

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

توابع برخه ریخت چند ارز مرتبط با تابع میتاگ-لفلر بر اساس ضرب پیچشی

محمد رضا فروتن*

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۲۴

چکیده

تابع میتاگ لفلر اولین بار توسط میتاگ لفلر برای مجموع سری‌های واگرا معرفی شد. در چهار دهه‌ی اخیر این تابع با توجه به پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری، کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف علوم مدرن داشته است. بعلاوه این تابع در حل برخی از مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی از نوع ولترا کاربرد گسترده‌ای دارد. با توجه به پتانسیلی که توابع میتاگ لفلر در حل مسائل کاربردی مانند جریان سیال، بیولوژیک، شبکه‌های الکتریکی، احتمال و نظریه توزیع آماری دارد این تابع مورد توجه فراوان مهندسان و دانشمندان قرار گرفته است. در این مطالعه با استفاده از ضرب هادامارد بین توابع برخه ریخت و تابع تعمیم یافته‌ی میتاگ-لفلر یک عملگر خطی تعریف می‌شود که با استفاده از این عملگر یک زیر کلاس جدید از توابع برخه ریخت معرفی می‌گردد. همچنین برخی از خواص هندسی توابع برخه ریخت از قبیل نمایش انتگرالی، برآورد ضرایب، نقاط نهایی عملگر در ارتباط با توابع میتاگ-لفلر مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: توابع برخه ریخت، تابع میتاگ-لفلر، کران ضریب، نقطه‌ی نهایی، نمایش انتگرالی، ضرب پیچشی.

۱- مقدمه

رده‌ی توابع تحلیلی برخه‌ریخت چند ارز به شکل

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{+\infty} a_k z^k, p \in \mathbb{N} \quad (1)$$

که در دیسک یکه ی محذوف

$$\mathbb{U}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\} = \mathbb{U} \setminus \{0\},$$

تحلیلی باشند را با نماد $\sum p$ نمایش می‌دهیم. در اینجا $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی است. حاصلضرب هادامارد (یا ضرب پیچشی) توابع $f(z)$ به شکل (۱) و

$$g(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{+\infty} b_k z^k$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f * g)(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{+\infty} a_k b_k z^k = (g * f)(z).$$

تابع میتاگ-لفلر $F_\alpha(z)$ به ازای $z \in U^*$ را به شکل

$$F_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \alpha \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

در نظر می‌گیریم که در آن $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است. بررسی مطالعه‌ی جزئیات بیشتر به مراجع [۲]، [۳] و [۴] رجوع شود.

به ازای اعداد مختلط γ, β, α با شرایط $\gamma, \beta, \alpha \in \mathbb{C} \square \operatorname{Re}(\alpha) > 0$

$$\operatorname{Re}(c) > 0, \max\{0, \operatorname{Re}(c) - 1\} > 0,$$

سریواساوا^۱ و تومونسکی^۲ در مرجع [۶]، تابع تعمیم یافته‌ی میتاگ-لفلر را به شکل

$$\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\gamma, c}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\gamma)_{kc}}{\Gamma(k\alpha + \beta)k!} z^k, \quad (3)$$

معرفی کردند و ثابت کردند که تابع فوق، یک تابع تام روی صفحه‌ی مختلط $\mathbb{C}$ است. در ضمن نماد

$$(\gamma)_x = \frac{\Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(\gamma)} = \begin{cases} 1 & x = 0, \\ \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + x - 1) & x \neq 0, \end{cases}$$

همان نماد شناخته شده ی پوچهامر است.

مصطفی^۳ و آلف^۴ در مرجع [۵] یک تابع برخه‌ریخت به شکل زیر در نظر گرفتند:

$$\mathcal{H}_{\alpha, \beta, p}^{\gamma, c}(z) = z^{-p} \Gamma(\beta) \mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\gamma, c}(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{+\infty} B_{\beta, \gamma} z^k,$$

که

^۱ Srivastava

^۲ Tonorski

^۳ Mostafa

^۴ Aouf

$$B_{\beta,\gamma} = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+(k+p)c)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+(k+p)c)(k+p)!},$$

و به ازای $\Re(c) = 1$ و $\beta \neq 0$ قسمت حقیقی α مساوی صفر خواهد. مرجع [۱] را نیز مطالعه کنید.. حال عملگر

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta,p}^{\gamma,c} f(z) : \sum_p \rightarrow \sum_p$$

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta,p}^{\gamma,c} f(z) = (\mathcal{H}_{\alpha,\beta,p}^{\gamma,c} * f)(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{+\infty} B_{\beta,\gamma} a_k z^k, \quad (4)$$

را در نظر گرفته و یک زیر رده‌ی جدید از توابع برخه ریخت چند ارز را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta) = \left\{ f \in \sum_p : \left| \frac{\mathcal{M}^*(z) + b}{\lambda \mathcal{M}^*(z) - b + (1+\lambda)\sigma b} \right| < \theta \right\}, \quad (5)$$

که در آن $0 < \sigma \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$, q عددی زوج، $b = \frac{(p+q)!}{(p-1)!}$,

$$\mathcal{M}^*(z) = z^{p+q+1} \mathcal{M}_f^{(q+1)}(z)$$

9

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f^{(j)}(z) &:= (\mathcal{M}_{\alpha,\beta,p}^{\gamma,c} f(z))^{(j)} \\ &= (-1)^j \frac{(p+j-1)!}{(p-1)! z^{p+j}} + \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!}{(k-j)!} a_k z^{k-j}, \end{aligned} \quad (6)$$

مشتق مرتبه‌ی j -ام $\mathcal{M}_f^{(j)}$ است. از رابطه‌ی (۶) داریم:

$$cz \left(\mathcal{M}_{\alpha,\beta,p}^{\gamma,c} f(z) \right)' = \gamma \mathcal{M}_{\alpha,\beta,p}^{\gamma+1,c} f(z) - (\gamma + pc) \mathcal{M}_{\alpha,\beta,p}^{\gamma,c} f(z), \quad (c > 0), \quad (7)$$

9

$$cz \left(\mathcal{M}_{\alpha,\beta+1,p}^{\gamma,c} f(z) \right)' = \beta \mathcal{M}_{\alpha,\beta,p}^{\gamma,c} f(z) - (p\alpha + \beta) \mathcal{M}_{\alpha,\beta+1,p}^{\gamma,c} f(z), \quad (\alpha \neq 0). \quad (8)$$

بعلاوه، به ازای $\alpha = 0$ و $\gamma = c = 1$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{M}_{0,\beta,p}^{1,1} f(z) = f(z)$$

۲- نتایج اصلی

در این بخش یک کران ضرایب دقیق بررسی توابع متعلق به $\sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta)$ به دست می‌آوریم. به علاوه نقاط نهایی این زیر رده در این بخش معرفی خواهند شد.

قضیه ۱،۲. فرض کنیم $f \in \Sigma_p$ در این صورت $(\sigma, \lambda, \theta)$ اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1 + \lambda \theta)}{(k - q - 1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta}} a_k \leq \theta(1 + \lambda)b(1 - \sigma), \quad (9)$$

که در آن $0 < \sigma \leq 1$ ، $0 \leq \lambda \leq 1$ ، q عددی زوج، $b = \frac{(p+q)!}{(p-1)!}$ ،

$$\mathcal{J}_{\gamma, \beta} = \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma + (k + p)c),$$

و

$$\mathcal{L}_{\gamma, \beta} = \Gamma(\gamma) \Gamma(\beta + (k + p)c) (k + p)!.$$

رابطه‌ی (۹) به ازای تابع $F(z)$ که به صورت زیر ارایه شده، دقیق است.

$$F(z) = z^{-p} + \frac{\theta(1 + \lambda)b(1 - \sigma)(k - q - 1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta}}{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1 + \lambda \theta)} z^{k+q}, \quad (10)$$

اثبات: فرض کنیم $f \in \Sigma_M^b(\sigma, \lambda, \theta)$ ، در این صورت رابطه‌ی (۵) برقرار است. لذا با جایگذاری فرمول (۶) در رابطه‌ی (۵) داریم:

$$\left| \frac{\sum_{k=p}^{+\infty} A_{k,q} B_{\beta, \gamma} a_k z^{k+p}}{-\lambda b + \sum_{k=p}^{+\infty} \lambda A_{k,q} B_{\beta, \gamma} a_k z^{k+p} - b + (1 + \lambda) \sigma b} \right| < \theta,$$

که $A_{\beta, \gamma} = \frac{k!}{(k - q - 1)!}$ در نتیجه

$$\left| \frac{\sum_{k=p}^{+\infty} A_{k,q} B_{\beta, \gamma} a_k z^{k+p}}{(\lambda + 1)b(1 - \sigma) - \sum_{k=p}^{+\infty} \lambda A_{k,q} B_{\beta, \gamma} a_k z^{k+p}} \right| < \theta.$$

از آن جا که به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ ، $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ ، در نتیجه،

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\sum_{k=p}^{+\infty} A_{k,q} B_{\beta, \gamma} a_k z^{k+p}}{(\lambda + 1)b(1 - \sigma) - \sum_{k=p}^{+\infty} \lambda A_{k,q} B_{\beta, \gamma} a_k z^{k+p}} \right\} < \theta.$$

با میل دادن $z \rightarrow 1^-$ روی محور حقیقی، داریم:

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!(1+\lambda\theta)\mathcal{J}_{\gamma,\beta}}{(k-q-1)!\mathcal{L}_{\gamma,\beta}} a_k \leq \theta(1+\lambda)b(1-\sigma).$$

برعکس، فرض کنیم رابطه‌ی (۹) برقرار باشد. در این صورت کافی است نشان دهیم که

$$\mathcal{L} = \left| z^{p+q+1} \mathcal{M}_f^{(q+1)}(z) + b \right| - \theta \left| \lambda z^{p+q+1} \mathcal{M}_f^{(q+1)}(z) - b + (\lambda+1)\sigma b \right| < 0.$$

اما به ازای مقدار روج q و $1 < |z| = r < \infty$ داریم :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left| \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!\mathcal{J}_{\gamma,\beta}}{(k-q-1)!\mathcal{L}_{\gamma,\beta}} a_k z^{k+p} \right| - \theta \left| (\lambda+1)(1-\sigma) - \lambda \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!\mathcal{J}_{\gamma,\beta}}{(k-q-1)!\mathcal{L}_{\gamma,\beta}} a_k z^{k+p} \right| \\ &\leq \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!\mathcal{J}_{\gamma,\beta}(1+\lambda\theta)}{(k-q-1)!\mathcal{L}_{\gamma,\beta}} |a_k| r^{k+p} - \theta(\lambda+1)(1-\sigma). \end{aligned}$$

از آن جا که نامساوی فوق به ازای هر $1 < r < \infty$ برقرار است، با میل دادن $r \rightarrow 1^-$ و به کار بردن رابطه‌ی (۹) نتیجه می‌گیریم $\mathcal{L} \leq 0$. لذا اثبات تکمیل است

قضیه ۲،۲. فرض کنیم $f(z) = z^{-p}$ و به ازای $k \geq p$,

$$f_k(z) = z^{-p} + \frac{\theta(1+\lambda)b(1-\sigma)(k-q-1)!\mathcal{L}_{\gamma,\beta}}{k!\mathcal{J}_{\gamma,\beta}(1+\lambda\theta)} z^k.$$

در این صورت $f \in \sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta)$ اگر و تنها اگر f به شکل زیر قابل نمایش باشد:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k f_k(z),$$

که در آن $\delta_k \geq 0$ ، $(i = 1, 2, \dots, p-1)$ ، $\delta_k = 0$ و $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k = 1$ (به ویژه نقاط نهایی $\sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta)$)

توابع $f(z)$ و $f_k(z)$ ($k \geq p$) هستند.

اثبات: فرض کنیم

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k f_k(z),$$

در این صورت:

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{+\infty} \delta_k \frac{\theta(1+\lambda)b(1-\sigma)(k-q-1)!\mathcal{L}_{\gamma,\beta}}{k!\mathcal{J}_{\gamma,\beta}(1+\lambda\theta)} z^k.$$

از آن جا که

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1+\lambda\theta)}{\theta(\lambda+1)b(1-\sigma)(k-q-1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta}} \times \frac{\theta(\lambda+1)b(1-\sigma)(k-q-1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta}}{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1+\lambda\theta)} \delta_k$$

$$= \sum_{k=p}^{+\infty} \delta_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k = 1 - \delta_0 \leq 1,$$

لذا بنا به قضیه ۱، ۲،

$$f(z) \in \sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta).$$

برعکس، فرض کنیم $f(z) \in \sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta)$ در این صورت با جایگذاری

$$\delta_k = \frac{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1+\lambda\theta)}{\theta(1+\lambda)b(1-\sigma)(k-q-1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta}} a_k, \quad k \geq p,$$

خواهیم داشت:

$$\delta_0 = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k, \quad \delta_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p-1),$$

که نتیجه‌ی مورد نظر به دست می‌آید. لذا اثبات کامل خواهد شد.

۳- خواص هندسی $\sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta)$

در این بخش خاصیت حافظ ضرب پیچشی را بیان می‌کنیم. در ضمن نمایش انتگرالی $\mathcal{M}_f^{(q)}$ بر حسب اندازه‌ی احتمال معرفی خواهد شد.

قضیه ۱، ۳. اگر

$$g(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{+\infty} b_k z^k \quad \text{و} \quad f(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{+\infty} a_k z^k$$

متعلق به رده‌ی $\sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta)$ باشند، آنگاه $(f * g)(z)$ متعلق به رده‌ی $\sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta_0)$ است که

$$\theta_0 \geq \frac{1}{X - \lambda}, \quad (11)$$

9

$$X = \frac{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}}{(k-q-1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta} (1+\lambda)b(1-\sigma)} \left(\frac{1}{\theta} + \lambda \right)^2. \quad (12)$$

اثبات: از آن جا که $f(z)$ و $g(z)$ متعلق به رده $\sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta)$ هستند، لذا بنا به رابطه ی (۹) داریم:

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1 + \lambda \theta)}{(k - q - 1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta} \theta (1 + \lambda) b (1 - \sigma)} a_k \leq 1,$$

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1 + \lambda \theta)}{(k - q - 1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta} \theta (1 + \lambda) b (1 - \sigma)} b_k \leq 1,$$

بایستی کوچکترین مقدار θ را پیدا کنیم به طوری که،

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1 + \lambda \theta)}{(k - q - 1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta} \theta_0 (1 + \lambda) b (1 - \sigma)} a_k b_k \leq 1,$$

با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز داریم:

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1 + \lambda \theta)}{(k - q - 1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta} \theta (1 + \lambda) b (1 - \sigma)} \sqrt{a_k b_k} \leq 1, \quad (13)$$

کافی است نشان دهیم که

$$\frac{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1 + \lambda \theta)}{(k - q - 1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta} \theta_0 (1 + \lambda) b (1 - \sigma)} a_k b_k \leq \frac{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1 + \lambda \theta)}{(k - q - 1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta} \theta (1 + \lambda) b (1 - \sigma)} \sqrt{a_k b_k}.$$

یا به طور معادل کافی است نشان دهیم

$$\sqrt{a_k b_k} \leq \frac{\theta_0 (1 + \lambda \theta)}{\theta (1 + \lambda \theta_0)}.$$

اما بنا به رابطه ی (۱۳) کافی است نشان دهیم که،

$$\frac{(k - q - 1)! \mathcal{L}_{\gamma, \beta} \theta_0 (1 + \lambda) b (1 - \sigma)}{k! \mathcal{J}_{\gamma, \beta}(1 + \lambda \theta)} \leq \frac{\theta_0 (1 + \lambda \theta)}{\theta (1 + \lambda \theta_0)}.$$

بعد از محاسبه ی θ از نامساوی فوق، نتیجه ی موردنظر حاصل می شود. در نتیجه اثبات کامل است.

قضیه ۲، ۳. فرض کنیم $f \in \sum_{\mathcal{M}}^b(\sigma, \lambda, \theta)$ ، در این صورت

$$\mathcal{M}_f^{(q)}(z) = \int_0^z \frac{b[(1 + \lambda)\sigma - 1]\theta W(t) - 1}{(1 - \lambda\theta W(t))t^{p+q+1}} dt, \quad |w(z)| < 1,$$

$$\mathcal{M}_f^{(q)}(z) = z^{-p-q-1} \int_Y \frac{b[(1+\lambda)\sigma-1]\theta yz-1}{1-\lambda\theta yz} d\mu(y),$$

که $\mu(y)$ اندازه احتمال بوده و $Y = \{y: |y| = 1\}$.

اثبات: بنا به رابطه‌ی (۵) داریم:

$$\frac{z^{(p+q+1)}\mathcal{M}_f^{(q+1)}(z)+b}{\lambda z^{(p+q+1)}\mathcal{M}_f^{(q+1)}(z)-b+(1+\lambda)\sigma b} = \theta W(z), \quad |w(z)| < 1, \quad z \in U^*.$$

در نتیجه

$$\mathcal{M}_f^{(q+1)}(z) = \frac{b[(1+\lambda)\sigma-1]\theta W(z)-1}{z^{p+q+1}(1-\lambda\theta W(z))}.$$

بعد از انتگرال‌گیری از $\mathcal{M}_f^{(q+1)}(z)$ اولین نمایش انتگرالی حکم قضیه به دست می‌آید.

برای به دست آوردن نمایش انتگرال دوم، قرار می‌دهیم

$$Y = \{y: |y| = 1\}.$$

در نتیجه،

$$\frac{z^{p+q+1}\mathcal{M}_f^{(q+1)}(z)+b}{\lambda z^{p+q+1}\mathcal{M}_f^{(q+1)}(z)-b+(1+\lambda)\sigma b} = \theta yz.$$

بعد از یک محاسبه‌ی ساده نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

همواره تحقیق در مورد نظریه توابع تحلیلی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران بوده است. جواب تحلیلی بیشتر معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری بر حسب تابع میتاگ-لفلر بیان می‌شود. یک رده‌ی توانا از روش‌ها برای محاسبه‌ی توابع خاص و به ویژه ویژگی میتاگ-لفلر بر پایه‌ی ضرب هادامارد است. در این مقاله، با استفاده از ضرب هادامارد بین توابع برخه‌ریخت و تابع تعمیم یافته‌ی میتاگ-لفلر، یک عملگر خطی تعریف شد که با استفاده از این عملگر، یک زیر کلاس جدید از توابع برخه‌ریخت معرفی گردید. همچنین، با استفاده از توابع میتاگ-لفلر برخی از خواص هندسی توابع برخه‌ریخت از قبیل نمایش انتگرالی، برآورد ضرایب، نقاط نهایی عملگر مورد مطالعه قرار گرفت.

فهرست منابع

۱. M. K. Aouf and T. M. Seoudy, Some families of meromorphic p -valent functions involving new operators defined by generalized Mittag-Leffler function, J. Egyptian Math. Soc. vol. ۲۶, no. ۳, pp. ۴۰۶–۴۱۱, ۲۰۱۸.
۲. V. Kiryakova, Criteria for univalence of the Dziok-Srivastava and the Srivastava-Wright operators in the class A, Appl. Math. Comput. vol. ۲۱۸, no. ۳ pp. ۸۸۳–۸۹۲, ۲۰۱۱.
۳. G. M. Mittag-Leffler, Sur la nouvelle fonction $E(x)$, C. R. Acad. Sci. Paris vol. ۱۳۷, pp. ۵۵۴–۵۵۸, ۱۹۰۳.
۴. G. M. Mittag-Leffler, Sur la representation analytique d'une fonction monogene (cinquieme note). Acta Math. Vol. ۲۹, pp. ۱۰۱–۱۸۱, ۱۹۰۵.
۵. A. O. Mostafa and M.K. Aouf, Some inequalities for meromorphic multivalent functions associated with Mittag-Leffler function, Int. J. Open Problems Complex Analysis vol. ۱۰, no. ۱, pp. ۱–۸, ۲۰۱۸.
۶. H.M. Srivastava and Z. Tomovski, Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, Appl. Math. Comp. vol. ۲۱۱, pp. ۱۹۸–۲۱۰, ۲۰۰۹.