دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دهم، شماره چهل و هفتم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۳
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

کران‌های جدید برای ثابت‌های نوع اویلر و نتایج آنها

نگار محمدی،[۱] محمد هادی هوشمند[۲]*

[(۱و۲)] گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۲۵ /۱۴۰۱/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۰/۲۳

چکیده

ما با برخی از ثابت‌های نوع اویلر تعمیم یافته سروکار داریم که توسط مشتقات توابع جمع‌بند حدی ایجاد می‌شوند. به منظور مطالعه مشتق توابع جمع‌بند، محمدهادی هوشمند با یک دنباله تابعی روبرو شده بود که او را به تعمیم ثابت‌های نوع اویلر رساند. در این مقاله، برخی از کران‌های جدید برای چنین ثابت های نوع اویلر تعمیم یافته را ارائه داده و برخی نتایج و نامساوی‌های مرتبط برای آنها را بیان می‌کنیم که انگیزه آن از توابع جمع‌بند حدی می‌باشد. به عنوان یک نتیجه مهم از این بحث، ارائه کردن کران‌های بالا و پایین برای سری $\sum_{j=1}^{\infty} f'(j)$ ، می‌باشد که در آن f یک تابع خاص حقیقی مقدار است. سرانجام چندین نامساوی تابعی مانند $\tan^{-1} m \geq \frac{\pi}{2} - \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{1+j^2}$، (برای هر عدد صحیح مثبت m)، حاصل می گردد.

واژه‌های کلیدی: تابع جمع‌بند حدی – ثابت نوع اویلر – جمع‌پذیری حدی توابع حقیقی - نابرابری‌های مربوط به توابع

---

*عهده‌دار مکاتبات: Email:hadi.hooshmand@gmail.com

۱- مقدمه

یکی از ثابت‌های ریاضی شناخته شده و مفید ثابت اویلر- ماسکورونی است که به صورت زیر تعریف شده است.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n)$$

از آنجا که این ثابت از تابع لگاریتم به دست می‌آید، برخی از انواع ثابت‌های تعمیم یافته آن وابسته به یک تابع f با ویژگی‌های معینی می‌باشد. بعضی از چنین ثابت‌هایی از نوع اویلر در $[3,2,1]$ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. یکی از آنها که باعث ایجاد انگیزه موضوع شده، جمع‌پذیری حدی توابع است که توسط نویسنده دوم مقاله در سال ۲۰۰۱ [4] معرفی شده و در ادامه خلاصه‌ای از آن مبحث آمده است.

۲- پیشینه تحقیق

۲ -۱ تعریف. برای هر تابع $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ (یا به طور کلی تر $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ ، برای همه $a<1$)، دنباله تابعی f_{σ_n} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_{\sigma_n}(x) := xf(n) + \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(x+k); \quad x \ge 0.$$

اگرقرار دهیم $R_n(f,x) := R_n(x) = f(n) - f(x+n)$، آنگاه داریم

$$f_{\sigma_n}(x) = xf(n) + xf(n) + \sum_{k=1}^{n} R_k(x)$$

و

$$f_{\sigma_n}(x) - f_{\sigma_n}(x) = R_n(x) - xR_{n-1}(x); \quad x \ge 0,$$

و

$$f_{\sigma_n}(x) - f_{\sigma_n}(x-1) = f(x) + R_n(x); \quad x \ge 1.$$

حد تابع $f_{\sigma_n}(x)$ (یا $R_n(f,x)$) بوسیله نماد $f_\sigma(x)$ (به طور مشابه $R(f,x)$ ویا $R(x)$) نمایش داده و آن را "تابع جمع‌بند حدی" تابع f می‌نامیم. واضح است که $f_\sigma(0)=0$ و $f_\sigma(-1) = -f(0)$ (اگر صفر عضو دامنه f باشد.) و $1\in D_{f_\sigma}$ اگروتنها اگر $R_n(1)$ همگرا باشد.

شرط لازم برای جمع‌پذیری حدی f در x این است که

$$\lim_{n\to\infty}(R_n(x) - xR_{n-1}(1)) = 0.$$

بنابراین اگر $1\in D_{f_\sigma}$ باشد برای همه $x\in D_{f_\sigma}$ داریم $R(x) = R(1)x$.

۲-۲ تعریف. یک تابع f در x_0 (یا روی $S\subseteq[0,+\infty)$) "جمع‌پذیر حدی" گفته می‌شود اگر دنباله تابعی $f_{\sigma_n}(x)$ در x_0 (یا روی S) همگرا باشد. بنابراین دامنه تابع f_σ، همه اعداد حقیقی است که به ازای آنها f جمع‌پذیر حدی باشد.

۲-۳ تعریف. تابع f جمع‌پذیر حدی یکنواخت روی $S\subseteq[0,+\infty)$ نامیده می‌شود اگر $f_{\sigma_n}(x)$ به طور یکنواخت روی S همگرا باشد. اگر $R(1)=0$ باشد آنگاه داریم

$$f_\sigma(x) = f(x) + f_\sigma(x-1); \quad x \in D_{f_\sigma}+1,$$

بنابراین

$$f_{\sigma}(m)=\sum_{j=1}^{m} f(j);\ m\in\mathbb{N}^{+}.$$

نشان داده شده که تابع نوع گاما می‌تواند یک حالت خاص از جمع‌پذیری حدی برای تابع حقیقی در نظر گرفته شود (مرجع [5] را ببینید).

نویسنده دوم مقاله در مطالعه مشتق تابع جمع‌بند f_{σ} با دنباله تابعی مواجه شده که او را به یک تعمیم از ثابت نوع اویلر هدایت کرد.

برای هر تابع مشتق‌پذیر $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم

$$f_{\sigma_n'}(x):=(f_{\sigma_n}(x))'=f(n)-\sum_{k=1}^{n} f'(x+k)$$

و حد تابع $f_{\sigma_n'}(x)$ را در صورت وجود به وسیله $f_{\sigma'}(x)$ نمایش می‌دهیم.

می‌دانیم $\log_{\sigma'}(0)=-\gamma$ و همچنین از $-\gamma_n(f,x)$ و $-\gamma(f,x)$ به ترتیب برای نمایش $f_{\sigma_n'}(x)$ و $f_{\sigma_n'}(0)$ استفاده می‌کنیم.

با ایده گرفتن از رابطه زیر

$$\frac{f_{\sigma}(m)}{m}=\frac{f(1)+f(2)+...+f(m)}{m}$$

نویسنده دوم مقاله میانگین جمع‌بند حدی از f را به صورت رابطه زیر تعریف کرده است

$$f_{\tilde{\sigma}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}f_{\sigma}(x); & x\neq 0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_{\sigma}(x)}{x} & ;\quad x=0\end{cases}$$

توجه داشته باشید که دامنه $f_{\tilde{\sigma}}$ برابر است با $D_{f_{\sigma}}$ یا $D_{f_{\sigma}}-\{0\}$.

قضیه بعد نه تنها محک همگرایی از $\gamma_n(f,x)$ بیان می‌کند بلکه نامساوی مهم برای $\gamma_n(f,x)$ و $\gamma(f,x)$ و $f_{\tilde{\sigma}}$ برای همه $x\in(0,1]$ ارایه می‌کند .

۴-۲ قضیه. در نظر بگیرید تابع $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ دارای مشتق یکنوا بوده و $R_n(f,1)$ کراندار باشد. آنگاه $f_{\sigma_n'}(x)$ برای $x\geq 0$ همگراست و در نابرابری زیر صدق می‌کند، البته اگر f' صعودی باشد ([4]).

$$f'(1)+R(1)-\gamma(f)\leq f_{\sigma'}(x)\leq f_{\sigma}(x)\leq-\gamma(f);\quad 0<x\leq 1 \qquad (1)$$

۳- کران بالای جدید برای $\gamma_n(f,x)$

حالا با شیوه‌ای دیگر ما کران‌های دیگری برای ثابت اویلر $\gamma(f,x)=-f_{\delta'}(x)$ روی بازه $[0,+\infty)$ به دست می‌آوریم و برای آن یک فرمول انتگرال اثبات می‌کنیم. اگر $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابع مشتق‌پذیر پیوسته‌ای باشد آنگاه فرمول مجموع اویلر نتیجه می‌دهد

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\int_{1}^{n} f(t)dt+\int_{1}^{n}\{x\}f'(t)dt+f(1),$$

جایی‌که $\{x\}$ نمایش قسمت اعشاری از x ($\{x\}=x-[x]$).

۳-۱-۱ قضیه. فرض کنید که $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی است که $R_n(f,1)$ کراندار و مشتق دوم پیوسته و نامنفی است، آنگاه $f_{\delta'_n}(x)$ و $R_n(f,1)$) همگراست و در نامساوی که در ادامه ذکر می‌شود، صدق می‌کند.

$$\begin{aligned}|\gamma(f,x)|=|f_{\sigma'}(x)|&\le|f(x+1)-f'(x+1)+R(f,1)x|-f'(x+1)-R(f,1)\\&\le|f(x+1)+R(f,1)(x+1)|-2f'(x+1)-2R(f,1);\quad x\ge 0\quad(2)\end{aligned}$$

برهان: می‌دانیم f محدب است و $R_n(f,1)$ کراندار باشد، آنگاه f جمع‌پذیر حدی است (یعنی $f_{\sigma_n}(x)$ برای $x\ge 0$ همگرا) و $R_n(f,1)\to R(f,1)$ جایی‌که $x\to\infty$ (قضیه (۳،۳) از [2]را ببینید).

بنابراین $R_n(f,x)$ برای همه $x\ge 0$ همگرا و $R(f,x)=R(f,1)x$.

از طرفی دیگر با استفاده از فرمول مجموع اویلر برای تابع $f'(t+x)$ (جایی‌که x ثابت و $t\ge 1$) داریم

$$\begin{aligned}-\gamma_n(f,x)=f_{\delta'_n}(x)&=f(n)-\sum_{k=1}^{n}f'(x+k)\\&=f(n)-f'(1+x)-\int_1^n f'(t+x)dt-\int_1^n\{x\}f''(t+x)dt\\&=f(n)-f'(1+x)-f(x+n)+f(1+x)-\int_1^n\{x\}f''(t+x)dt\\&=R_n(f,x)+f(x+1)-f'(x+1)-\int_1^n\{x\}f''(t+x)dt\end{aligned}$$

بنابراین

$$\left|\int_1^n\{x\}f''(t+x)dt\right|\le\int_1^n\{x\}f''(t+x)dt\le\int_1^n|f''(t+x)|dt$$

با توجه به اینکه $f''\ge 0$ نتیجه می‌گیریم

$$0\le\int_1^n\{x\}f''(t+x)dt\le f'(n+x)-f'(1+x);\quad x\ge 0$$

حالا اگر $R(f,1)=0$ با توجه به قضیه مقدار میانی و با توجه به خاصیت صعودی بودن f' می توانیم نتیجه بگیریم $\lim_{t\to\infty}f'(t)=0$. بنابراین داریم

$$0\le\int_1^\infty\{x\}f''(t+x)dt\le -f'(1+x);\quad x\ge 0$$

بنابراین

$$|f_{\sigma'}(x)|\le|f(x+1)-f'(x+1)|-f'(x+1)\le|f(x+1)|-2f'(x+1);\quad x\ge 0.$$

اما اگر قرار دهید $R(f,1)\neq 0$ و اگر $g(x):=f(x)+R(f,1)x$ قرارداد کنیم، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&R_n(g,x)=R_n(f,x)-R(f,1)x,\\&g'(x)=f'(x)+R(f,1),\\&g_{\sigma_n}(x)=f_{\sigma_n}(x),\end{aligned}$$

و g (به عنوان تحدیدی از f) در روابط بالا صدق می‌کند و بنابراین برای $x\ge 0$ نا مساوی زیر را به دست می‌آوریم

$$\left|f_{\sigma'}(x)\right| = \left|g_{\sigma'}(x)\right| \le \left|f(x+1) + R(f,1)(x+1) - f'(x+1) - R(f,1)\right| - f'(x+1) - R(f,1)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\left|f_{\sigma'}(x)\right| &\le \left|f(x+1) - f'(x+1) + R(f,1)x\right| - f'(x+1) - R(f,1)\\ &\le \left|f(x+1) + R(f,1)x\right| - 2f'(x+1) - 2R(f,1); \quad x \ge 0.\end{aligned}$$

□

دقت کنید که رابطه (۲) که اکنون به دست آوردیم برای همه $x \ge 0$ برقرار است و رابطه (۱) که قبلا در مرجع [2] به دست آورده شده بود فقط برای $0 < x \le 1$ درست است. قضیه بالا دو نتیجه مهم دارد که در ادامه آورده شده است. نتیجه اول نه تنها یک محک برای وجود $\gamma_n(f,x)$ است بلکه یک فرمول انتگرال برای آن است.

۳-۱-۲ نتیجه. فرض کنید $f:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ تابعی باشدکه مشتق دوم‌اش پیوسته است. اگر $R_n(f,x)$ و $\int_1^\infty \{x\} f''(t+x)dt$ همگرا باشند (یعنی اگر $\int_1^\infty f''(t+x)dt$ همگرای یکنواخت باشد)، بنابراین ثابت اویلر $\gamma_n(f,x)$ همگرا هستند و

$$-\gamma_n(f,x) = f_{\delta'}(x) = f(x+1) - f'(x+1) - \int_1^\infty \{x\} f''(t+x)dt + R(f,x); \quad x \ge 0.$$

۳-۱-۳ نتیجه. اگر روابط قضیه ۱-۱- ۳ را داشته باشیم و $R(f,1)=0$ آنگاه (با قرار دادن $t = x+1$)

$$\begin{aligned}\left|f_{\delta'}(t-1)\right| &\le \left|f(t) - f'(t)\right| - f'(t)\\ &\le \left|f(t)\right| - 2f'(t)\\ &\le \left|f(1)\right| - 2f'(t); \quad t \ge 1.\end{aligned}$$

همچنین اگر $f' \le f$ ($f \le f'$) روی $[0,+\infty)$ باشد داریم

$$\left|f_{\delta'}(t-1)\right| \le \left|f(t) - f'(t)\right| - f'(t) \le \left|f(t)\right| - 2f'(t) \le f(1) - 2f'(t); \quad t \ge 1.$$

و همچنین

$$\left|f_{\delta'}(t-1)\right| \le \left|f(t) - f'(t)\right| - f'(t) \le f(t) \le f(1); \quad t \ge 1.$$

بنابراین $f_{\delta'}$ یک کران بالا روی $[0,+\infty)$ است.

برهان. از اثبات قضیه ۱-۱-۳ داریم که $\lim_{t\to\infty} f'(t) = 0$ و f' صعودی است بنابراین روی بازه $[1,+\infty)$ داریم $f'(x) \le 0$ و $f(x) \le f(1)$.

سومین نتیجه از قضیه ۱-۱-۳ یک کران بالا (و پایین) برای سری مشتق f به دست می‌آورد که بوسیله ثابت اویلر تعمیم یافته القا شده است.

۳-۱-۳ نتیجه. فرض کنید f تابعی $f:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ باشد که $f(n)$ همگرا و مشتق دوم پیوسته و نامنفی باشد و قرار دهید $f(\infty) = \lim_{n\to\infty} f(n)$ داریم

$$f_{\sigma'}(m) = f(\infty) - \sum_{j=m+1}^{\infty} f'(j); \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

بنابراین برای سری $\sum f'(j)$ کران زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} f(\infty)-f(m)+2f'(m)\le \sum_{j=m}^{\infty} f'(j)\le f(\infty)+f(m)-2f'(m); & f(m)\ge f'(m)\\ f(\infty)+f(m)\le f'(j)\le \sum_{j=m}^{\infty} f(\infty)-f(m); & f(m)\le f'(m)\end{cases}$$

۳-۲. نتایج برای توابع خاص

نتایج به دست آمده در مورد توابع خاص می‌توانند روابطی برای ما به دست آورند. مثال‌هایی که در ادامه آورده شده است بیانگر این خصوصیات است.

۳-۲-۱ مثال. تابع حقیقی $f(x)=-\tan^{-1}x$ برای همه $x\ge 0$ در نظر می‌گیریم آنگاه داریم

$$f_{\sigma'}(x)=-\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x+k)^2},$$

$$\left|-\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x+k)^2}\right|\le\left|-\tan^{-1}(x+1)+\frac{1}{1+(x+1)^2}\right|+\frac{1}{1+(x+1)^2};\quad x\ge 0$$

بنابراین

$$\left|\tan^{-1}(x)+\frac{1}{1+x^2}\right|\ge\quad\left|-\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x+k)^2}\right|-\frac{1}{1+x^2};\quad x\ge 1$$

پس می‌توان نتیجه گرفت $\tan^{-1}(x)\ge\frac{1}{1+x^2}$ برای $x\ge 1$.

از نتیجه۳-۱-۳ نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(m)\le\sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{1+j^2}\le\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}m$$

پس داریم

$$\tan^{-1}(m)\ge\frac{\pi}{2}-\sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{1+j^2};\quad m\in\mathbb{Z}^+.$$

۳-۲-۲ مثال. برای تابع حقیقی مقدار $f(x)=-\log x$ داریم

$$f_{\sigma_n'}(x)=\lim_{n\to\infty}(-\log n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x})=\gamma-\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k+x}=\psi(x+1);\quad x<0.$$

جایی‌که ψ نمایشگر تابع دیاگاما است. بنابراین داریم

$$\psi(x)\le\left|\frac{1}{x}-\log x\right|+\frac{1}{x};\quad x\ge 1.$$

۳-۲-۳ مثال. تابع حقیقی مقدار $f(x)=x^r$ را به ازای $r<0$ با دامنه $(0,\infty)$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $f(x)$ محدب است و داریم

$$f_{\sigma'}(x)=-\sum_{k=1}^{\infty}r(x+k)^{r-1}=-r\zeta(1-r,x+1);\quad x\ge 0.$$

بنابراین

$$\zeta(1-r,x+1)=\sum_{k=1}^{\infty}(x+k)^{r-1}\le\frac{2r-x-1}{r}(x+1)^{r-1};x\ge 0,r<0$$

در حالت خاص نتیجه می‌گیریم

$$\zeta(-r)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{r}\le\frac{2r+1}{r+1}(x+1)^{r-1};\quad r<-1.$$

۳-۲-۴ مثال. گیریم $\beta\ge\frac{1}{2}$ عدد حقیقی ثابتی باشد و قرار دهید $f(x)=e^{-\beta x^2}$. ابتدا داریم

$$f_{\sigma'}(x)=2\beta\sum_{k=1}^{\infty}(x+k)e^{-\beta(x+k)^2}$$

بنابراین (۲) نتیجه می‌دهد که

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x+k)e^{-\beta(x+k)^2}\le(\frac{1}{2\beta}+2x+2)e^{-\beta(x+1)^2};\quad x\ge 0.$$

اگر در نامساوی بالا $x=0$ قرار دهیم، به رابطه زیر می‌رسیم

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\beta k^2}\le(\frac{1}{2\beta}+2)e^{-\beta}.$$

۳-۲-۵ مثال. تابع حقیقی مقدار $f(x)=-(1+\frac{1}{x})^{x}$ را با دامنه $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ در نظر می‌گیریم، آنگاه

$$f_{\sigma'}(x)=-e+\sum_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{x+k})^{x+k}\frac{(x+k+1)\log(1+\frac{1}{x+k})-1}{x+k+1}$$

بنابراین

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{x+k})^{x+k}\frac{(x+k+1)\log(1+\frac{1}{x+k})-1}{x+k+1}\le e+(1+\frac{1}{x})^{x};\quad x\ge 1$$

بنابراین نامساوی زیر را بدست می آوریم

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}(\log(1+\frac{1}{k+1})-\frac{1}{k+2})\le e+2.$$

۳-۲-۶ مثال. طبق (۲) برای $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ نتیجه می‌گیریم

$$f_{\sigma'}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(x+k)}{((x+k)^2+1)^2}$$

بنابراین داریم

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+k)}{((x+k)^2+1)^2}\le\frac{1}{2}(\frac{x+1}{x^2+1})^2;\quad x\ge 1$$

در حالت خاص اگر $x=0$ قرار دهیم نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k^2+1)^2}\le\frac{1}{2}.$$

۳-۲-۷ مثال. برای $f(x)=\sinh(e^{-x})$ داریم $f_{\sigma'}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x-k}\cosh(e^{-x-k})$ و

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cosh(e^{-x-k})}{e^{k}} \le e^{x}\sinh(e^{-x-1})+\frac{2}{e}\cosh(e^{-x-1});\quad x\ge 0.$$

در حالت خاص اگر $x=0$ قرار دهیم نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}\cosh(e^{-k})\le \sinh(e^{-1})+2e^{-1}\cosh(e^{-1}).$$

فهرست منابع

[1] اقتصادی فرد. محمدهادی، هوشمند محمدهادی. "آزمونی جدید برای وجود دسته‌ای از ثابت‌های نوع اویلر تعمیم یافته"، پژوهش‌های نوین در ریاضی. سال چهارم، شماره شانزدهم، صفحه ۲۴-۱۷، زمستان ۱۳۹۷.

[2] Eghtesadifard M. H. and Hooshmand, M. H. "Inequalities Arising from Generalized Euler-Type constants Motivated by Limit Summability of Functions", *J. Math.* Vol 13, no 1, pp. 261-274, 2019.

[3] Sandor, J. "On Generalized Euler Constants and Schlomilch-Lemonnier Type Inequalities", *J. Math. Anal. Appl*. vol 328, pp. 1336-1342, 2007.

[4] Hooshmand.M. H. " Limit Summability of Real Functions", *Real Analysis Exchange*. vol.27, no 2, pp. 463-472, 2002.

[5] Artin. E. "The Gamma Function, "The Gamma Function", *Holt Rhinehart - Wilson Pub lisher, New York* ,1964.