دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هفتم، مرداد و شهریور ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

جفت‌های متمایز عناصر جبری

آزاده نیک‌سرشت*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی (ره)، بروجرد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۱۷   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

چکیده

فرض کنید v یک ارزیاب هنسلی روی میدان K و $\tilde{v}$ توسیع منحصربه‌فرد آن به بستار جبری $\widetilde{K}$ از K باشد. عنصر $\alpha \in \widetilde{K}\backslash K$ دارای جفت متمایز است هرگاه مجموعه $M(\alpha, K)$ متناظر آن (تعریف‌شده با ضابطه زیر) دارای عضو ماکسیمم باشد:

$$M(\alpha, K) = \{\tilde{v}(\alpha - \xi) \mid \xi \in \widetilde{K}, [K(\xi) : K] < [K(\alpha) : K]\}.$$

در این‌صورت یک جفت (α, β) از عناصر $\widetilde{K}$ یک جفت متمایز برای α است هرگاه β عضوی از کوچکترین درجه روی K باشد به‌طوری‌که $\deg\alpha > \deg\beta$ و $\tilde{v}(\alpha - \beta) = \sup M(\alpha, K)$. در این مقاله ابتدا نتایجی در مورد جفت‌های متمایز برای عناصر جبری از درجه دلخواه روی میدان‌های ارزیاب هنسلی ارائه می‌دهیم. سپس با توجه به اهمیت عناصر جبری از درجه اول در توسیع‌های میدان‌های ارزیاب، توجه خود را روی چنین عناصری معطوف می‌کنیم. خصوصاً برای $\alpha \in \widetilde{K}$ از درجه یک عدد اول روی K، یک شرط لازم و کافی برای وجود ماکسیمم مجموعه متناظر $M(\alpha, K)$ با استفاده از چندجمله‌ای مینیمال α روی K ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: توسیع‌های ارزیاب، عناصر جبری روی میدان ارزیاب، جفت متمایز، چندجمله‌ای مینیمال.

* عهده‌دار مکاتبات:
Email: a.nikseresht@abru.ac.ir; a.nikseresht@alumni.kntu.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید v یک ارزیاب هنسلی[۲] روی میدان K و $\tilde{v}$ توسیع منحصربه‌فرد آن به بستار جبری $\widetilde{K}$ از K باشد. برای یک جفت متمایز[۳] (α,β) از عناصر $\widetilde{K}$ روی میدان ارزیاب هنسلی (K,v)، بین گروه‌های ارزیاب[۴] و میدان‌های مانده‌ای[۵] نظیر $K(\alpha)$ و $K(\beta)$ و همچنین نقص[۶] توسیع‌های $K(\alpha)|K$ و $K(\beta)|K$ روابطی وجود دارند که این روابط در قضیه ۱.۱ از [۱] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در بخش سوم این مقاله به تکمیل این نتایج می‌پردازیم. خصوصاً رابطه بین درجه‌ی α و درجه‌ی β را بیان می‌کنیم (نتیجه ۶.۳). سپس از آن‌جایی‌که در مطالعه‌ی توسیع‌ها در نظریه ارزیاب توسیع‌های ساده[۷] جبری از درجه اول نقش بسیار تاثیرگذاری دارند (برای مثال [۲-۵] و [۶، فصل ۱۲] را ببینید)، در بخش چهارم توجه خود را روی چنین توسیع‌هایی معطوف می‌کنیم. در گزاره ۱.۴ فرض می‌کنیم $\alpha\in\widetilde{K}$ یک عنصر جبری از درجه یک عدد اول و دارای یک جفت متمایز باشد. از نتیجه ۶.۳ استفاده کرده و نشان می‌دهیم که مجموعه متناظر $M(\alpha,K)$ برای آن، به‌صورت

$$M(\alpha,K)=\{\tilde{v}(\alpha\quad c)|c\in K\},$$

تبدیل می‌شود. چنین مجموعه‌ای برای عناصر جبری روی میدان‌های ارزیاب[۸]، حائز اهمیت ویژه است چرا که منجر به تعریف مفهوم فاصله‌ی[۹] عنصر α از میدان K (نه الزاماً هنسلی) در توسیع‌های ناقص[۱۰] میدان‌های (نه الزاماً هنسلی) ارزیاب تعریف شد [۵].

چنین توسیع‌هایی موانع بزرگی برای حل مسائل باز در نظریه ارزیاب هستند، لذا شناخت ویژگی‌های آن‌ها دارای اهمیت زیادی می‌باشد. لازم به ذکر است که مفهوم فاصله، اخیراً تبدیل به ابزار مهمی برای مطالعه‌ی ساختار توسیع‌های ناقص میدان‌های ارزیاب کلی از مشخصه ناصفر شده است که در آن وجود ماکسیمم برای مجموعه فوق همواره مورد بحث قرار می‌گیرد (برای مثال [۴]، [۵]، [۷-۹] را ببینید). در بخش ۴، یک شرط لازم و کافی برای وجود ماکسیمم برای مجموعه فوق نیز ارائه می‌شود. در قضیه ۲.۴ ثابت می‌کنیم وقتی $\alpha\in\widetilde{K}$ جبری از درجه اول با چند جمله‌ای مینیمال $f(x)\in K[x]$ باشد، آن‌گاه $M(\alpha,K)$ متناظر آن، دارای ماکسیمم است اگر و تنها اگر مجموعه $\{\tilde{v}(f(c))|c\in K\}$ دارای ماکسیمم باشد. لازم به ذکر است که مجموعه $\{\tilde{v}(f(c))|c\in K\}$ نیز نقش کلیدی در بسیاری تحقیقات اخیر نظریه ارزیاب ایفا می‌کند. به‌طور دقیق‌تر این مجموعه منجر به تعریف میدان‌های ارزیاب اکستریمال[۱۱] شد [۹]. در واقع وجود ماکسیمم برای چنین مجموعه‌ای، اساس و ایده‌ی اصلی تعریف میدان‌های ارزیاب اکستریمال می‌باشد. میدان‌های اکستریمال منجر به رده‌بندی میدان‌های به‌طور جبری ماکسیمال[۱۲]، به‌طور جدایی‌پذیر-جبری ماکسیمال[۱۳] و به‌طور جدایی‌ناپذیر بی‌نقص[۱۴] می‌شوند (برای مثال[۲]، [۳]، [۵]، [۹] و [۱۰] را ببینید).

۲- تعاریف و پیش‌نیازها

در سراسر این مقاله یک میدان ارزیاب که آن‌را با نماد (K,v) نمایش می‌دهیم، یک میدان K به‌همراه ارزیاب (کرول)[15] v تعریف‌شده روی آن با گروه ارزیاب $G(K)$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

---

2 henselian valuation
3 distinguished pair
4 value groups
5 residue fields
6 defect
7 simple
8 valued fields
9 distance
10 defect extensions

---

11 extremal
12 algebraically maximal
13 separable-algebraically maximal
14 inseparably defectless
15 (Krull) valuation

$v: K \to G(K) \cup \{\infty\}$ یک نگاشت پوشا است که برای هر $x, y \in K$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $x = 0 \iff v(x) = \infty$،

۲. $v(xy) = v(x) + v(y)$،

۳. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

$G(K)$ یک گروه آبلی جمعی تماماً مرتب[16] می‌باشد و ∞ یک نماد است که برای هر $\alpha \in G(K)$ در شرایط $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty + \infty = \infty$ صدق می‌کند.

برای یک میدان ارزیاب (K, v)، مجموعه

$$O_K = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$$

را حلقه ارزیاب[17] می‌نامند که یک زیرحلقه موضعی از میدان K با تنها ایده آل ماکسیمال

$$M_K = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$$

می‌باشد. به‌علاوه خارج‌قسمت $R(K) = \frac{O_K}{M_K}$ را میدان مانده‌ای نظیر (K, v) می‌نامیم. برای هر α در حلقه ارزیاب O_K، تصویر α تحت همریختی متعارف

$$*:\ O_K \to R(K)$$

را با نماد α^* نشان داده و آن‌را v-مانده‌ی[18] α می‌نامیم. بستار جبری میدان K را با نماد $\widetilde{K}$ نشان داده و برای هر $\alpha \in \widetilde{K}$، درجه α که همان درجه توسیع $K(\alpha)|K$ یا $[K(\alpha):K]$ می‌باشد را با نماد $\deg \alpha$ نشان خواهیم داد.

اولین مثالی که از ارزیاب‌ها ارائه می‌شود، ارزیاب p-گان[19] v_p (برای یک عدد اول p) روی میدان اعداد گویای   با ضابطه

$$v_p\left(p^a \frac{m}{n}\right) = a,\ v_p(0) = \infty$$

است که $a \in$ و $m, n \in \ \setminus \{0\}$ هستند به‌طوری‌که $p \quad m$ و $p \quad n$. همچنین به‌طور مشابه برای هر میدان K و چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $p(x) \in K[x]$، ارزیاب p-گان v_p روی میدان $K(x)$ به‌صورت زیر قابل نمایش است:

$$v_p\left(p(x)^a \frac{f(x)}{g(x)}\right) = a,\ v_p(0) = \infty$$

که $a \in$ و $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ هستند به‌طوری‌که $p(x) \quad f(x)$ و $p(x) \quad g(x)$.

می‌دانیم ارزیاب v روی یک میدان K به هر توسیع میدان K مانند K' قابل توسیع می‌باشد. به‌عبارت دیگر، ارزیاب v' روی K' وجود دارد به‌طوری‌که $v'|_K = v$ (قضیه ۲.۱.۳ از [۱۲] را ببینید). به‌علاوه یک میدان ارزیاب (K, v) هنسلی نامیده می‌شود هرگاه ارزیاب v توسیع منحصربه‌فردی به $\widetilde{K}$، یا به‌طور معادل، به هر توسیع جبری K داشته باشد. اگر (K, v) یک میدان ارزیاب هنسلی باشد، توسیع منحصربه‌فرد v به $\widetilde{K}$ را همواره با نماد $\tilde{v}$ در نظر می‌گیریم. هنگامی‌که K' یک توسیع جبری K ،یعنی مشمول در $\widetilde{K}$ است، همواره ارزیاب روی K' را حاصل تحدید $\tilde{v}$ به K' تعریف می‌کنیم و آن‌را با همان نماد $\tilde{v}$ نشان می‌دهیم. در این‌صورت برای رعایت اختصار به‌جای نماد $(K', \tilde{v})|(K, v)$ از نماد $K'|K$ برای توسیع این میدان‌های ارزیاب استفاده خواهیم کرد. در این مقاله (مگر خلاف آن ذکر شود) همواره (K, v) را یک میدان ارزیاب هنسلی در نظر می‌گیریم.

میدان ارزیاب (نه الزاماً هنسلی) (K, v) را در نظر بگیرید. اگر گروه ارزیاب $G(K)$ یکریخت-مرتب[20] با   باشد، آن‌را ارزیاب گسسته[21] و اگر یکریخت-مرتب با یک زیرگروه غیربدیهی از   باشد، آن‌را ارزیاب از رتبه[22] یک می‌گویند. همچنین می‌دانیم که ارزیاب v

[16] totally ordered additive abelian group
[17] valuation ring
[18] v-residue
[19] p-adic valuation

[20] order-isomorphic
[21] discrete
[22] rank

یک متر روی K ایجاد می‌کند که منجر به القای یک توپولوژی روی میدان K می‌شود. میدان ارزیاب (K,v) را کامل[۲۳] می‌نامند هرگاه با متر القاشده از v، هر دنباله کوشی در K، دارای یک حد در K باشد (برای شرح کامل این مفاهیم به فصل‌های ۱ و ۲ از منبع [۱۲] یا به فصل ۱ از منبع [۱۱] مراجعه کنید). به‌عنوان مثال (بخش ۳.۱ از [۱۲] را ببینید) ارزیاب p-گان v_p، فاصله p-گان[۲۴] d_p را به‌صورت زیر روی القا می‌کند:

$$d_p(x,y) = p^{-v_p(x-y)}, x \neq y$$

و

$$d_p(x,x) = 0.$$

از این‌رو یک فضای متریک می‌شود. کامل‌شده‌ی نسبت به این متر را میدان اعداد p-گان[۲۵] نامیده و با $_p$ نمایش می‌دهیم. هر عضو ناصفر $x \in \ _p$ به‌صورت

$$x = \sum_{i=m}^{\infty} x_i p^i , 0 \leq x_i \leq p \quad 1$$

که $m \in$ و $x_m \neq 0$ قابل نمایش است. ارزیاب p-گان v_p قابل توسیع به میدان $_p$ است. این توسیع که دارای ضابطه زیر است را مجدداً با v_p نمایش می‌دهند:

$$v_p\left(\sum_{i=m}^{\infty} x_i p^i\right) = m,\ x_m \neq 0.$$

برای سایر تعاریف مقدماتی و مفاهیم پایه‌ی نظریه ارزیاب، خواننده را به منابع [۱۱-۱۳] ارجاع می‌دهیم. جفت‌های متمایز از جمله مفاهیمی هستند که برای نخستین بار توسط پاپسکو و زارسکو در [۱۴] معرفی شدند. آن‌ها این مفهوم را به‌همراه سایر مفاهیم کلیدی دیگر روی میدان‌های موضعی[۲۶]، یعنی میدان‌های ارزیاب گسسته کامل از رتبه یک به‌کار

[23] complete
[24] p-adic distance
[25] p-adic numbers field
[26] local fields

بردند تا مجموعه همه‌ی چندجمله‌ای‌های تحویل ناپذیر با ضرایب در میدان‌های موضعی را توصیف کنند. بسیاری از این مفاهیم بعدها روی میدان‌های ارزیاب کلی‌تر از میدانهای موضعی تعمیم داده شدند و بارها در تحقیقات متعدد مورد استفاده قرار گرفتند (به‌عنوان مثال [۱۵-۱۹] را ببینید). جفت‌های متمایز از مفهوم شناخته‌شده جفت مینیمال[۲۷] به‌طریق زیر ایجاد شدند:

تعریف ۱.۲. یک جفت (α,δ) متعلق به $\widetilde{K} \times G(\widetilde{K})$ را مینیمال (نسبت به (K,v)) می‌نامیم هرگاه هر $\beta \in \widetilde{K}$ در رابطه $\tilde{v}(\alpha \quad \beta) \geq \delta$ صدق کند، آن‌گاه داشته باشیم $\deg\alpha \leq \deg\beta$.

از تعریف واضح است هنگامی‌که $\alpha \in K$، (α,δ) برای هر $\delta \in G(\widetilde{K})$ یک جفت مینیمال است. همچنین برای $\alpha \in \widetilde{K}\backslash K$، (α,δ) یک جفت مینیمال است اگر و فقط اگر δ از هر عضو مجموعه زیر (که با نماد $M(\alpha,K)$ نمایش داده می‌شود) اکیداً بزرگتر باشد

$$M(\alpha,K) = \{\tilde{v}(\alpha \quad \xi) | \xi \in \widetilde{K}, \deg\xi < \deg\alpha\}.$$

این موضوع سبب پیدایش متغیری به‌نام متغیر اصلی[۲۸] $\delta_K(\alpha)$ برای عناصر جبری $\alpha \in \widetilde{K}\backslash K$ شد که برای آن‌ها $M(\alpha,K)$ یک کران بالا در $G(\widetilde{K})$ دارد و از رابطه

$$\delta_K(\alpha) = \sup M(\alpha,K)$$

تعریف می‌شود.
مثال زیر حالتی را نشان می‌دهد که مجموعه $M(\alpha,K)$ دارای یک کران بالا در $G(\widetilde{K})$ است و لذا متغیر اصلی $\delta_K(\alpha)$ برای α وجود دارد.

[27] minimal pair
[28] main invariant

مثال ۲.۲. فرض کنید $_2$ میدان اعداد ۲-گان با ارزیاب v_2 باشد. قرار دهید $K = \ {}_{n=0}^{\infty} K_n$ که $K_0 = \ _2$، $K_1 = K_0(\gamma_1)$ با $\gamma_1{}^2 = 2$ و به همین ترتیب با استقرا $K_n = K_{n-1}(\gamma_n)$ با $\gamma_n{}^2 = \gamma_{n-1}$. از آن‌جایی‌که $(\ _2, v_2)$ هنسلی است (قضیه‌های ۱.۳.۱ و ۳.۱.۴ از [۱۲] را ببینید) و توسیع $K| \ _2$ جبری می‌باشد، ارزیاب v_2 توسیع منحصربه‌فردی به K دارد که آن‌را با v نمایش می‌دهیم. فرض کنید i چهارمین ریشه اولیه‌ی واحد و j سومین ریشه اولیه‌ی واحد باشند. $\alpha \in \widetilde{K}$ را به‌صورت $\alpha = \ \ 1 + i\left(1 + \sqrt{3}\right) = i + 2j$ در نظر بگیرید. به‌منظور اثبات

$$\delta_K(\alpha) \in M(\alpha, K)$$

کافی است نشان دهیم که اگر $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} + 4$ باشد، آن‌گاه

$$\tilde{v}(\alpha \quad \beta) = \delta_K(\alpha).$$

از آن‌جایی‌که $\alpha \quad \beta = \frac{2j(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \quad 4$ و $\tilde{v}\left(1 + \sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}$، قانون مثلث قوی[29] (صفحه ۲۸ از [۱۲] را ببینید) ایجاب می‌کند که

$$\tilde{v}(\alpha \quad \beta) = min\left\{\tilde{v}\left(\frac{2j\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}\right), \tilde{v}(4)\right\} = \frac{3}{2}.$$

$\alpha_1 = \alpha$، $\alpha_2 = \quad i + 2j$، $\alpha_3 = i + 2j^2$ و $\alpha_4 = \quad i + 2j^2$ همه‌ی مزدوج‌های α روی K هستند. $\omega_K(\alpha)$ را ثابت کرسنر[30] تعریف شده با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$\omega_K(\alpha) = max\{\tilde{v}(\alpha \quad \alpha_2), \tilde{v}(\alpha \quad \alpha_3), \tilde{v}(\alpha \quad \alpha_4)\}$$

واضح است که

$$\omega_K(\alpha) = max\left\{\tilde{v}(2i), \tilde{v}\left(2\sqrt{3}i\right), \tilde{v}\left(2i + 2\sqrt{3}i\right)\right\} = \frac{3}{2}.$$

از آن‌جایی‌که طبق لم کرسنر (قضیه ۷.۱.۴ از [۱۲]) داریم $\delta_K(\alpha) \leq \omega_K(\alpha)$، رابطه

$$\tilde{v}(\alpha \quad \beta) = \delta_K(\alpha) = \frac{3}{2}$$

حاصل می‌شود.

تعریف ۳.۲. فرض کنید (K, v) یک میدان ارزیاب باشد. یک جفت (α, β) از عناصر $\widetilde{K}$ را یک جفت متمایز (یا به‌طور دقیق‌تر یک (K, v)-جفت متمایز) می‌نامند هرگاه $deg\, \alpha > deg\, \beta$ و β عضوی از کوچکترین درجه روی K باشد که در $\tilde{v}(\alpha \quad \beta) = \delta_K(\alpha)$ صدق می‌کند.

روی میدان‌های ارزیاب هنسلی، وجود جفت متمایز برای یک عنصر جبری با استفاده از مفهوم بی‌نقص بودن[31] میدان‌های ارزیاب رده‌بندی شد[۱۶]. ابتدا به شرح نقص برای میدان‌های ارزیاب و سپس رده‌بندی مورد اشاره می‌پردازیم.

فرض کنید (K, v) یک میدان ارزیاب هنسلی و K' یک توسیع متناهی از K باشد. بنا به لم استراسکی ([۱۱، بخش ۱۸] یا [۱۳، فصل ۶، بخش ۱۲، نتیجه‌ی قضیه ۲۵]) می‌توان نوشت:

$$[K' : K] = p^{\nu}[G(K') : G(K)][R(K') : R(K)] \qquad (۱)$$

که ν یک عدد صحیح نامنفی و p توان مشخصه‌ی[32] میدان مانده‌ای $R(K)$ (یعنی اگر مشخصه میدان $R(K)$ مثبت باشد، $p = c\ \ ar\, R(K)$ و در غیراینصورت $p = 1$) می‌باشند. همچنین

$$e(K'|K) = [G(K') : G(K)]$$

---

[29] strong triangle law
[30] Krasner's constant
[31] defectlessness
[32] characteristic exponent

اندیس انشعاب[33] و

$$f(K'|K) = [R(K'):R(K)]$$

درجه لختی[34] برای توسیع $K'|K$ هستند ([۱۲، صفحه ۶۱] را ببینید).

تعریف ۴.۲. فرض کنید (K,v) و K' منطبق با جملات فوق باشند. عامل $def(K'|K) = p^{\nu}$ در رابطه (۱) را نقص توسیع $K'|K$ می‌نامند. اگر $def(K'|K) \neq 1$، توسیع $K'|K$ را ناقص و اگر $def(K'|K) = 1$ باشد، آن‌را بی‌نقص می‌نامند.

قضیه ۵.۲. [۱۶، قضیه ۱.۱] فرض کنید (K,v) یک میدان ارزیاب هنسلی، $\widetilde{K}$ بستار جبری K و $\tilde{v}$ توسیع منحصربه‌فرد v به $\widetilde{K}$ باشند. دو گزاره زیر با هم معادلند:

۱. به هر $\alpha \in \widetilde{K}\setminus K$، یک $\beta \in \widetilde{K}$ با $deg\,\beta < deg\,\alpha$ نظیر می‌شود به‌طوری‌که
$$\delta_K(\alpha) = \tilde{v}(\alpha \quad \beta).$$

۲. برای هر $\theta \in \widetilde{K}$، توسیع $K(\theta)|K$ بی‌نقص است.

۳- جفت‌های متمایز عناصر جبری از درجه دلخواه

در این بخش به ارائه نتایجی در مورد جفت‌های متمایز عناصر جبری از درجه دلخواه روی میدان‌های ارزیاب هنسلی می‌پردازیم.

فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای ناصفر از $K[x]$ است. به‌کارگیری الگوریتم اقلیدس نشان می‌دهد که هر $F(x) \in K[x]$ به‌صورت منحصربه‌فردی به‌شکل $\sum_{i\geq 0} F_i(x) f(x)^i$ قابل نوشتن است که برای هر i، چندجمله‌ای $F_i(x)$ یا صفر است یا درجه‌ای کمتر از درجه $f(x)$ دارد. این نمایش را معمولاً f-بسط برای F می‌نامند.

با توجه به این نمایش، برای یک جفت
$$(\alpha,\delta) \in \widetilde{K} \times G(\widetilde{K}),$$

ارزیاب $\widetilde{w}_{\alpha,\delta}$ روی $\widetilde{K}(x)$ را به‌صورت

$$\widetilde{w}_{\alpha,\delta}\left(\sum_i c_i (x \quad \alpha)^i\right) = \min_i\{\tilde{v}(c_i) + i\delta\},\ \ c_i \in \widetilde{K}, \qquad (۲)$$

تعریف می‌کنیم و آن‌را ارزیاب تعریف‌شده با (α,δ) می‌نامیم. تحدید $\widetilde{w}_{\alpha,\delta}$ به $K(x)$ را با $w_{\alpha,\delta}$ نمایش می‌دهیم. زمانی‌که (α,δ) یک جفت مینیمال است، ارزیاب $w_{\alpha,\delta}$ به‌طریق زیر توصیف می‌شود:

قضیه ۱.۳. [۱۸، قضیه ۱.۱] فرض کنید $\widetilde{w}_{\alpha,\delta}$ ارزیاب روی $\widetilde{K}(x)$ تعریف‌شده با جفت مینیمال (α,δ) و $w_{\alpha,\delta}$ حاصل تحدید آن به $K(x)$ باشد. اگر $f(x)$ چندجمله‌ای مینیمال α روی K از درجه n و $\lambda \in G(\widetilde{K})$ به‌گونه‌ای باشد که $w_{\alpha,\delta}(f(x)) = \lambda$، آن‌گاه برای هر چندجمله‌ای $F(x) \in K[x]$ با f-بسط به‌صورت $\sum_{i\geq 0} F_i(x) f(x)^i$ که $\deg F_i(x) < n$ است، داریم:

$$w_{\alpha,\delta}(F(x)) = \min_i\{\tilde{v}(F_i(\alpha)) + i\lambda\}.$$

آن‌چنان که در بخش ۲ شرح داده شد، جفت‌های مینیمال، منجر به ایجاد متغیر اصلی و جفت متمایز برای عناصر جبری روی میدان‌های ارزیاب شدند. در قضیه ۵.۲ یک دسته‌بندی برای وجود جفت‌های متمایز روی میدان‌های ارزیاب هنسلی از رتبه دلخواه را ملاحظه نمودید. اکنون برای $\alpha \in \widetilde{K}\setminus K$، جفت متمایز (α,β) را در نظر بگیرید. متناظر با α و β ، میدان‌های ارزیاب $K(\alpha)$ و $K(\beta)$ ایجاد می‌شوند

[33] ramification index
[34] inertia degree

که با ارزیاب حاصل از تحدید $\tilde{v}$ به آن‌ها در نظر گرفته می‌شوند. بین گروه‌های ارزیاب و میدان‌های مانده‌ای متناظر $K(\alpha)$ و $K(\beta)$ ارتباط وجود دارد که این رابطه را می‌توان در قضیه ۵.۳ (که در [۱، قضیه ۱.۱] به اثبات رسیده) به‌خوبی مشاهده نمود. از آن‌جایی که نتایجی که در این مقاله ارائه خواهیم داد، در فرایند اثبات این قضیه به‌دست می‌آیند، به شرح اثبات آن (همزمان با اثبات نتایج مورد نظرمان) خواهیم پرداخت. قبل از آن به چند نتیجه مقدماتی زیر نیاز داریم.

قضیه ۲.۳. [۱۵، قضیه ۱.۱] فرض کنید (K,v) یک میدان ارزیاب هنسلی و $\alpha,\beta\in\widetilde{K}$ به‌گونه‌ای باشند که برای هر $\gamma\in\widetilde{K}$ که $\deg\gamma<\deg\alpha$ در رابطه $\tilde{v}(\alpha\quad\beta)>\tilde{v}(\alpha\quad\gamma)$ صدق می‌کنند. آن‌گاه نتایج زیر را خواهیم داشت:

۱. $G(K(\alpha))\subseteq G(K(\beta))$.

۲. $R(K(\alpha))\subseteq R(K(\beta))$.

۳. $\operatorname{def}(K(\alpha)|K)$، $\operatorname{def}(K(\beta)|K)$ را عاد می‌کند.

لم ۳.۳. [۱۶، لم ۲.۲] فرض کنید (α,δ) یک جفت مینیمال و $\theta\in\widetilde{K}$ در رابطه

$$\tilde{v}(\theta\quad\alpha)\geq\delta$$

صدق کند. اگر $\;(x)\in K[x]$ یک چندجمله‌ای باشد که برای هر ریشه β از آن، داشته باشیم $\tilde{v}(\alpha\quad\beta)<\delta$، آن‌گاه

$$\tilde{v}(\;(\theta)\qquad(\alpha))>\tilde{v}(\;(\alpha)).$$

لم ۴.۳. [۱۶، لم ۳.۲] فرض کنید $\theta\in\widetilde{K}\backslash K$ دارای (K,v)-جفت متمایز (θ,α) است. در این‌صورت داریم:

۱. $(\alpha,\delta_K(\theta))$ یک جفت مینیمال است.

۲. برای هر چندجمله‌ای $g(x)\in K[x]$ که درجه آن روی K، از درجه θ کوچکتر است و برای ارزیاب $\widetilde{w}_{\alpha,\delta}$ تعریف شده با (۲) و $\delta=\delta_K(\theta)$، داریم $\widetilde{w}_{\alpha,\delta}(g(x))=\tilde{v}(g(\theta))$.

قضیه ۵.۳. فرض کنید (K,v) یک میدان ارزیاب هنسلی و $\alpha\in\widetilde{K}\backslash K$ دارای جفت متمایز (α,β) و $f(x)$ چندجمله‌ای مینیمال $\beta\in\widetilde{K}$ روی K باشند. در این‌صورت داریم:

۱. $\operatorname{def}(K(\alpha)|K)=\operatorname{def}(K(\beta)|K)$.

۲. $G(K(\alpha))=G(K(\beta))+\quad\tilde{v}(f(\alpha))$.

۳. $R(K(\alpha))=R(K(\beta))\left(\left(\frac{f(\alpha)^e}{h(\beta)}\right)^*\right)$ که e کوچکترین عدد صحیح مثبت است به‌طوری‌که $e\tilde{v}(f(\alpha))=\tilde{v}(\;(\beta))$ متعلق به $G(K(\beta))$ است.

برهان. قرار می‌دهیم $m=\deg\alpha$ و $n=\deg\beta$. از آن‌جایی که β عضوی از کوچکترین درجه روی K است که

$$\tilde{v}(\alpha\quad\beta)\in M(\alpha,K),$$

اگر $\gamma\in\widetilde{K}$ دارای درجه‌ای اکیداً کوچکتر از درجه β باشد، آن‌گاه طبق تعریف جفت متمایز (α,β)، خواهیم داشت:

$$\tilde{v}(\alpha\quad\gamma)<\tilde{v}(\alpha\quad\beta).$$

در نتیجه با توجه به خواص ارزیاب $\tilde{v}$ داریم:

$$\begin{aligned}\tilde{v}(\beta\quad\gamma)&=\tilde{v}(\beta\quad\alpha+\alpha\quad\gamma)\\&=\min\{\tilde{v}(\alpha\quad\beta),\tilde{v}(\alpha\quad\gamma)\}\\&=\tilde{v}(\alpha\quad\gamma)<\tilde{v}(\beta\quad\alpha).\end{aligned}$$

حال با توجه به نامساوی فوق و این‌که $\deg\gamma<\deg\beta$، می‌توان قضیه ۲.۳ را به‌کار گرفت و نتیجه زیر را به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}&G(K(\beta))\subseteq G(K(\alpha)),\\&R(K(\beta))\subseteq R(K(\alpha)),\\&\operatorname{def}(K(\beta)|K)\mid\operatorname{def}(K(\alpha)|K).\end{aligned}\tag{۳}$$

اما چون $G(K(\alpha))/G(K(\beta))$ یک گروه تابدار

است (قضیه ۴.۲.۳(۱) از [۱۲] را ببینید) و طبق فرض، e کوچکترین عدد صحیح مثبت است که
$$e\tilde{v}\big(f(\alpha)\big) \in G\big(K(\beta)\big),$$

یک چندجمله‌ای $\ (x) \in K[x]$ وجود دارد به‌طوری‌که $e\tilde{v}\big(f(\alpha)\big) = \tilde{v}\big(\ (\beta)\big)$. می‌توان درجه $\ (x)$ را کوچکتر از $deg\,\beta$ قرار داد. چرا که اگر $deg\ \ (x) \geq deg\,\beta = deg\,f(x)$، آن‌گاه چندجمله‌ای‌های $q(x), r(x) \in K[x]$ با $deg\,r(x) < deg\,f(x)$ وجود دارند به‌طوری‌که $\ (x) = f(x)q(x) + r(x)$ و این ایجاب می‌کند که $\tilde{v}\big(\ (\beta)\big) = \tilde{v}(r(\beta))$ که $deg\,r(x) < deg\,\beta$. با توجه به خاصیت کوچکترین بودن e و بنا به قضیه لاگرانژ برای گروه خارج قسمتی $G(K(\alpha))/G(K(\beta))$ داریم:
$$e \mid \big[G\big(K(\alpha)\big) : G\big(K(\beta)\big)\big]. \qquad (۴)$$

به‌علاوه با توجه به این‌که
$$def(K(\beta)|K) = \frac{[K(\beta):K]}{e(K(\beta)|K)f(K(\beta)|K)}$$
و
$$def(K(\alpha)|K) = \frac{[K(\alpha):K]}{e(K(\alpha)|K)f(K(\alpha)|K)},$$

که e و f به‌ترتیب اندیس انشعاب و درجه لختی توسیع‌های ارزیاب هستند (بند قبل از تعریف ۴.۲ را ببینید) و همچنین با در نظر گرفتن روابط (۳) و (۴)، نتیجه می‌گیریم که en، m را عاد می‌کند. لذا می‌توانیم قرار دهیم $r = \frac{m}{en}$ که عددی صحیح می‌باشد.

از سوی دیگر خاصیت ارزیاب $\tilde{v}$ باعث می‌شود که $\tilde{v}\big(\ (\beta)\big) = e\tilde{v}\big(f(\alpha)\big) = \tilde{v}\big(f(\alpha)^e\big)$ و در نتیجه $\tilde{v}\left(\frac{f(\alpha)^e}{h(\beta)}\right) = 0$ که اگر قرار دهیم $\xi = \frac{f(\alpha)^e}{h(\beta)}$، در مجموع می‌توان نوشت:
$$r = \big[R\big(K(\alpha)\big) : R\big(K(\beta)\big)\big] \times \left(\frac{[G(K(\alpha)):G(K(\beta))]}{e}\right)\left(\frac{\mathrm{def}(K(\alpha)|K)}{\mathrm{def}(K(\beta)|K)}\right). \qquad (۵)$$

از سوی دیگر چون $\tilde{v}(\xi) = 0$، لذا $\xi \in R\big(K(\alpha)\big)$. واضح است که توسیع $R\big(K(\alpha)\big)|R\big(K(\beta)\big)$ یک توسیع جبری است ([۱۲، قضیه ۴.۲.۳ (۲)] را ببینید). اگر نشان دهیم ξ روی $R\big(K(\beta)\big)$ یک عنصر جبری از درجه r است، آن‌گاه دو پرانتز سمت راست تساوی در عبارت (۵) می‌بایست برابر یک باشند و در نتیجه
$$\mathrm{def}(K(\alpha)|K) = \mathrm{def}(K(\beta)|K)$$
و
$$\big[G\big(K(\alpha)\big) :\ G\big(K(\beta)\big)\big] = e$$

که این نتایج، قسمت‌های ۱ و ۲ قضیه را ثابت می‌کنند. همچنین در این‌صورت خواهیم داشت
$$R\big(K(\alpha)\big) = R\big(K(\beta)\big)(\xi\ )$$

که این نتیجه نیز قسمت ۳ از قضیه را ثابت می‌کند. بنابراین در صورت نشان دادن این‌که $\xi \in R\big(K(\alpha)\big)$ روی $R\big(K(\beta)\big)$ جبری و از درجه r است، اثبات قضیه تمام می‌شود.

برای رسیدن به این هدف، به‌خلاف فرض می‌کنیم ξ روی $R\big(K(\beta)\big)$ یک عنصر جبری از درجه s باشد که $s < r$. در این‌صورت چندجمله‌ای‌های $a_i(x) \in K[x]$ و $a_0(\beta)\ \neq 0$ وجود دارند به‌طوری‌که
$$\left(\left(\frac{f(\alpha)^e}{h(\beta)}\right)\right)^s + a_{s-1}(\beta)\ \left(\left(\frac{f(\alpha)^e}{h(\beta)}\right)\right)^{s-1} + \quad + a_0(\beta)\ = 0. \qquad (۶)$$

برای هر i، $0 \leq i \leq s \quad 1$، می‌توان قرار داد:
$$\frac{a_i(\beta)}{h(\beta)^i} = b_i(\beta), \qquad (\beta)^{-s} = b_s(\beta),$$

که هر $b_i(x) \in K[x]$ یک چندجمله‌ای از درجه کوچکتر از n است. اکنون (۶) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(b_s(\beta)\, f(\alpha)^{es}) + (b_{s-1}(\beta)\, f(\alpha)^{e(s-1)}) + \quad + b_0(\beta) = 0,\ \ b_0(\beta) = a_0(\beta) \neq 0. \quad (۷)$$

اما از آن‌جایی‌که (α, β) یک جفت متمایز است، بنا به قسمت (۱) از لم ۴.۳، (β, δ) که $\delta = \tilde{v}(\alpha \quad \beta)$ یک جفت مینیمال است. اکنون لم ۳.۳ را به‌کار می‌گیریم تا نتیجه $(b_i(\beta)/b_i(\alpha)) = 1$ حاصل شود و از (۷) نتیجه می‌شود که

$$\tilde{v}(b_s(\alpha) f(\alpha))^{es} + b_{s-1}(\alpha) f(\alpha)^{e(s-1)} + \quad + b_0(\alpha) > 0. \quad (۸)$$

اگر قرار دهیم

$$g(x) = b_s(x) f(x)^{es} + b_{s-1}(x) f(x)^{e(s-1)} + \quad + b_0(x), \quad (۹)$$

مشاهده می‌کنیم که

$$\deg g(x) < esn + n \leq e(r \quad 1)n + n = m \quad en + n \leq m.$$

از آن‌جایی که (۹) در واقع f-بسط برای چندجمله‌ای g است، از قضیه ۱.۳ نتیجه می‌شود که

$$\widetilde{w}_{\alpha,\delta}(g(x)) = \min_{0 \leq i \leq q}\{\tilde{v}(b_i(\beta)) + ie\, \widetilde{w}_{\alpha,\delta}(f(x))\} \leq \tilde{v}(b_0(\beta)) = 0. \quad (۱۰)$$

با توجه به این‌که $\deg g(x) < m$، از قسمت دوم از لم ۴.۳ و (۸) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\widetilde{w}_{\alpha,\delta}(g(x)) = \tilde{v}(g(\alpha)) > 0,$$

که با (۱۰) در تناقض است. این تناقض ثابت می‌کند که ξ یک عنصر جبری از درجه r روی $R(K(\beta))$ است. در ضمن اثبات قضیه فوق، دو نتیجه زیر حاصل می‌شوند که در ادامه، اولین نتیجه را به‌کار می‌گیریم.

نتیجه ۶.۳. فرض کنید α، β و e همانند قضیه فوق باشند. در این صورت $e\, deg\, \beta$، $deg\, \alpha$ را عاد می‌کند. به‌ویژه $deg\, \beta \mid deg\, \alpha$.

نتیجه ۷.۳. با فرض این‌که (α, β) یک جفت متمایز است و با توجه به نمادهای به‌کاررفته در قضیه فوق، $(\frac{f(\alpha)^e}{h(\beta)})$ یک عنصر جبری از درجه $\frac{m}{en}$ روی $R(K(\beta))$ است.

مثال ۸.۳. فرض کنید (K, v)، α و β مطابق مثال ۲.۲ باشند. در این مثال نشان داده شد که

$$\delta_K(\alpha) = \tilde{v}(\alpha \quad \beta) = \frac{3}{2}$$

و $\delta_K(\alpha) \in M(\alpha, K)$. اگر $\alpha_1 \in \widetilde{K} \backslash K$ عضوی از کوچکترین درجه روی K باشد به‌طوری‌که

$$\tilde{v}(\alpha \quad \alpha_1) = \delta_K(\alpha),$$

آن‌گاه قضیه ۵.۳ (۱) و نتیجه ۶.۳ ایجاب می‌کنند که $deg\alpha_1$، $deg\alpha$ را عاد می‌کند و

$$def(K(\alpha_1)|K) = def(K(\alpha)|K).$$

از آن‌جایی‌که $def(K(\alpha)|K) > 1$ و $deg\alpha = 4$، لذا $deg\alpha_1 = 2$.

۴- جفت‌های متمایز عناصر جبری از درجه اول

این بخش دربرگیرنده‌ی نتایجی درباره جفت‌های متمایز عناصر جبری از درجه اول است که در ارتباط با توسیع‌های اکستریمال و مفهوم فاصله عناصر جبری از میدان‌های ارزیاب قرار می‌گیرند.

در گزاره زیر از نتیجه ۶.۳ استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که اگر عنصر جبری $\alpha \in \widetilde{K}$ از درجه یک عدد اول دارای جفت متمایز باشد، مجموعه $M(\alpha, K)$ متناظر آن به‌صورت مجموعه‌ای است که در ارتباط با فاصله α از میدان K قرار می‌گیرد.

گزاره ۱.۴. فرض کنید α یک عنصر جبری از درجه اول روی میدان ارزیاب هنسلی (K, v) است که دارای جفت متمایز می‌باشد. در این‌صورت $M(\alpha, K)$ متناظر آن، به‌صورت $\{\tilde{v}(\alpha \quad c) | c \in K\}$ است.

برهان: فرض کنید α دارای جفت متمایزی مانند (α, β) باشد. نتیجه ۶.۳ را به‌کار می‌گیریم. این نتیجه نشان می‌دهد که $deg\, \beta \mid deg\, \alpha$. از آن‌جا که مطابق با تعریف جفت متمایز می‌بایست $deg\, \beta < deg\, \alpha$ باشد، لذا $\beta \in K$. این نشان می‌دهد که هر جفت متمایز برای α، در واقع به‌صورت (α, β) می‌باشد که $\beta \in K$. از آن‌جایی که جفت متمایز α در واقع ماکسیمم مجموعه $M(\alpha, K)$ متناظر آن است، این استدلال نشان می‌دهد که برای چنین αی، $M(\alpha, K)$ به‌صورت $\{\tilde{v}(\alpha \quad c) | c \in K\}$ می‌باشد.

اکنون در قضیه زیر با در نظر گرفتن یک عنصر جبری α از درجه اول، برای وجود ماکسیمم $M(\alpha, K)$ متناظر، یک شرط لازم و کافی با استفاده از چندجمله‌ای مینیمال α ارائه خواهیم داد.

قضیه ۲.۴. فرض کنید (K, v) یک میدان ارزیاب هنسلی و $\alpha \in \widetilde{K}$ از درجه عدد اول p با چندجمله‌ای مینیمال $f(x) \in K[x]$ روی میدان K است. در این‌صورت دو گزاره زیر با هم معادلند:

۱. $M(\alpha, K)$ متناظر α، دارای ماکسیمم است.

۲. $\{\tilde{v}(f(c)) | c \in K\}$ دارای ماکسیمم است.

برهان: از آن‌جایی که $f(x)$ چندجمله‌ای مینیمال α روی K از درجه p است، می‌توان $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \widetilde{K}$ را به‌گونه‌ای انتخاب کرد که

$$f(x) = (x \quad \alpha_1)(x \quad \alpha_2) \dots (x \quad \alpha_p).$$

بنابراین برای هر i، $1 \le i \le p$، $\sigma_i \in Gal(\widetilde{K} | K)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha_i = \sigma_i(\alpha)$. اگر $M(\alpha, K)$ دارای ماکسیمم باشد، مطابق تعریف جفت متمایز برای α، ماکسیمم $M(\alpha, K)$ منجر به ایجاد یک جفت متمایز برای α می‌شود. بنا به گزاره ۱.۴، مجموعه $M(\alpha, K)$ متناظر با این عنصر جبری α، به‌صورت $\{\tilde{v}(\alpha \quad c) | c \in K\}$ نوشته می‌شود. باید نشان دهیم وجود ماکسیمم برای چنین مجموعه‌ای معادل با وجود ماکسیمم برای مجموعه $\{\tilde{v}(f(c)) | c \in K\}$ است.

می‌دانیم توسیع جبری یک ارزیاب هنسلی، هنسلی می‌باشد. بنابراین برطبق خواص ارزیاب و نیز هنسلی بودن $\tilde{v}$، برای هر $c \in K$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}(f(c)) = \\
&\tilde{v}\left(\textstyle\prod_{i=1}^{p}(c \quad \alpha_i)\right) = \textstyle\sum_{i=1}^{p} \tilde{v}(c \quad \alpha_i) = \\
&\textstyle\sum_{i=1}^{p} \tilde{v}(\sigma_i(c) \quad \sigma_i(\alpha)) = \\
&\textstyle\sum_{i=1}^{p} \tilde{v}(\sigma_i(c \quad \alpha)) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{p} \tilde{v}(c \quad \alpha) = p\tilde{v}(\alpha \quad c).
\end{aligned}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که برای α و f مورد نظر ما، $\{\tilde{v}(f(c)) | c \in K\} = \{p\tilde{v}(\alpha \quad c) | c \in K\}.$

بنابراین اگر $\tilde{v}(\alpha \quad c_0)$ ماکسیمم مجموعه $\{\tilde{v}(\alpha \quad c) | c \in K\}$ باشد، $p\tilde{v}(\alpha \quad c_0)$ ماکسیمم $\{\tilde{v}(f(c)) | c \in K\}$ است و برعکس آن نیز به‌طور مشابه نتیجه می‌شود.

مثال ۳.۴. فرض کنید z یک p-امین ریشه اولیه‌ی واحد (برای یک عدد اول p) و $K = \quad_p$ میدان اعداد p-گان باشند. میدان ارزیاب هنسلی (K, v_p) را در نظر گرفته و قرار دهید $\alpha = z \quad 1$. $(\alpha, 1)$ یک جفت متمایز برای α است و برای ماکسیمم مجموعه $M(\alpha, K)$ داریم: $\delta_K(\alpha) = \quad \tilde{v}(\alpha \quad 1) = \frac{1}{p-1}$. درواقع اگر $f(x)$ چندجمله‌ای مینیمال α روی K باشد، $\frac{p}{p-1}$ ماکسیمم مجموعه متناظر $\{\tilde{v}(f(c)) | c \in K\}$ می‌باشد.

فهرست منابع

[1] Aghigh K., Khanduja S.K., On chains associated with elements algebraic over a Henselian valued field, Algebra Colloq., 12 (4) (2005) 607-616.

[2] Anscombe, S., Kuhlmann, F.-V., Notes on extremal and tame valued fields, J. Symb. Log., 81 (2016) no. 2, 400-416.

[3] Azgin S., Kuhlmann F.-V., Pop F., Characterization of extremal valued fields, Proc. Amer. Math. Soc., 140 (2012) no. 5, 1535-1547.

[4] Blaszczok, A., Distances of elements in valued field extensions, Manuscripta Math., 159 (2019) no. 3-4, 397-429.

[5] Kuhlmann F.-V., A classification of Artin-Schreier defect extensions and characterizations of defectless fields, Illinois J. Math., 54 (2010) no. 2, 397-448.

[6] Lang S., Algebra, revised third ed., Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA (2002).

[7] Blaszczok, A., Infinite towers of Artin–Schreier defect extensions of rational function fields. In: Second International Conference and Workshop on Valuation Theory (Segovia/El Escorial, Spain, 2011), EMS Series of Congress Reports, 10 (2014) 16-54.

[8] Blaszczok, A., Kuhlmann, F.-V., Counting of the number of distinct distances of elements in valued field extensions. J. Algebra, 509 (2018) 192-211.

[9] Ershov, Yu.L., Extremal valued fields, Algebra i Logika 43 (2004) 582-588, 631. English translation: Algebra and Logic, 43 (2004) 327-330.

[10] Ershov, Yu.L., $*$-extremal valued fields, Sibirsk. Mat. Zh., 50 (2009) 1280-1284.

[11] Endler O., Valuation Theory, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, Berlin (1972).

[12] Engler A.J., Prestel A., Valued Fields, Springer-Verlag, Berlin (2005).

[13] Zariski O., Samuel P., Commutative Algebra, Vol. II. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1975).

[14] Popescu N., Zaharescu A., On the structure of the irreducible polynomials over local fields, J. Number Theory, 52 (1995) 98-118.

[15] Khanduja S.K., Saha J., A generalized fundamental principle, Mathematika, 46 (1999) 83-92.

[16] Aghigh K., Khanduja S.K., On the main invariant of elements algebraic over a Henselian valued field, Proc. Edinb. Math. Soc., 45 (2002) no. 1, 219-227.

[17] Brown R., Merzel J.L., Invariants of defectless irreducible polynomials, J. Algebra Appl., 9 (2010) no. 4, 603-631.

[18] Aghigh K., Nikseresht A., Characterizing distinguished pairs by using liftings of irreducible polynomials, Canad. Math. Bull., 58 (2015) no. 2, 225-232.

[19] Aghigh K., Nikseresht A., Constructing complete distinguished chains with given invariants, J. Algebra Appl., 14 (2015) no. 3, 1550026, 10 pp.