شود آن‌گاه $f(X)=Y$ و دیده می‌شود که هر نقطه Y دارای خود فاصله صفر است. $\square$

نتیجه ۲. ۱۴. اگر f یک تابع پیوسته از یک فضای متریک معمولی (X,d) بروی فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$، (Y,d') باشد، آن‌گاه خود فاصله‌ی تمام اعضای Y صفر خواهد بود.
بدین ترتیب می‌توان به وسیله یک تابع پیوسته پوشا بین یک فضای متریک و یک فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$، خاصیت خود فاصلگی صفر را برای اعضای Y القا کرد.
فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی و تابع $d: X\times X \to [0,+\infty]$ داده شده باشد. برای هر $x\in X$، مجموعه C_{st} را مجموعه دنباله‌های X_ مقدار مانند $\{x_n\}_n$ می‌گیریم که $st-\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$.
با توجه به تعریف همگرایی آماری در ۱. ۳ واضح است که

$$C(X,d,x)\underset{\neq}{\subset} C_{st}(X,d,x). \quad (۳)$$

تعریف ۲. ۱۵. فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی و تابع $d: X\times X \to [0,+\infty]$ با شرایط زیر داده شده باشد. برای هر x و y واقع در X،

$$s_1)\ d(x,y)=0 \Rightarrow x=y\ ;$$
$$s_2)\ d(x,y)=d(y,x)\ ;$$
$$s_3)\ \exists c_x>0 : \{x_n\}_n \in C_{st}(X,d,x) \Rightarrow d(x,y)\le c_x \overline{st-\lim_{n\to\infty} d(x_n,y)}.$$

در این صورت زوج مرتب (X,d)را فضای متریک تعمیم‌یافته آماری می‌نامیم.

با الهام از تعریف متر تعمیم‌یافته به سبک جللی_سامت و رابطه (۳) به نظر می‌رسید فضای متریک تعمیم‌یافته آماری وسیع‌تر از فضای متریک تعمیم‌یافته جللی_سامت عمل کند. اما در قضیه زیر معادل بودن دو فضای فوق را نشان می‌دهیم.

قضیه ۲. ۱۶. هر فضای متریک تعمیم‌یافته جللی_سامت، یک فضای متریک تعمیم‌یافته آماری است و برعکس.

اثبات. فرض کنید زوج مرتب (X,d) یک فضای متریک تعمیم‌یافته $(J-S)$ باشد. برای اثبات آن - که d متر تعمیم‌یافته آماری باشد کافی است درستی خاصیت s_3 را از تعریف ۲. ۱۵ بررسی کنیم.
اگر $\{x_n\}_n \in C_{st}(X,d,x)$، آن‌گاه

$$st-\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0.$$

با توجه به رابطه (۱) مجموعه K با $\delta(K)=1$ موجود است که

$$st-\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}} d(x_n,x)=0 \quad (۴)$$

بنابراین $\{x_n\}_{n\in k}$ عضو $C(X,d,x)$ بوده و طبق فرض عدد منحصر بفرد مثبت c_x موجود است که برای هر $y\in X$:

$$d(x,y)\le c_x \overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}}} d(x_n,y).$$

چنان‌چه حد بالایی سمت راست در رابطه فوق موجود و متناهی باشد آنگاه به استناد (۴) به رابطه s_3 دسترسی پیدا می کنیم. بدین ترتیب فضای $C(X,d,x)$ یک فضای متریک تعمیم‌یافته آماری نیز می باشد.
برای اثبات عکس مطلب فرض کنید (X,d)یک فضای متریک تعمیم یافته آماری و $\{x_n\}_n \in C(X,d,x)$ در این صورت طبق (۳)

$\{x_n\}_n \in C_{st}(X, d, x)$ که حد آماری و حد معمولی آن یکسان می‌گردد. از طرفی طبق (۲) و خاصیت $s_۳$ عدد منحصر بفرد مثبت c_x موجود است که برای هر $y \in X$ رابطه زیر برقرار می‌گردد.

$$d(x, y) \le c_x \overline{st - \lim_{n\to\infty} d}(x_n, y)$$
$$\le c_x \overline{\lim_{n\to\infty} d}(x_n, y).$$

بنابراین خاصیت $d_۳$ برای فضای فوق صادق است. به عبارت دیگر هر فضای متریک تعمیم‌یافته آماری یک فضای متریک تعمیم‌یافته به سبک جللی _سامت است. $\square$

سپاسگزاری

نگارندگان بر خود لازم می دانند از آقای دکتر علی اصغر علیخانی کوپایی عضو هیات علمی دانشگاه ایالتی پنسیلوانیا به خاطر مشاوره ارزنده شان در طول تحقیق تشکر نمایند.

فهرست منابع

[1] Abbaspour, Gh., Taghavi, A. (2011). A Note on Generalized Topology, Vol. 6, no. 1, 19-24.

[2] Bukatin, M., Kopperman, R., Matthews, S., & Pajoohesh, H. (2009). Partial metric spaces, Amer. Math., Monthly, 116, 708-718.

[3] Csaszar, A. (2002). Generalized topology, Generalized continuity, Acta math Hungar, 96,351-357.

[4] Csaszar, A. (2008). Remarks on quasi -topologize, Acta Math. Hungar. 119 (1-2), 197-200.

[5] Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in *b*-metric spaces, Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis 1, 5-11.

[6] Doitchinov, D. (1988). On completeness in quasi-metric spaces, Topology Appl. 30, 127-148.

[7] Y. Elkouch and E. M. Mahrani, (2017). ‘‘On Some fixed point theorem in generalized metric spaces” Fixed Point Theory and Applications.(2017:23), 1-17.

[8] Fan, X., Zhigang, W. (2016) Some fixed point theorems in generalized quasi-partial metric spaces, Jour. of Nonlinear Sci.And Appl. 9, 1659-1674.

[9] Fridy, J. A. (1985), On statistical convergence, Analysis 5, 301- 313.

[10] Friday, J. A., & Orhan, C. (1997). Statistica limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc.Vol 125, No. 12, 3625-3631.

[11] Hitzler, P., Seda, A. K. (2000). Dislocated topologies, J. Electr. Eng. 51, 3-7.

[12] Jleli, M., Samet, B. (2015), A generalized metric space and related fixed point theorems,Fixed point theory,2015:16,1-14

[13] Karapinar, E., O’ Regan, D., Rold’ an-L’ opez-de-Hierro, A. F., & Shahzad, N. (2016). Fixed point theorems in new generalized metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 18, 645-671.

[14] Kaya, F., Kucukaslan, M. and Wagner, R., (2013), On statistical convergence and statistical monotonicity, Anal. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comput. 39, 257–270.

[15] Matthews, S. G. (1995). An extensional treatment of lazy data flow deadlock, Theoretical Computer Seiences, 151, 195-205.