

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره چهل و هفتم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

تقریب منحنی‌های انتقال معادله دیفرانسیل متیو با دو مشتق کسری

حجت قربانی^۱، یعقوب محمودی^{۲*}، فرهاد دستمالچی ساعی^۳، محمد جهانگیری راد^۴

(^۱و^۳و^۴) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۱۴

چکیده

معادله دیفرانسیل متیو یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم می‌باشد که در مدل‌بندی بسیاری از مسائل در ریاضی کاربردی و مهندسی ظاهر می‌شود. بسیاری از نوسانگرهای مسطح به شکل معادله دیفرانسیل متیو مدل‌بندی می‌شوند. یکی از مهمترین مطالعات در معادله متیو بررسی منحنی‌های انتقال و رفتار پایداری جواب است. در این مقاله معادله دیفرانسیل متیوی خطی با دو مشتق کسری از نوع کاپوتو مطالعه شده است. در صفحه پارامترهای معادله منحنی‌های انتقال که مرز ناحیه پایداری و ناپایداری را از هم جدا می‌کنند با استفاده از روش موازنه هارمونیک تقریب شده‌اند. نمودار تغییرات پارامترها جهت رسیدن به ناپایداری ترسیم شده است. در مورد پیدا کردن مقدار بهینه مرتبه مشتقات کسری برای رسیدن به بیشترین دامنه جهت شروع ناپایداری بحث شده است. نتایج نشان می‌دهد که اگر مشتقات معادله دیفرانسیل متیو را به مشتق مرتبه صحیح تبدیل کنیم، معادلات حاصل از این روش با نتایج بدست آمده در سایر متون منطبق است.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل متیو، مشتق کسری کاپوتو، منحنی انتقال، روش موازنه هارمونیک.

۱- مقدمه

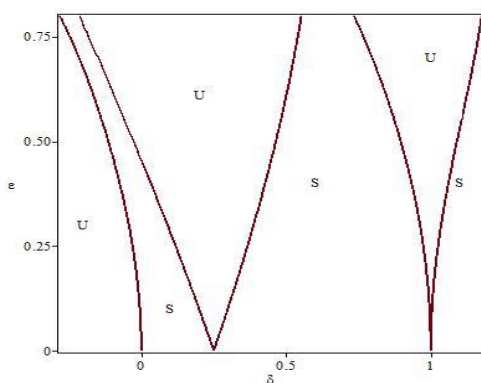
معادله متیو یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دو خطی همگن با ضرایب متناوب می‌باشد که اولین بار توسط لئونارد متیو (۱۸۶۸) معرفی شد. شکل استاندارد معادله متیو بصورت زیر است.

$$x'' + (\delta + \epsilon \cos \cos t)x = 0, \quad (1)$$

که در آن ثابت‌های δ و ϵ به ترتیب عدد و پارامتر مشخصه معادله متیو نامیده می‌شوند. این معادله در مسائل مختلفی از فیزیک، مهندسی و صنعت از جمله در ثبات کشتی‌های شناور و قطارهای راه آهن، حرکت ذره‌های باردار در تله‌های الکترومغناطیسی پاول، نظریه سنسورهای اینرسی و بسیاری از مسائل دیگر ظاهر می‌شود [۱-۶]. جواب معادله دیفرانسیل متیو رفتار بسیاری از مسائل فیزیکی را مشخص می‌کند و به همین دلیل موضوع بسیاری از مقالات در متون مختلف علمی است که از آن جمله می‌توان به [۷-۱۷] اشاره کرد. در بسیاری از مسائل متناظر با معادله دیفرانسیل متیو، مسئله اساسی تعیین شرایطی است که تحت آن شرایط جواب معادله متیو با گذشت زمان کراندار باقی بماند و یا اینکه بصورت بیکران رشد کند. جواب این سوال توسط نمودارهایی در صفحه $\delta - \epsilon$ داده می‌شود که اصطلاحاً آنها را منحنی‌های انتقال می‌نامند. این منحنی‌ها صفحه $\delta - \epsilon$ را به دو ناحیه متناظر با پایداری (S) و ناپایداری (U) تقسیم می‌کنند.

نمودار منحنی‌های انتقال با روش‌های ریاضی مختلفی قابل محاسبه هستند که از آن جمله به روش‌های لیاپانوف، تبدیلات فلوکت، روش موازنه هارمونیک و تکنیک آشفتگی می‌توان اشاره کرد.

در معادله (۱) اگر $\epsilon = 0$ ، نوسانگر ساده هارمونیک بدست می‌آید. فرکانس طبیعی این نوسانگر برابر است با $\omega_0 = \sqrt{\delta}$. این نوسانگر در اطراف نقطه تعادل خود $x = 0$ ، نوسان‌های آزاد را انجام می‌دهد. در صورتیکه $\epsilon \neq 0$ ، نوسان‌ها می‌تواند کراندار (پایدار) یا بیکران (ناپایدار) باشد که توسط منحنی‌های انتقال در صفحه $\delta - \epsilon$ ترسیم می‌شود.



شکل ۱ نمودار منحنی‌های انتقال و نواحی پایداری و ناپایداری معادله متیوی استاندارد

در مرجع [۱] نشان داده شده است که روی محور δ در صفحه $\varepsilon - \delta$ ، در نقاط $\delta = \frac{n^2}{4}$ برای $n = 1, 2, 3, \dots$ زبانه‌های منحنی‌های انتقال شروع می‌شوند و صفحه $\varepsilon - \delta$ را به دو ناحیه پایداری و ناپایداری تقسیم می‌کنند (شکل ۱ را ببینید).

زبانه ای که به ازای $\delta = \frac{1}{4}$ شروع می‌شود دارای اهمیت زیادی است. با استفاده از روش آشفته‌گی معادله منحنی انتقال معادله متیوی (۱) در [۱] بصورت زیر بدست آمده است.

$$\delta = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (۲)$$

همچنین یک زبانه دیگر وجود دارد که از مبدا مختصات در صفحه $\varepsilon - \delta$ رسم می‌شود و معادله آن در [۱] بصورت زیر بدست آمده است.

$$\delta = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{7}{32} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6). \quad (۳)$$

با افزودن عامل میرایی، معادله متیوی میرای زیر بدست می‌آید.

$$x'' + cx' + (\delta + \varepsilon \cos t)x = 0. \quad (۴)$$

با اضافه شده عامل میرایی ($c \neq 0$) در معادله متیوی میرا، زبانه‌ها از محور δ جدا می‌شوند و یک نقطه مینیمم برای شروع ناپایداری در جواب پیش می‌آید. منحنی انتقال زبانه ای که نزدیک نقطه $\delta = \frac{1}{4}$ می‌باشد بصورت زیر محاسبه شده است [۱].

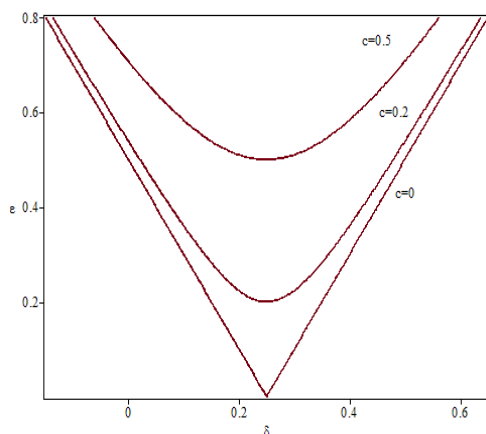
$$\delta = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 - c^2} + O(\varepsilon^3). \quad (۵)$$

شکل ۲ را در این خصوص ببینید.

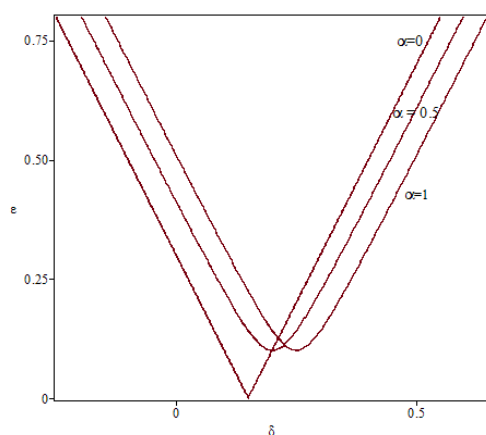
با اضافه شدن مشتق کسری به معادله متیو، معادله متیوی کسری زیر حاصل می‌شود.

$$x'' + cD^\alpha x + (\delta + \varepsilon \cos t)x = 0. \quad (۶)$$

که در آن $D^\alpha x$ نشان دهنده مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $0 < \alpha \leq 1$ می‌باشد [۱۸-۲۰]. در [۹]



شکل ۲ نمودار منحنی های انتقال ($n = 1$) معادله متیوی میرا به ازای مقادیر مختلف c .



شکل ۳ نمودار منحنی های انتقال ($n = 1$) معادله متیوی کسری به ازای مقادیر مختلف α ($c = 0.1$)

معادله منحنی انتقال متناظر با زبانه $\delta = \frac{1}{4}$ با استفاده از روش موازنه هارمونیک بصورت زیر بدست آمده است.

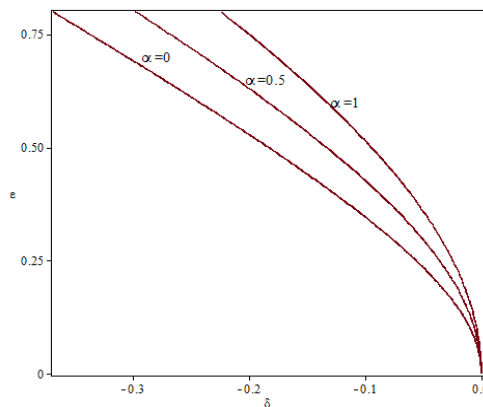
$$\delta = \frac{1}{4} - \frac{c}{2^\alpha} \cos \cos \frac{\alpha\pi}{2} \pm \frac{\sqrt{2^{2\alpha} \epsilon^2 - 4c^2 \sin^2 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}}}{2^{\alpha+1}}. \quad (7)$$

اگر در رابطه (۷) $\alpha = 1$ قرار داده شود به معادله انتقال (۵) برای معادله متیوی میرا با مشتق صحیح می‌رسیم. شکل ۳ نمودار منحنی های انتقال معادله متیوی کسری را برای مقادیر مختلف α نشان می‌دهد.

در مرجع [۹] معادله منحنی انتقال متناظر با زبانه‌ای که از مبدا می‌گذرد برای معادله (۶) بصورت زیر محاسبه شده است.

$$\begin{aligned} & (Kc-1)\varepsilon^2 \\ & +(\varepsilon^2-2c^2+4Kc-2)\delta \\ & +4(1-Kc)\delta^2-2\delta^3=0, \end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن $K = \cos \frac{\alpha\pi}{2}$. شکل ۴ نمودار این منحنی انتقال را برای مقادیر مختلف α نشان می‌دهد.



شکل ۴ نمودار منحنی‌های انتقال ($n = 0$) معادله متیوی کسری به ازای مقادیر مختلف α ($c = 0.5$)

۲- معادله متیو با دو مشتق کسری

در این بخش معادله متیوی کسری زیر را در نظر می‌گیریم

$$D^\beta x + cD^\alpha x + (\delta + \varepsilon \cos t)x = 0. \quad (۹)$$

که در آن $1 < \beta \leq 2$ و $0 < \alpha \leq 1$. هم‌نشان دهنده مشتقات کسری x در مفهوم کاپوتو هستند. در این بخش با استفاده از روش موازنه هارمونیک معادله منحنی‌های انتقال را برای (۹) بدست می‌آوریم. با استفاده از قضیه می‌دانیم که روی منحنی انتقال جواب‌های متناوبی برای (۹) با دوره تناوب π و 2π وجود دارد. بنابراین برای بدست آوردن تقریبی برای منحنی انتقال متناظر با $n=1$ ، جواب معادله (۹) را بصورت بسط سری فوریه زیر در نظر می‌گیریم

$$x(t) = A \cos \frac{t}{2} + B \sin \frac{t}{2} + \dots \quad (۱۰)$$

در اینجا $D^\beta x$ را برای $1 < \beta \leq 2$ محاسبه می‌کنیم. با استفاده از تعریف مشتق کسری داریم

$$\begin{aligned}
 D^\beta x(t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t (t-v)^{1-\beta} x''(v) dv \\
 &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t v^{1-\beta} x''(t-v) dv
 \end{aligned} \tag{۱۱}$$

با محاسبه مشتق دوم از (۱۰) و جایگذاری در (۱۱) داریم

$$\begin{aligned}
 D^\beta x(t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t v^{1-\beta} \\
 &\times \left[-\frac{A}{4} \cos \frac{t-v}{2} - \frac{B}{4} \sin \frac{t-v}{2} \right] dv
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

با استفاده از اتحاد‌های مثلثاتی زیر

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{t-v}{2} &= \cos \frac{t}{2} \cos \frac{v}{2} + \sin \frac{t}{2} \sin \frac{v}{2} \\
 \sin \frac{t-v}{2} &= \sin \frac{t}{2} \cos \frac{v}{2} - \cos \frac{t}{2} \sin \frac{v}{2}
 \end{aligned}$$

با فرض $\frac{v}{2} = w$, $dv = 2dw$ داریم

$$\begin{aligned}
 D^\beta x(t) &= -\frac{1}{2^\beta \Gamma(2-\beta)} \\
 &\times \left[\cos \frac{t}{2} (A\bar{I}_c - B\bar{I}_s) + \sin \frac{t}{2} (A\bar{I}_s + B\bar{I}_c) \right]
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

که در آن

$$\bar{I}_c = \int_0^{\frac{t}{2}} w^{1-\beta} \cos w dw$$

$$\bar{I}_s = \int_0^{\frac{t}{2}} w^{1-\beta} \sin w \, dw$$

هر چند که انتگرال‌های فوق برای مقدار دلخواه t به فرم بسته قابل حل نیستند ولی برای $t \rightarrow \infty$ حد آنها با استفاده از تبدیل لاپلاس بصورت زیر محاسبه می‌شود [۹].

$$\begin{aligned} \bar{I}_c &= \int_0^{\infty} w^{1-\beta} \cos w \, dw \\ &= -\Gamma(2-\beta) \cos \frac{\beta\pi}{2}, \end{aligned} \tag{۱۴}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_s &= \int_0^{\infty} w^{1-\beta} \sin w \, dw \\ &= \Gamma(2-\beta) \sin \frac{\beta\pi}{2}. \end{aligned}$$

بنابراین برای مقادیر بزرگ t از (۱۳) و (۱۴) فرمول مشتق کسری $D^\beta x$ را بصورت زیر داریم

$$\begin{aligned} D^\beta x(t) &= \\ &= -\frac{1}{2^\beta} \cos \frac{t}{2} \left(-A \cos \frac{\beta\pi}{2} - B \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2^\beta} \sin \frac{t}{2} \left(A \sin \frac{\beta\pi}{2} - B \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \end{aligned} \tag{۱۵}$$

بدون وارد شدن به جزئیات بطور مشابه برای $D^\beta x$ داریم [۹]

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= \\ &= \frac{1}{2^\alpha} \cos \frac{t}{2} \left(B \sin \frac{\alpha\pi}{2} + A \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^\alpha} \sin \frac{t}{2} \left(-A \sin \frac{\alpha\pi}{2} + B \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

حال با جاگذاری (۱۰)، (۱۵) و (۱۶) در معادله (۹) با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و با فاکتورگیری و مرتب کردن عبارت فوق و با صرفنظر کردن از عامل‌های تشدید فرکانس $\cos \frac{3t}{2}$ و $\sin \frac{3t}{2}$ و مساوی صفر قرار دادن ضرایب $\sin \frac{3t}{2}$ و $\cos \frac{3t}{2}$ به دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} \left(\delta + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2^\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} + \frac{c}{2^\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) A \\ \quad + \left(\frac{1}{2^\beta} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \frac{c}{2^\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) B = 0 \\ \left(-\frac{1}{2^\beta} \sin \frac{\beta\pi}{2} - \frac{c}{2^\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) A \\ \quad + \left(\delta - \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2^\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} + \frac{c}{2^\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) B = 0 \end{cases} \quad (17)$$

برای وجود جواب غیر بدیهی برای A و B باید دترمینان ضرایب برابر صفر شود که با مرتب کردن آن بر حسب δ به معادله درجه دوم زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} & \delta^2 + 2 \left(\frac{1}{2^\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} + \frac{c}{2^\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) \delta \\ & + \left(\frac{1}{2^\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} + \frac{c}{2^\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2 \\ & + \left(\frac{1}{2^\beta} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \frac{c}{2^\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2 - \frac{\epsilon^2}{4} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

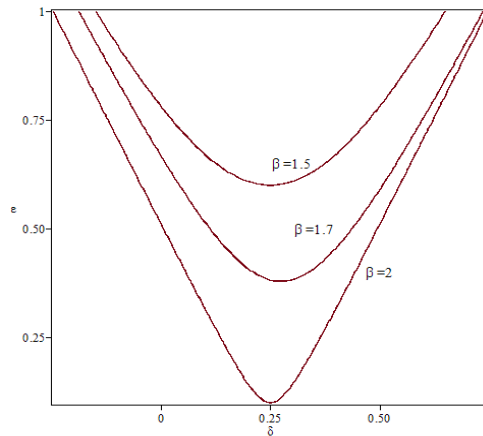
در نتیجه ریشه‌های این معادله به شکل زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} \delta = & - \left(\frac{1}{2^\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} + \frac{c}{2^\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) \\ & \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} - \left(\frac{1}{2^\beta} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \frac{c}{2^\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

این معادله، منحنی انتقال پایداری معادله دیفرانسیل متیوی کسری (۹) است که به ازای $n=1$ محاسبه شده‌است. برای تست درستی محاسبات قرار می‌دهیم $\alpha=1$ و $\beta=2$ در اینصورت منحنی انتقال به شکل زیر در می‌آید

$$\delta = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 - c^2},$$

که همان منحنی انتقالی است که برای معادله متیوی میرای (۴) در رابطه (۵) بدست آمده است. در شکل های ۵ و ۶ نمودار منحنی های انتقال (۱۹) را برای مقادیر مختلف α و β ترسیم کرده‌ایم.

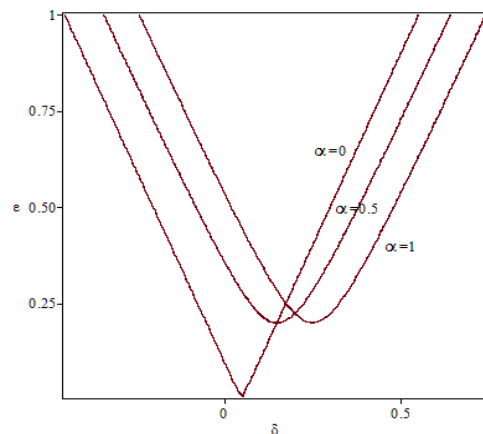


شکل ۵ نمودار منحنی های انتقال ($n = 1$) معادله متیو با دو مشتق کسری به ازای مقادیر مختلف β ($c = 0.1, \alpha = 1$)

برای بدست آوردن تقریبی از منحنی انتقال $n = 0$ که از مبدا مختصات در صفحه $\varepsilon - \delta$ عبور می‌کند، با تقریب

$$x(t) = G + A \cos t + B \sin t + \dots \quad (20)$$

شروع می‌کنیم. ابتدا مشتق کسری $D^\beta x(t)$ را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم



شکل ۶ نمودار منحنی های انتقال ($n = 1$) معادله متیو با دو مشتق کسری به ازای مقادیر مختلف α ($c = 0.2, \beta = 2$)

$$D^{\beta} x(t) = \cos t (-A\bar{I}_c + B\bar{I}_s) + \sin t (-A\bar{I}_s - B\bar{I}_c) \quad (21)$$

که در آن \bar{I}_c و \bar{I}_s در رابطه (۱۴) معرفی شدند. با جایگذاری از رابطه (۱۴) در (۲۱) و ساده‌سازی داریم

$$D^{\beta} x(t) = \cos t \left(A \cos \frac{\beta\pi}{2} + B \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sin t \left(-A \sin \frac{\beta\pi}{2} + B \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \quad (22)$$

به همین ترتیب مشتق کسری $D^{\alpha} x(t)$ هم به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$D^{\alpha} x(t) = \cos t \left(A \cos \frac{\alpha\pi}{2} + B \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) + \sin t \left(-A \sin \frac{\alpha\pi}{2} + B \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) \quad (23)$$

با جایگذاری (۲۰)، (۲۲) و (۲۳) در معادله (۹) و حذف عوامل $\sin 2t$ و $\cos 2t$ و همچنین ساده‌سازی به یک دستگاه سه معادله سه مجهولی از مجهول‌های A ، B و G بصورت زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \epsilon A + \delta G = 0, \\ \left(\delta + \cos \frac{\beta\pi}{2} + c \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) A + \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} + c \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) B + \epsilon G = 0, \\ - \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} + c \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) A + \left(\delta + \cos \frac{\beta\pi}{2} + c \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) B = 0, \end{cases} \quad (24)$$

برای وجود جواب غیر صفر برای دستگاه (۲۴) باید دترمینان ضرایب برابر صفر باشد. پس از تشکیل دترمینان ضرایب و ساده‌سازی آن بر حسب δ به یک معادله درجه سوم به شکل زیر می‌رسیم.

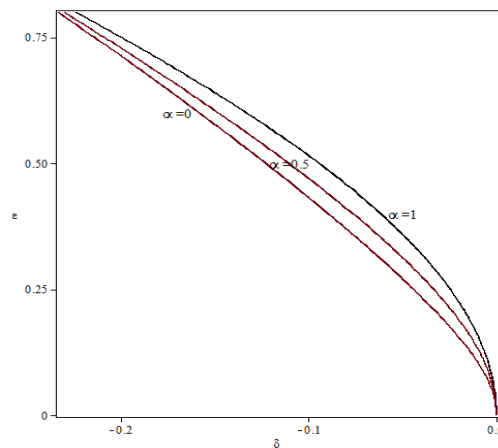
$$\begin{aligned} & (K_2 + cK_1)\varepsilon^2 + \\ & (\varepsilon^2 - 2 - 2c^2 - 4cK_2K_1 - 4cS_2S_1)\delta \\ & + (-4K_2 - 4cK_1)\delta^2 - 2\delta^3 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{که در آن } S_2 = \sin \frac{\beta\pi}{2}, S_1 = \sin \frac{\alpha\pi}{2}, K_2 = \cos \frac{\beta\pi}{2}, K_1 = \cos \frac{\alpha\pi}{2}$$

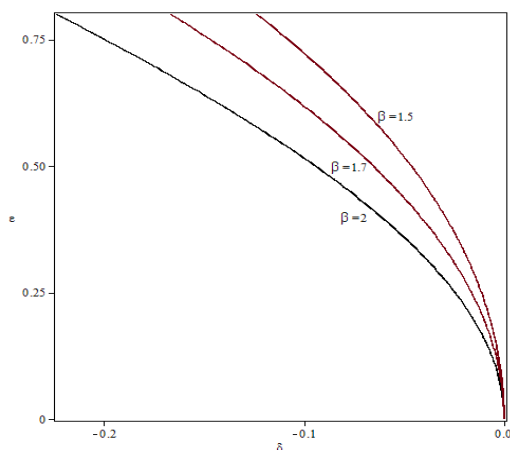
معادله (۲۵) منحنی انتقال معادله متیوی (۹) می‌باشد که از مبدا مختصات عبور می‌کند. در شکل های ۵ و ۶ نمودار این منحنی برای مقادیر مختلف α و β رسم شده است. با فرض $\beta = 2$ ، معادله (۲۵) به معادله (۸) تبدیل می‌شود که همان منحنی انتقال متناظر با معادله متیوی (۶) با یک مشتق کسری می‌باشد. در شکل های ۷ و ۸ نمودار منحنی‌های انتقال ($n = 0$) برای مقادیر مختلف α و β ترسیم شده است.

برای منحنی‌های انتقال $n = 1$ در معادله (۱۹)، مشاهده می‌کنیم که تغییر در مقدار α و β مرتبه مشتقات کسری، شکل و موقعیت منحنی‌های انتقال را تحت تاثیر قرار می‌دهد. منحنی‌های انتقال را می‌توان از نظر کمترین مقدار ε که باعث ایجاد ناپایداری می‌شود مورد بررسی قرار داد. برای α و β داده شده کمترین مقدار ε را با ε_{\min} نشان می‌دهیم. برای بدست آوردن مقدار ε_{\min} ، از معادله (۱۹) نسبت به ε مشتق گرفته و نقطه مینیمم را برای ε با مساوی صفر قرار دادن مشتق بصورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon_{\min} = 2 \left(\frac{1}{2^\beta} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \frac{c}{2^\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right). \quad (26)$$



شکل ۷ نمودار منحنی‌های انتقال ($n = 0$) معادله متیو با دو مشتق کسری به ازای مقادیر مختلف α ($c = 0.5, \beta = 2$)

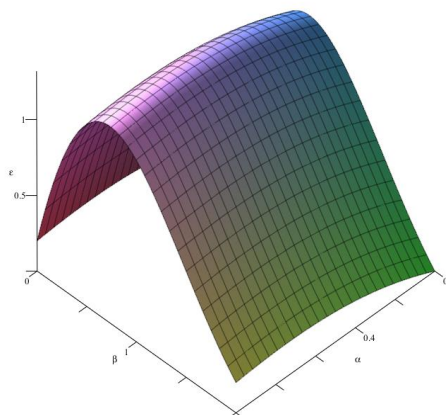


شکل ۸ نمودار منحنی‌های انتقال ($n = 0$) معادله متیو با دو مشتق کسری به ازای مقادیر مختلف β ($c = 0.5, \alpha = 1$)

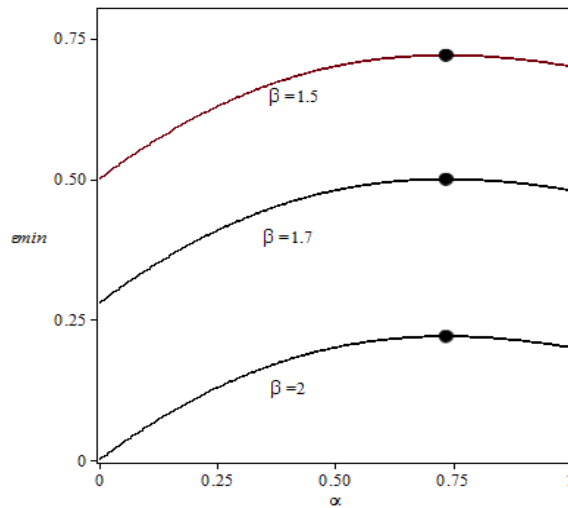
در شکل ۹ نمودار ϵ_{\min} را بعنوان توابعی از β و α رسم کرده‌ایم. بیشترین تاثیر زمانی اتفاق می‌افتد که مقدار ϵ_{\min} در دامنه تغییرات $0 < \alpha \leq 1$ و $1 < \beta \leq 2$ بیشترین مقدار را داشته باشد. اگر این مقدار به ازای مقادیر α^* و β^* بدست آید، برای پیدا کردن مقادیر α^* و β^* از ϵ_{\min} در معادله (۲۶) نسبت به α و β مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم. نتیجه بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\alpha^* = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{\pi}{2 \ln 2} \approx 0.735439$$

$$\beta^* = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{\pi}{2 \ln 2} \approx 0.735439$$
(۲۷)



شکل ۹ نمودار $\epsilon - \alpha - \beta$ برای $c = 0.2$



شکل ۱۰ نمودار ε_{\min} و نقاط ماکزیمم که با نقطه پر رنگ نمایش داده شده اند ($c = 0.2$)

چون β^* در دامنه تغییرات β قرار ندارد با توجه به شکل ۹ نتیجه می‌گیریم که برای مقادیر β نزدیک به ۱ برای ε_{\min} مقادیر بیشتری حاصل می‌شود. در شکل ۱۰ نمودار ε_{\min} و نقاط ماکزیمم را به ازای مقادیر مختلف β رسم کرده‌ایم.

اگر مقدار متناظر ε_{\min} را برای α^* و مقادیر دلخواه β با $\varepsilon_{\min}^*(\beta)$ نشان دهیم، با جایگذاری در (۲۶) می‌توان مقادیر بهینه را برای $c = 0.2$ و چند مقدار متفاوت β بصورت زیر بدست آورد.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\min}^*(1.5) &= 0.719805, \\ \varepsilon_{\min}^*(1.7) &= 0.499269, \\ \varepsilon_{\min}^*(2) &= 0.219805.\end{aligned}\tag{۲۸}$$

۳- بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق معادله دیفرانسیل کسری متیو با دو مشتق کسری از نوع کاپوتو مورد مطالعه قرار گرفت. منحنی‌های انتقال که مرز ناحیه پایداری و ناپایداری را از هم جدا می‌کنند برای این معادله با استفاده از روش موازنه هارمونیک تقریب شدند. نتایج حاصل برای مشتقات مرتبه صحیح بر نتایج متون قبلی منطبق است. برای هر مرتبه از مشتق کسری کمترین دامنه پارامتر معادله را که ناپایداری به ازای آن شروع می‌شود را پیدا کردیم. همچنین مقدار بهینه برای مرتبه مشتقات نسبی پیدا کردیم که باعث ایجاد بالاترین دامنه پارامتر مسئله و در نتیجه افزایش دامنه شروع ناپایداری می‌شود.

فهرست منابع

- [۱] Rand R.H., Lecture notes on nonlinear vibrations (version ۰۲), Available from <http://audiophile.tam.cornell.edu/randdocs/>, ۲۰۰۷.
- [۲] Stoker J.J., Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. New York, Wiley, ۱۹۵۰.
- [۳] Galucio A.C., Deu J.F., Ohayon R., Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators, *Computer Mechanics*, ۳۳ (۲۰۰۴) ۲۸۲–۲۹۱.
- [۴] Naber M., Linear fractionally damped oscillator, *International Journal of Differential Equations*, (۲۰۱۰), doi:۱۰.۱۱۵۵/۲۰۱۰/۱۹۷۰۲۰. Article ID ۱۹۷۰۲۰
- [۵] Petras I., A note on the fractional-order Volta's system. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, ۱۵ (۲۰۱۰) ۳۸۴–۳۹۳.
- [۶] Meral F.C., Royston T.J., Magin R., Fractional calculus in viscoelasticity: an experimental study. *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul.* ۱۵ (۲۰۱۰) ۹۳۹–۹۴۵.
- [۷] Morrison T.M., Rand R.H., ۱/۲ resonance in the delayed nonlinear Mathieu equation, *Nonlinear Dyn.*, ۵۰ (۲۰۰۷) ۳۴۱–۳۵۲.
- [۸] Bobryk R.V., Chrzyszczuk A., Stability regions for Mathieu equation with imperfect periodicity. *Physics Letters A*, ۳۷۳(۳۹) (۲۰۰۹) ۳۵۳۲–۳۵۳۵, <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.07.069>
- [۹] Rand R.H., Sah S.M., Suchorsky M.K., Fractional Mathieu equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, ۱۵ (۲۰۱۰) ۳۲۵۴–۳۲۶۲.
- [۱۰] Najafi H., Mirshafaei S., Toroqi E., An approximate solution of the Mathieu fractional equation by using the generalized differential transform method (GDTM), *Applications and Applied Mathematics*, ۷(۱) (۲۰۱۲) ۳۴۷–۳۸۴.
- [۱۱] Abdelhalim E., Elsayed D.M., Aljoufi M.D., Fractional calculus model for damped Mathieu equation: Approximate analytical solution. *Applied Mathematical Science*, ۶(۸۲) (۲۰۱۲) ۴۰۷۵–۴۰۸۰.
- [۱۲] Wen S., Shen Y., Li X., Yang S., Dynamical analysis of Mathieu equation with two kinds of van der Pol fractional-order terms. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, ۸۴ (۲۰۱۶) ۱۳۰–۱۳۸, <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.05.001>
- [۱۳] Kovacic I., Rand R., Sah S.M., Mathieu's equation and its generalizations: overview of stability charts and their features. *Applied Mechanics Reviews*, ۷۰(۲) (۲۰۱۸) ۰۲۰۸۰۲, <https://doi.org/10.1115/1.4039144>
- [۱۴] Eugene I. Butikov, Analytical expressions for stability regions in the Ince–Strutt diagram of Mathieu equation, *American Journal of Physics*, ۸۶ (۲۰۱۸) ۲۵۷, doi: ۱۰.۱۱۱۹/۱.۵۰۲۱۸۹۵

- [۱۵] Wilkinson S.A., Vogt N., Golubev D.S., Cole J.H., Approximate solutions to Mathieu's equation. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, ۱۰۰ (۲۰۱۸) ۲۴-۳۰, <https://doi.org/10.1016/j.physe.2018.02.019>
- [۱۶] Pirmohabbati P., Sheikhan A.R., Najafi H.S., Ziabari A.A., Numerical solution of fractional mathieu equations by using block-pulse wavelets. *Journal of Ocean Engineering and Science*, ۴(۴) (۲۰۱۹) ۲۹۹-۳۰۷, <https://doi.org/10.1016/j.joes.2019.05.005>
- [۱۷] Ghorbani H., Mahmoudi Y., Saei F.D., *Numerical Study of Fractional Mathieu Differential Equation Using Radial Basis Functions*, *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, ۷(۴) (۲۰۲۰) ۵۶۸-۵۷۶.
- [۱۸] Oldham K.B., Spanier J., *The fractional calculus*, New York, Academic Press, ۱۹۷۴.
- [۱۹] Podlubny I., *Fractional differential equations*, San Diego, Academic Press, ۱۹۹۰.
- [۲۰] Miller K., Ross B., *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York, Wiley, ۱۹۹۳.

