دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و پنجم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نتایجی در مجموعه‌های احاطه‌گر دو به دو- بیرونی تام در گراف‌ها

اکرم محمودی[۱*]، علیرضا نجفی‌زاده[۲]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۱۰   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۱۷

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. مجموعه احاطه‌گر دو به دو- بیرونی D از G یک مجموعه احاطه‌گری از G است به‌طوری که زیرگراف القایی روی $V\setminus D$ دارای تطابق کامل باشد. مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر دو به دو-بیرونی را عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی G گویند و با نماد $\gamma_{pr}(G)$ نمایش می‌دهند. هم‌چنین، فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر تام از G باشد به‌طوری که زیرگراف القایی روی $V\setminus D$ دارای تطابق کامل باشد، در این صورت، D را مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام G گویند. مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام را عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی تام G گویند و با نماد $\gamma_{tpr}(G)$ نمایش می‌دهند. در این مقاله ضمن معرفی این مفهوم، به مطالعه روی برخی خواص اساسی این پارامتر از گراف می‌پردازیم. هم‌چنین کران‌هایی بر حسب مرتبه، اندازه، کمرگراف و ... برای آن ارائه می‌شود. در نهایت، نامساوی معروف نورس- گادم برای گراف‌های منظم ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: احاطه‌گر، احاطه‌گر تام، کمر، تطابق.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: ak.mahmoodi@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

از مفاهیم قابل توجه در نظریه گراف که کاربردهای فراوان دارند مجموعه و عدد احاطه‌ای می‌باشد. در سال‌های گذشته عدد احاطه‌ای و تغییرات روی این عدد به‌طور گسترده توسط محققان متعددی در رشته‌های ریاضی و کامپیوتر مورد مطالعه قرار گرفته است. هم‌چنین، صورت‌های مختلفی از مجموعه‌های احاطه‌گر من جمله مجموعه احاطه‌گر همبند، احاطه‌گر ضعیف فرد، مجموعه احاطه‌گر دو-به‌دو، مجموعه احاطه‌گر تام و مجموعه احاطه‌گر دو-به‌دو بیرونی مطرح گردیده است. برای مطالعه بیشتر در زمینه مجموعه احاطه‌گر می‌توان به منابع [۱۳و۱۰و۸ و۷و۶و۵و۳و۲و۱] مراجعه کرد.

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. مرتبه G برابر $|V|$ را با نماد $n=n(G)$ و اندازه G، $|E|$ را با نماد $m=m(G)$ نمایش می‌دهیم. به‌ازای رأس دلخواه $v\in V$، همسایگی باز و بسته v به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$N(v)=\{u\in V\,|\,uv\in E\}$$
$$N[v]=N(v)\cup\{v\}.$$

درجه رأس v با نماد $\deg(v)$ نمایش داده می‌شود که برابر با تعداد رأس‌های همسایه‌ی v است. هم‌چنین، نمادهای δ و Δ به ترتیب برای نمایش کمترین درجه و بیشترین درجه رئوس گراف به کار می‌روند. نمادهای K_n، P_n و C_n برای نمایش گراف‌های کامل n رأسی، مسیر n رأسی و دور به طول n به کار می‌روند. طول کوتاه‌ترین دور در گراف را با نماد $g(G)$ نمایش می‌دهند. رأس درجه یک را برگ گویند. در صورتی که درجه رأس همسایه برگ بزرگتر مساوی ۲ باشد، آن را رأس اتکا گویند. گراف دو بخشی، گرافی است که مجموعه رئوس آن به دو زیرمجموعه ناتهی A و B افراز می‌شود و تمام یال‌ها بین بخش‌های A و B واقع است. گراف کامل دو بخشی که $|A|=r$ و $|B|=s$ را با نماد $k_{r,s}$ نمایش می‌دهند که در آن هر رأس بخش A به تمام رئوس بخش B و برعکس وصل هستند. دو یال از گراف G که رأس مشترک نداشته باشند را یال‌های مستقل گویند. فرض کنید $X,Y\subseteq V$ باشد، در این صورت $m(X),m(X,Y)$ به ترتیب نشان دهنده تعداد یال‌های بین X,Y و تعداد یال‌های روی زیر گراف القایی روی X است. هم‌چنین، $\dim(G)$ نشان‌دهنده قطر گراف است.

یک تطابق در گراف مجموعه‌ای از یال‌های مستقل می‌باشد. رأس v توسط تطابق M آغشته می‌شود در صورتی که v یک رأس از یک یال تطابق M باشد. تطابق M را کامل گویند در صورتی که هر رأس G توسط M، آغشته شود. زیرمجموعه D از رئوس V را مجموعه احاطه‌گر گویند هرگاه هر رأس در $V\setminus D$ همسایه‌ای در D داشته باشد. به عبارت دیگر $N[D]=V$. مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر در G را با نماد $\gamma(G)$ نمایش می‌دهند و آن را عدد احاطه‌ای گویند. مجموعه احاطه‌گر مینیمم را $\gamma(G)$- مجموعه گویند. زیرمجموعه D از رئوس V را مجموعه احاطه‌گر تام گویند هرگاه هر رأس $v\in V$ همسایه‌ای در D داشته باشد. به عبارت دیگر $N(D)=V$. مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر تام را عدد احاطه‌ای تام گویند و با نماد $\gamma_t(G)$ نمایش می‌دهند. مجموعه احاطه‌گر مینیمم را $\gamma_t(G)$- مجموعه گویند. مجموعه احاطه‌گر D از G به طوری که زیرگراف القایی روی D دارای تطابق کامل باشد را مجموعه احاطه‌گر دو به دو گویند. مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر دو به دو را عدد احاطه‌ای دو به دو گویند و با نماد

$\gamma_p(G)$ نمایش می‌دهند.

در سال ۱۹۹۸، هاینس و اسلاتر مفهوم احاطه‌گر دو به دو را در گراف برای اولین بار به عنوان الگویی برای گرفتن پشتیبان و حفاظت از اهداف محرمانه ارائه کردند. برای مطالعه بیشتر مفهوم عدد احاطه‌ای دو به دو به [۹] مراجعه شود. در ادامه، با الهام از مفهوم احاطه‌گر دو به دو، لین و همکارانش در [۱۱] مفهوم مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی را به شکل زیر مطرح کردند. آن‌ها کاربردی از این مفهوم را روی سیستم‌های هادوپ مطرح کردند و در سال ۲۰۱۸ مطالعاتی روی مفهوم احاطه‌گر دو به دو-بیرونی در [۱۲] انجام شد.

مجموعه احاطه‌گر D از G به طوری که زیرگراف القایی روی $V \setminus D$ شامل تطابق کامل باشد را مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی گویند. مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر دو به دو-بیرونی را عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی گویند و با نماد $\tilde{\gamma}_{pr}(G)$ نمایش می‌دهند.

استفاده از شبکه‌های حس‌گر در بسیاری از حوزه‌ها از جمله مانیتورینگ بیمار در حوزه پزشکی، نظامی و کشاورزی کاربرد دارد. مدیریت گره‌های موجود در این شبکه‌ها و نیز ساماندهی سرخوشه موجود، جهت استفاده حداکثری از توان پردازش گره‌ها از مهم‌ترین زمینه‌های پژوهشی می‌باشد. در واقع با انتخاب حداقل تعداد سرخوشه و مدیریت نوع ارتباط آن با سایر گره‌ها می‌توان کارایی شبکه‌ها را افزایش داد. بنابراین کار روی عدد احاطه‌ای با ایجاد محدودیت‌هایی روی تعریف حائز اهمیت است. لذا، با توجه به این نگرش، در این مقاله مفهوم مجموعه‌ی احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام را مطرح و مطالعه می‌کنیم.

تعریف ۱-۱. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر تام باشد به طوری که زیرگراف القایی روی $V \setminus D$ دارای تطابق کامل باشد، در این صورت D را مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام گویند. مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام را عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی تام G گویند و با نماد $\tilde{\gamma}_{tpr}(G)$ نمایش می‌دهند. مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام مینیمم را $\tilde{\gamma}_{tpr}(G)$- مجموعه گویند.

واضح است که اگر $G_1, \dots, G_t$ مؤلفه‌های گراف G باشند، آن‌گاه

$$\tilde{\gamma}_{tpr}(G) = \sum_{i=1}^{t} \tilde{\gamma}_{tpr}(G_i)$$

بنابراین در ادامه گراف G همبند فرض می‌شود.

در این مقاله، ابتدا برخی خواص اساسی مجموعه احاطه‌گر دو به دو -بیرونی تام از گراف‌ها را بررسی و عدد احاطه‌ای دو به دو -بیرونی تام برخی از گراف‌های خاص محاسبه می‌شوند. سپس کران‌های مختلفی برای این عدد برحسب کمر، مینیمم و ماکزیمم درجه، مرتبه و اندازه گراف ارائه خواهد شد.

۲- خواص اساسی عدد احاطه‌ای دو به دو – بیرونی تام

در این بخش برخی از خواص مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام مورد بررسی قرار می‌گیرند. هم‌چنین، عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی تام برخی از گراف‌های خاص محاسبه می‌گردند.

واضح است که اگر $n \leq ۲$، آن‌گاه کل رئوس G یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام است. لذا می‌توان نتیجه زیر را عنوان کرد.

مشاهده ۲-۱. فرض کنید G گرافی از مرتبه $n \geq ۲$ باشد. در این صورت G دارای یک احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام است و $۲ \leq \tilde{\gamma}_{tpr}(G) \leq n$.

لم زیر کمک می‌کند که کران بالای مشاهده ۲-۱ در حالات زیادی تقلیل یابد.

لم ۲-۲. فرض کنید G گرافی از مرتبه $n \geq ۴$ و $\delta \geq ۲$ باشد. در این صورت یالی از G وجود دارد که با حذف دو سر آن، گراف حاصل فاقد رأس تنها است.

برهان. فرض کنید $e = uv$ یال دلخواهی از گراف G باشد که با حذف v و u در G، گراف حاصل رأس تنهایی مانند z داشته باشد. چون $\delta \geq ۲$، بنابراین $zu, zv \in E(G)$. همچنین، از آن‌جایی که $n \geq ۴$ و $\delta \geq ۲$، حداقل درجه یکی از رئوس u و v بزرگ‌تر مساوی ۳ است. فرض کنید $\deg(v) \leq \deg(u)$. در این صورت، به وضوح گراف حاصل از حذف دو سریال zv، رأس تنها ندارد.

گزاره ۲-۳. فرض کنید G گرافی از مرتبه $n \geq ۴$ و $\delta \geq ۲$ باشد. در این صورت $\overset{\square}{\gamma}_{tpr}(G) \leq n-۲$.

برهان. بنابر لم ۲-۲، یالی مانند $e = uv$ از G وجود دارد که گراف $G \setminus \{u,v\}$ فاقد رأس تنها است. در نتیجه $G \setminus \{u,v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای G است و حکم به دست می‌آید.

گزاره ۲-۴. فرض کنید G گرافی از مرتبه بزرگ‌تر مساوی دو و مینیمم درجه یک باشد. در این صورت، هر مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی شامل تمام رئوس اتکا و برگ‌ها است.

برهان. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی از G و $e = uv$ یالی باشد که در آن v رأس اتکا و u رأس درجه یک است. اگر $u \notin D$، آن‌گاه در زیرگراف القایی روی $V\text{-}D$، u رأس تنها است که تناقض می‌باشد. لذا $u \in D$. از طرف دیگر چون D، مجموعه احاطه‌گر تام است باید u در D با رأسی از D همسایه باشد. در نتیجه $v \in D$.

به وضوح هر مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام، یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی است و همچنین هر مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی، یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا، می‌توان گزاره زیر را بیان کرد.

گزاره ۲-۵. برای گراف G رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\gamma(G) \leq \overset{\square}{\gamma}_{pr}(G) \leq \overset{\square}{\gamma}_{tpr}(G)$$

در ادامه این بخش، عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی تام برای برخی از گراف‌های خاص محاسبه می‌شود.

گزاره ۲-۶. فرض کنید $n \geq ۲$. در این صورت داریم:

$$\gamma_{tpr}(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 & n \equiv 0, 1 \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 & n \equiv 2, 3 \end{cases}$$

که در آن هر دو هم‌نهشتی به پیمانه ۴ محاسبه می‌شوند.

برهان. فرض کنید $P_n := v_۱ v_۲ \ldots v_n$ مسیر با n رأس باشد. چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: ابتدا، قرار دهید $n \equiv ۰ \pmod{۴}$. در این صورت به وضوح داریم:

$$\{v_i \in P_n \mid i = ۱, ۲ \pmod{۴},\ i \leq n-۴\} \cup \{v_{n-۳}, v_{n-۲}, v_{n-۱}, v_n\}$$

یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای P_n است. لذا داریم:

$$\overset{\square}{\gamma}_{tpr}(P_n) \leq \left\lceil \frac{n-۴}{۲} \right\rceil + ۴ = \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil + ۲.$$

حال به استقراء روی n رابطه $\tilde{\gamma}_{tpr}(P_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$ را ثابت می‌کنیم. به وضوح حکم برای P_4 برقرار است. فرض کنید مسأله برای P_tهایی که $n > t$ و $t \equiv 0 \pmod 4$ برقرار باشد. مسیر P_n را در نظر بگیرید. رئوس v_{n-3}، v_{n-2}، v_{n-1} و v_n را حذف کنید تا $P_{t=n-4}$ به‌دست آید. فرض کنید D' یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو- بیرونی تام مینیمال برای P_t باشد. با استفاده از فرض استقراء داریم:

$$|D'| \geq \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 2 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

با استفاده از گزاره ۲-۴، D' شامل رئوس v_{n-4} و v_{n-5} است. لذا $D = D' \cup \{v_{n-1}, v_n\}$ یک $\tilde{\gamma}_{tpr}(P_n)$- مجموعه است و داریم:

$$\tilde{\gamma}_{tpr}(P_n) = |D| = |D'| + 2 \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$$

به این ترتیب در حالت اول مسأله ثابت می‌شود.

حالت دوم: حال، فرض کنید $n \equiv 1 \pmod 4$. در این صورت، به وضوح

$$\{v_i \in P_n \mid i \equiv 1, 2 \pmod 4), i \leq n-5\} \cup \{v_{n-4}, v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$$

یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای P_n است. لذا، در این حالت داریم:

$$\tilde{\gamma}_{tpr}(P_n) \leq \left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil + 5 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$$

حال برای اثبات $\tilde{\gamma}_{tpr}(P_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$، به استقراء روی n عمل می‌کنیم. به وضوح حکم برای P_5 برقرار است. فرض کنید حکم برای تمام P_tهایی که در رابطه $t \equiv 1 \pmod 4$ و $t < n$ صدق کنند برقرار باشد و مسیر P_n را در نظر بگیرید. رئوس v_{n-3}، v_{n-2}، v_{n-1} و v_n را از P_n حذف کنید تا $P_{t=n-4}$ به دست آید. فرض کنید D' یک $\tilde{\gamma}_{tpr}(P_t)$- مجموعه باشد. با استفاده از فرض استقراء داریم:

$$|D'| \geq \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 2 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

از گزاره ۲-۴، مجموعه $D = D' \cup \{v_{n-1}, v_n\}$ یک $\tilde{\gamma}_{tpr}(P_n)$- مجموعه است و داریم:

$$\tilde{\gamma}_{tpr}(P_n) = |D| = |D'| + 2 \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$$

در نتیجه در این حالت نیز مسأله ثابت می‌شود.

حالت سوم: فرض کنید $n \equiv 2 \pmod 4$. در این حالت $\{v_i \in P_n \mid i \equiv 1, 2 \pmod 4)\}$ یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای P_n است. لذا داریم:

$$\tilde{\gamma}_{tpr}(P_n) \leq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil + 2 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

مشابه حالات اول و دوم می‌توان ثابت کرد که

$$\tilde{\gamma}_{tpr}(P_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

حالت چهارم: قرار دهید $n \equiv 3 \pmod 4$. در این حالت مجموعه

$$\{v_i \in P_n \mid i \equiv 1, 2 \pmod 4), i \leq n-3\} \cup \{v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$$

یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای P_n

است و داریم:

$$\gamma_{tpr}\left(P_n\right) \le \left\lceil \frac{n-3}{2} \right\rceil + 3 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

مجدداً، به استقراء شبیه حالات اول و دوم تساوی در این حالت نیز به دست می‌آید.

گزاره ۲-۷. فرض کنید $n \le 3$. در این صورت داریم:

$$\gamma_{tpr}(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & n \equiv 0, 1 \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 & n \equiv 2, 3 \end{cases}$$

که در آن هر دو هم‌نهشتی به پیمانه ۴ محاسبه می‌شوند.

برهان. فرض کنید $C_n := v_1 v_2 \dots v_n$. برای اثبات گزاره سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت اول: ابتدا قرار دهید $n \equiv 0,1 \pmod 4$. در این حالات مجموعه:

$$\left\{ v_i \in C_n \mid i \equiv 1, 2 \pmod 4 \right\}$$

یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای C_n است و در نتیجه داریم:

$$\gamma_{tpr}\left(C_n\right) \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

حال فرض کنید $\gamma_{tpr}\left(C_n\right) < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ و همچنین D یک $\gamma_{tpr}\left(C_n\right)$- مجموعه باشد. یالی مانند $e = uv$ از C_n را در نظر بگیرید که $u, v \notin D$. در این صورت u توسط رأسی مانند x و v توسط رأسی مانند y احاطه می‌شود که $x, y \in D$. مسیر P_n که از حذف یال $e = uv$ در C_n به دست می‌آید را در نظر بگیرید. به وضوح $D' = D \cup \{u, v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای P_n است و داریم:

$$\gamma_{tpr}\left(P_n\right) \le \left|D'\right| = \left|D\right| + 2 < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$$

که تناقض با گزاره ۲-۶ می‌باشد. لذا در این حالات $\gamma_{tpr}\left(C_n\right) \ge \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ و حکم به دست می‌آید.

حالت دوم: فرض کنید $n \equiv 2 \pmod 4$. به وضوح مجموعه

$$\left\{ v_i \in C_n \mid i \equiv 1, 2 \pmod 4 \right\}$$

یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای C_n است و لذا داریم:

$$\gamma_{tpr}\left(C_n\right) \le \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil + 2 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

در ادامه اثبات، به برهان خلف فرض کنید $k = \gamma_{tpr}\left(C_n\right) < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ و همچنین D یک $\gamma_{tpr}\left(C_n\right)$- مجموعه باشد. چون n عددی زوج است، $\frac{n}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ عددی فرد و $\left|V\text{-}D\right|$ عددی زوج است لذا باید داشته باشیم: $k = \gamma_{tpr}\left(C_n\right) \le \frac{n}{2} - 1$.

حال یالی مانند $e = uv$ از C_n را در نظر بگیرید که $u, v \notin D$. در این صورت u توسط رأسی مانند x و v توسط رأسی مانند y احاطه می‌شود که $x, y \in D$. مسیر P_{n-2} که از حذف دو سر یال $e = uv$ در C_n به دست می‌آید را در نظر بگیرید. به وضوح D یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای P_{n-2} است و داریم:

$$\gamma_{tpr}(P_{n-۲}) \le |D| \le \frac{n}{۲} - ۱$$

که تناقض با گزاره ۲-۶ می‌باشد. لذا، برهان خلف باطل و $\gamma_{tpr}(C_n) \ge \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil + ۱$ و حکم به دست می‌آید.

حالت سوم: قرار دهید $n \equiv ۳ \pmod{۴}$. مجموعه $\{v_i \in C_n \mid i \equiv ۱,۲ \pmod{۴}\} \cup \{v_n\}$ یک احاطه‌گر دو به دو-بیرونی برای C_n است و در این حالت داریم:

$$\gamma_{tpr}(C_n) \le \left\lceil \frac{n-۳}{۲} \right\rceil + ۳ = \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil + ۱$$

در این حالت مجدداً به برهان خلف فرض می‌شود که

$$\gamma_{tpr}(C_n) \le \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil = \frac{n+۱}{۲} .$$

مجموعه D را یک $\gamma_{tpr}(C_n)$- مجموعه در نظر بگیرید. در این حالت n عدد فرد است، لذا اعداد $\frac{n+۱}{۲}$ و $|V\text{-}D|$ زوج هستند، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\gamma_{tpr}(C_n) \le \frac{n+۱}{۲} - ۱ = \frac{n-۱}{۲}$$

به طور مشابه با حالت قبل، یالی مانند $e = uv$ از C_n را در نظر بگیرید که $u,v \notin D$. مسیر $P_{n-۲}$ که از حذف دو سر یال $e = uv$ در C_n به دست می‌آید را در نظر بگیرید. به وضوح D یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای $P_{n-۲}$ است و داریم:

$$\gamma_{tpr}(P_{n-۲}) \le |D| \le \frac{n-۱}{۲}$$

که تناقض با گزاره ۲-۶ می‌باشد. بنابراین فرض خلف باطل و تساوی اتفاق می‌افتد.

گزاره ۲-۸. فرض کنید $n \ge ۲$ دراین‌صورت داریم:

$$\gamma_{tpr}(K_n) = \begin{cases} 3 & \text{n عدد فرد است} \\ 2 & \text{n عدد زوج است} \end{cases}$$

برهان. ابتدا، فرض کنید n فرد باشد. واضح است که هر مجموعه که شامل سه رأس K_n باشد یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای K_n است. بنابراین $\gamma_{tpr}(K_n) \le ۳$. حال اگر $\gamma_{tpr}(K_n) < ۳$، آن‌گاه با استفاده از مشاهده ۲-۱، داریم $\gamma_{tpr}(K_n) = ۲$. در این صورت $n-۲$ عددی فرد است و گراف کامل از مرتبه فرد تطابق کامل ندارد. لذا $\gamma_{tpr}(K_n) < ۳$ اتفاق نمی‌افتد و در نتیجه $\gamma_{tpr}(K_n) = ۳$. در حالت بعدی فرض کنید n عددی زوج باشد. به وضوح هر مجموعه شامل دو رأس از K_n یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای K_n است. ادغام این مطلب و مشاهده ۲-۱، نتیجه می‌دهد $\gamma_{tpr}(K_n) = ۲$.

در انتهای این بخش عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی تام را برای گراف‌های کامل دوبخشی محاسبه می‌کنیم.

گزاره ۲-۹. فرض کنید r و s اعداد صحیح نامنفی باشند به طوری که $r \ge s$. در این صورت داریم:

$$\gamma_{tpr}(K_{r,s}) = r - s + ۲$$

برهان. فرض کنید مجموعه‌های: $A=\{x_۱,x_۲,...,x_r\}$

و $B=\{y_1,y_2,\ldots,y_s\}$ دو بخش گراف $K_{r,s}$ باشند. زیر گراف القایی روی رئوس $x_1,\cdots,x_{s-1},y_1,\cdots,y_{s-1}$ یگ گراف کامل دو بخشی است که دارای تطابق کامل است. در نتیجه، رئوس $\{y_s,x_s,x_{s+1},\ldots,x_r\}$ یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای $K_{r,s}$ است لذا داریم:

$$\gamma_{tpr}(K_{r,s})\le r-s+2$$

حال باتوجه به گزاره ۲-۵ و گزاره ۳-۴ از [۲] داریم:

$$\gamma_{tpr}(K_{r,s})=r-s+2$$

۳-کران‌هایی برای عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی تام

در این بخش کران‌هایی برای عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی تام برحسب مرتبه و اندازه، مرتبه و بیش‌ترین درجه، کم‌ترین درجه و هم‌چنین کمر گراف ارائه می‌شود.

فرض کنید A گرافی باشد که مجموعه رئوس آن به دو زیرمجموعه X و D افراز شده باشد به طوری که گراف القایی روی X و D اجتماعی از مسیرهای P_2 باشند و هم‌چنین، هر رأس X دقیقاً با یک رأس D همسایه باشند. با این تعریف، کران پایین شارپی بر حسب مرتبه و سایز گراف ارائه می شود.

گزاره ۳-۱. فرض کنید G گرافی با $n\ge 2$ و سایز m باشد. در این صورت داریم:

$$\gamma_{tpr}(G)\ge\left\lfloor\frac{3n}{2}\right\rfloor-m$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G\cong A$.

برهان. فرض کنید D یک $\gamma_{tpr}(G)$- مجموعه و $X=V-D$ باشد. چون X تطابق کامل دارد باید $\frac{|X|}{2}\le m(X)$. هم‌چنین، چون هر رأس X با رأسی از D همسایه است $m(D,X)\ge|X|$. از طرف دیگر D یک مجموعه احاطه‌گر تام است. لذا، خواهیم داشت:

$$2m(D)=\sum_{v\in D}\deg_D(v)\ge|D|$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}m&=m(X)+m(D,X)+m(D)\\&\ge\frac{|X|}{2}+|X|+\frac{|D|}{2}\\&=\frac{3|X|}{2}+\frac{|D|}{2}\end{aligned}$$

بنابراین $|X|\ge\frac{2m}{3}-\frac{|D|}{3}$ که در آن $|X|=n-|D|$. چون عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی تام یک عدد صحیح است، خواهیم داشت:

$$\gamma_{tpr}(G)\ge\left\lfloor\frac{3n}{2}\right\rfloor-m$$

حال فرض کنید تساوی برقرار باشد. در صورتی که n عدد زوج باشد، داریم:

$$\gamma_{tpr}(G)=\frac{3n}{2}-m$$

از تساوی $m(X)=\frac{|X|}{2}$ و این که هر رأس موجود در X دارای درجه حداقل یک است، نتیجه می‌شود که هر مؤلفه $G[X]$، مسیر P_2 است. هم‌چنین، از این که $m(D,X)=|X|$ و D یک مجموعه احاطه‌گر است، نتیجه می‌شود که هر رأس X با دقیقاً یک رأس D همسایه است. نیز از این که $m(D)=\frac{|D|}{2}$ و هر رأس در D حداقل با رأسی از آن همسایه

است، مؤلفه‌های $G[D]$ نیز $P_۲$ خواهند بود. از این رو $G \cong A$.

توجه می‌کنیم که حالتی که n فرد باشد نمی‌تواند رخ دهد. چون اگر n فرد باشد، آن‌گاه $|D|$ عدد فردی است. از آن‌جایی که تساوی رخ داده باید تساوی $m(D)=\frac{|D|}{۲}$ نیز روی دهد که امکان‌پذیر نیست. حال کافی است در مورد گراف A ثابت شود $\gamma_{tpr}(A) \le \left\lfloor \frac{۳n}{۲} \right\rfloor - m$. واضح است که D در گراف A یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام است. لذا، داریم:

$$\gamma_{tpr}(A) \le |D|$$

بنابراین کافی است نشان داده شود:

$$|D| = \frac{۳n}{۲} - m$$

با جایگذاری رابطه $|X| = n-|D|$ در رابطه:

$$m = m(X) + m(D,X) + m(D)$$
$$= \frac{۳|X|}{۲} + \frac{|D|}{۲}$$

تساوی $|D| = \frac{۳n}{۲} - m$ به دست می‌آید.

از قضیه ۳-۱ می‌توان بلافاصله نتیجه زیر را در مورد درخت‌ها بیان کرد.

نتیجه ۳-۲. فرض کنید T درختی با $n \le ۲$ باشد. در این صورت، داریم:

$$\gamma_{tpr}(T) \ge \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + ۱$$

در ادامه، کران پایینی بر حسب مرتبه و بیش‌ترین درجه یک گراف ارائه می‌شود.

قضیه ۳-۳. فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد در این صورت، داریم:

$$\gamma_{tpr}(G) \ge \frac{n}{\Delta}$$

و این کران شارپ است.

برهان. فرض کنید D یک $\gamma_{tpr}(G)$- مجموعه باشد. چون D یک مجموعه احاطه‌گر تام است، بنابراین داریم $|N(D)| = n$. از طرف دیگر، به ازای هر رأس مانند $v \in D$ داریم $\deg_G(v) \le \Delta$. در نتیجه داریم:

$$n = |N(D)| \le \sum_{v\in D} \deg_G(v) \le |D|\Delta$$

از این رو $\frac{n}{\Delta} \le |D| = \gamma_{tpr}(G)$. برای nهایی که مضرب ۴ هستند بنابر گزاره ۲-۷، داریم:

$$\gamma_{tpr}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil = \frac{n}{\Delta}$$

لذا، این کران شارپ است.

در ادامه نامساوی نورس- گادم برای عدد احاطه‌ای تام در مورد گراف‌های منظم ارائه می‌شود.

قضیه ۳-۴. فرض کنید G گرافی r – منظم از مرتبه n باشد. در این صورت داریم:

$$m(G) + \dim(\bar{G}) = \begin{cases} \frac{4n}{n+1} & n \text{ فرد} \\ \frac{4(n+1)}{n+2} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

برهان. چون G گراف r – منظم است، لذا $\bar{G}$، $(n-r-۱)$–منظم می‌باشد. بنابر قضیه ۳-۴، خواهیم داشت:

$$\dim(G) + \dim(\bar{G}) \ge \frac{n}{r} + \frac{n}{n-r-۱}.$$

چون مینیم تابع $f(r)=\frac{n}{r}+\frac{n}{n-r-1}$ در $r=\frac{n+1}{2}$ رخ می‌دهد. لذا رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\dim(G)+\dim(\bar{G})\geq\frac{4(n+1)}{n+2}.$$

در حالتی که n زوج باشد مینیم تابع فوق در $r=\frac{n}{2}$ یا $r=\frac{n+2}{2}$ رخ داده و خواهیم داشت:

$$\dim(G)+\dim(\bar{G})\geq\frac{4(n+1)}{n+2}.$$

قضیه زیر کران پایینی بر حسب کم‌ترین درجه گراف ارائه می‌کند. نماد $g(G)$ برای نشان دادن طول کوتاه‌ترین دور در گراف، کمر گراف، به کار می‌رود.

قضیه ۳-۵. فرض کنید G گرافی از مرتبه n و $g(G)\geq 5$ باشد. در این صورت داریم $\gamma_{tpr}(G)\geq\delta+1$.

برهان. فرض کنید D یک $\gamma_{tpr}(G)$- مجموعه باشد به طوری که $\gamma_{tpr}(G)\leq\delta$. رأس v با بیش‌ترین درجه در G را در نظر بگیرید. چون $g(G)\geq 5$، بنابراین $N(v)$ یک مجموعه مستقل است و هم‌چنین هیچ دو رأس در $N(v)$ همسایه مشترک ندارند. در نتیجه داریم:

$$n\geq|N[v]|+\sum_{u\in N(v)}|N(u)\text{-}\{v\}|$$
$$\geq 1+\Delta+\sum_{u\in N(v)}(\delta-1)$$
$$=1+\Delta\delta. \qquad (1)$$

از طرفی بنابر قضیه ۳-۳ و با توجه به فرض خلف داریم:

$$\frac{n}{\Delta}\leq\gamma_{tpr}(G)\leq\delta. \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) به تناقض می‌رسیم. در نتیجه $\gamma_{tpr}(G)\geq\delta+1$. این کران برای دور به طول ۵ صادق است. لذا شارپ می‌باشد.
برهان لم زیر را می‌توان در برهان قضیه ۲-۳ از [۴] ملاحظه کرد.

لم ۳-۶. فرض کنید G گرافی با $2\leq\delta$ و $g(G)\geq 5$ باشد. اگر G' گرافی باشد که از حذف رئوس دور به طول $g(G)$ از G به دست آمده باشد، آن‌گاه $\delta(G')\geq 1$.
با استفاده از لم ۳-۶، می‌توان کران بالایی بر حسب کمر گراف برای عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی تام ارائه کرد.

قضیه ۳-۷. فرض کنید G گرافی با $2\leq\delta$ و $g(G)\geq 5$ باشد. در این صورت داریم:

$$\gamma_{tpr}(G)\leq n-\left\lfloor\frac{g(G)}{2}\right\rfloor+1$$

برهان. فرض کنید C دوری به طول $g(G)$ از گراف G باشد و G' از حذف رئوس دور C در گراف G به دست آمده باشد. بنابر لم ۳-۶، هر رأس $v\in G'$ حداقل یک همسایه در G' دارد. فرض کنید D یک $\gamma_{tpr}(C)$- مجموعه باشد. در این صورت $V(G')\cup D$ یک مجموعه احاطه‌گر دو به دو-بیرونی تام برای G است. با استفاده از این مطلب و گزاره ۲-۷، داریم:

$$\gamma_{tpr}(G)\leq|V(G')|+\left\lceil\frac{g(G)}{2}\right\rceil+1$$

$$= n - g(G) + \left\lceil \frac{g(G)}{۲} \right\rceil + ۱.$$
$$= n - \left\lfloor \frac{g(G)}{۲} \right\rfloor + ۱$$

۴- نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهاد

در این مقاله مفهوم مجموعه احاطه‌گر دو به دو- بیرونی تام مورد مطالعه قرار گرفت. کران‌های بالا و پایین برای آن بر حسب مرتبه و اندازه، مینیمم درجه و کمر ارائه گردید. در انتها پیشنهادات زیر را می‌توان مطرح کرد.

۱- بررسی گراف‌هایی که کران‌های خاص مانند n را به خود می‌گیرند.

۲- بررسی عدد احاطه‌ای دو به دو-بیرونی تام روی درخت‌ها.

فهرست منابع

[1] H. A. Ahangar, M. Chellali, D. Kuziak, and V. Samodivkin, Connected graphs with maximal Roman domination numbers one less than their order n, Ars Combinatoria, 144 (2019) 207-224.

[2] M. H. Akhbari, R. Hasni, O. Favaron, H. Karami, and S.M. Sheikholeslami, On the outer-connected domination in graphs, Journal of Combinatorial Optimization, 26 (2013) 10-18.

[3] R. B. Allan and R.C. Laskar, On domination and independent domination numbers of a graph, Discrete Mathematics, 23 (1978) 73-76.

[4] M. Atapour and N. Soltankhah, On total dominating sets in graphs, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 4 (2009) 253-257.

[5] P. Azizi Keshavarz and A. Tehranian, Incidence dominating numbers of graphs, Journal of New Researches in Mathematics, 6(24) (2020) 85-96.

[6] B. Brešar, M. A. Henning and D.F. Rall, Rainbow domination in graphs, Taiwanese Journal of Mathematics, 12 (2008) 213-225.

[7] B. Brešar and T.K. Šumenjak, On the 2- rainbow domination in graphs, Discrete Applied Mathematics 155 (2007) 2394-2400.

[8] E. J. Cockayne, R.M. Dawes and S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs, Networks 10 (1980) 211-219.

[9] T. W. Haynes and P. J. Slater, Paired domination in graphs, Networks 32 (1998) 199-206.

[10] M. kamali Pashakalai, H. A. Ahangar, M. Motiei and S. M. Sheikholeslami, Results on the maximal Roman domination number in graphs, Journal of New Researches in Mathematics, 6 (25) (2020) 197-208.

[11] Ch. Y. Lin, J. J. Liu, Y. L. Wang and Ch. Ch. Hsu, Dominating sets with matching outside, The 32nd workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory.

[12] A. Mahmoodi, L. Asgharsharghi, Outer-paired domination in graphs, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications 12(6), 2050072 (2020).

[13] H. Rahbani, S. N. Doosti Motlagh and N. Jafari Rad, New bounds on weak odd dominating set in trees, Journal of New Researches in Mathematics, (2021).