

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

روشی جدید برای پیدا کردن یک کران بهبودیافته روی مجموعه مستقل ماکسیمال و مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال در گراف گوی واحد

غلام‌حسن شیردل^{۱*}، مهدی جالینوسی^۲

^(۱ و ۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه قم، قم، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۰۹

چکیده

اندازه مجموعه مستقل ماکسیمال در یک گراف G را عدد استقلال می‌گوییم. اندازه مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال در گراف G را عدد احاطه‌گر همبند می‌گوییم. عدد استقلال را با $\alpha(G)$ و عدد احاطه‌گر همبند را با $\gamma_c(G)$ نمایش می‌دهیم. از طرف دیگر ارتباط بین اندازه مجموعه مستقل ماکسیمال و اندازه مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال در یک گراف G بسیار اهمیت دارد. هدف اصلی این مقاله بهبود بخشیدن به کران بالای عدد استقلال وابسته به عدد احاطه‌گر همبند برای یک گراف گوی واحد است. در این مقاله کران بالای عدد استقلال نسبت به مقاله‌های قبلی بهبود پیدا کرده است. بعلاوه ما کران بالای موجود تاکنون را بهبود داده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه احاطه‌گر همبند، عدد استقلال، گراف گوی واحد، مجموعه مستقل ماکسیمال، عدد احاطه‌گر همبند

۱- مقدمه

در یک منطقه کوهستانی یا زیر دریا معمولاً محیط مسطح نیست. در چنین شرایطی سنسورهای به کار رفته، یک شبکه سنسور بی‌سیم سه بعدی را تشکیل می‌دهند که این شبکه خاص دارای مدل ریاضی گراف گوی واحد^۲ می‌باشد. یک گراف گوی واحد دارای رئوسی می‌باشد که در فضای اقلیدسی سه بعدی قرار دارند. در این نوع گراف‌ها دو رأس u, v مجاور هستند اگر و تنها اگر فاصله بین دو رأس یعنی $d(u, v)$ حداکثر ۱ باشد.

بسیاری از الگوریتم‌های تقریب برای مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال (MCDS) در گراف‌های دیسک واحد (UDG) را می‌توان تا گراف گوی واحد (UBG) بسط و گسترش داد. مثل الگوریتم دو مرحله‌ای که در آن در مرحله اول یک مجموعه مستقل ماکسیمال (MIS) ساخته می‌شود و در مرحله دوم آن مجموعه مستقل ماکسیمال به یک مجموعه احاطه‌گر همبند (CDS) تبدیل می‌شود. از آنجا که در گراف گوی واحد به جای چینش دیسک، باید چینش کروی مطالعه گردد لذا تحلیل این تقریب‌ها کمی دشوارتر از تقریب‌های گراف دیسک واحد می‌باشد. مجموعه نقاط در صورتی مستقل می‌باشند که هر جفت از نقاط دارای فاصله‌ای بیش از ۱ باشد. یک زیرمجموعه S از V را مجموعه احاطه‌گر می‌گوییم اگر هر رأس از گراف G عضو S باشد یا با گره‌ای در S مجاور باشد. یک مجموعه احاطه‌گر را مجموعه احاطه‌گر همبند می‌گوییم اگر یک زیرگراف همبند القا کند. برای هر گره v از گراف گوی واحد G ناحیه همسایگی از v یک گوی با مرکز v و شعاع ۱ می‌باشد که با $ball_1^{(v)}$ نمایش می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر همبند اغلب به عنوان یک دکل مجازی در شبکه‌های حسگر بی‌سیم برای بهبود بخشیدن ارتباط و عملکرد ذخیره-سازی استفاده می‌شود. واضح است که یک دکل مجازی کوچکتر عملکرد بهتری دارد. با این حال محاسبه یک مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال NP -سخت می‌باشد. تلاش‌های بسیاری در این زمینه صورت گرفته است. از طرفی ارتباط بین اندازه مجموعه مستقل ماکسیمال و اندازه مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال در یک گراف G بسیار اهمیت دارد.

طرح سوال و کارهای گذشته:

چند نقطه مستقل می‌توان در یک دیسک به شعاع یک تصور کرد؟ محاسبه آن مربوط به گراف‌های دیسک واحد بوده و جواب ۵ است. احتمالاً جواب دادن به مسأله مشابه در فضای اقلیدسی سه بعدی آسان نباشد. سوال مشابه این است: چند تا نقطه مستقل را می‌توان روی یک گوی به شعاع یک تصور کرد؟

این سوال رابطه نزدیکی با مسأله معروفی دارد که در سال ۱۶۹۴ عنوان شد. [۱] در سال ۱۶۹۴ اسحاق نیوتن^۳ و دیوید گری^۴ در مورد مسأله تماس یا اتصال نزدیک در دانشگاه کمبریج^۵ بحث کردند. نیوتن ادعا داشت یک گوی واحد می‌تواند با حداکثر ۱۲ گوی هم اندازه خودش تماس شود. اما گری^۴ معتقد بود که احتمال تماس با ۱۳ گوی بیشتر است. پیرو این بحث مسأله معروف زیر مطرح شد:

مسأله گری-نیوتن:

آیا یک کره می‌تواند ۱۳ کره هم اندازه خودش را لمس کند؟

^۲ unit ball graphs

^۳ Issac Newton

^۴ David Gregory

^۵ Cambridge university

در سال ۱۸۷۴ هوپ^۶ [۱] به مسأله گرگوری-نیوتن جواب داد و ثابت کرد که یک کره می تواند حداکثر به ۱۲ کره هم اندازه خودش نزدیک شود و آن را لمس کند. نوع دیگری از بیان این مسأله این است که حداکثر ۱۲ کره واحد را می توان به کره ی واحدی مماس کرد به طوری که هیچ یک از ۱۲ کره با هم تماس نداشته باشند. پیامد دیگری از این مسأله این است که روی یک کره به شعاع واحد حداکثر ۱۲ نقطه مستقل می توان تصور کرد. به طور مثال یک ۲۰ وجهی را در نظر بگیرید که ۱۲ رأس دارد، فرض کنید a طول لبه آن و r شعاع کره محیط بر بیست وجهی باشد. در این صورت اگر ۱۳ کره به شعاع $\frac{r}{2}$ در مرکز و رؤوس بیست وجهی قرار گیرند آنگاه این ۱۲ کره واقع در ۱۲ نقطه با کره مرکزی مماس هستند. علاوه بر این؛ ۱۲ کره مماس فوق با یکدیگر هیچ تماسی ندارند. در واقع k نقطه مستقل را می توان روی گوی به شعاع ۱ قرار داد اگر و تنها اگر k کره هم اندازه بتوانند بر کره مرکزی مماس شوند و آن k کره با یکدیگر تماس نداشته باشند. بنابراین، به عنوان استنباطی از جواب مسأله گرگوری-نیوتن به راحتی می توان فهمید که حداکثر نقاط مستقلی که می توانند روی یک گوی به شعاع ۱ واقع شوند ۱۲ است.

کیم^۷ و همکارانش [۳] مسأله گرگوری-نیوتن را به دو کره تعمیم دادند. آنها نشان دادند که اگر مراکز دو کره به شعاع واحد، فاصله حداکثر ۱ از هم داشته باشند بر پوسته مرزی حاصل از آنها حداکثر ۲۰ نقطه مستقل می توان تصور کرد. به معنای دیگر بر پوسته حاصل از این دو کره واحد نمی توان بیش از ۲۰ کره مماس کرد. با توجه به اینکه به دست آمدن یک کران بالا غیربدیهی برای تعداد نقاط مستقلی که می توانند در پوسته این دو گوی قرار گیرند، کار آسانی نیست لذا یک مسأله باز جالب در عرصه ریاضی باقی می ماند.

۲- مسأله باز : روی پوسته مرزی دو گوی به شعاع ۱ و فاصله ی مرکزی حداکثر ۱، چند نقطه مستقل وجود دارد؟ [۱]

از آنجا که یک گوی به شعاع یک می تواند حداکثر ۱۲ نقطه مستقل داشته باشد و مرکز یک گوی مستقل از هر نقطه ای است که در گوی وجود ندارند، دو گوی با شعاع ۱ که فاصله ی مراکز آنها ۱ است دارای حداکثر ۲۳ نقطه مستقل هستند. هر کران بالای کمتر از ۲۳ غیربدیهی است. بسیاری از الگوریتم های تقریب در گراف های دیسک واحد را می توان به گراف های گوی واحد تعمیم داد. به ویژه PTAS (الگوریتم با تقریب زمانی چند جمله ای)^۸ برای $\text{MIN} - \text{CDS}$ در گراف های گوی واحد نیز وجود دارد.

قضیه ۱-۲: (هوپ) ([۱۳]) یک کره می تواند حداکثر ۱۲ کره هم اندازه را لمس کند یا بر آنها مماس باشد.

قضیه ۲-۲: (بوتنکو^۹ و اورسلنکو^{۱۰}) ([۲]) برای هر گراف گوی واحد G داریم :

$$\alpha(G) \leq 11\gamma_c(G) + 1$$

^۶ Hoppe

^۷ Kim

^۸ Polynomial Time Approximation Scheme

^۹ Butenko

^{۱۰} Ursulenko

قضیه ۳-۲: کیم و همکارانش ([۳]) کران بالای اندازه یک مجموعه مستقل ماکزیمال (MIS) در یک گراف گوی واحد (UDG) را بهبود بخشیدند. آنها نشان دادند که رابطه زیر برقرار است.

$$\alpha(G) \leq 1.017\gamma_c(G) + 1.083$$

قضیه ۴-۲: دکتر مژده و همکارانش [۴] ثابت کردند برای هر گراف گوی واحد رابطه زیر برقرار است:

$$\alpha(G) \leq 9.6207\gamma_c(G) + 10.3609$$

که این رابطه بهترین کران شناخته شده تاکنون است.

قضیه اصلی این مقاله ۵-۲: برای هر گراف گوی واحد رابطه زیر برقرار است:

$$\alpha(G) \leq 7.8590\gamma_c(G) + 8.4636$$

که نسبت به نتایج قبل بهبود پیدا کرده است.

فرض کنید دو گوی واحد با مراکز u و v به طوری که $d(u, v) = 1$ باشد مطابق شکل ۱(a) داریم و فرض کنید دو گوی با مراکز u و v و شعاع ۱.۵ مطابق شکل ۱(b) داریم. محاسبه مجموعه‌های مستقل ماکسیمال (MIS) در شکل ۱(a) معادل با پیدا کردن چینش حداکثری از گوی‌ها با شعاع ۰.۵ در شکل ۱(b) می‌باشد.

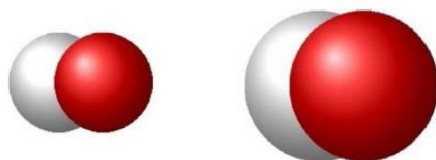
لم ۵-۲: ([۲۹]) فرض کنید S ناحیه پوشیده شده توسط گوی‌های موجود در شکل ۱(b) باشد. مقدار حجم S برابر با ۲۰.۹۴۳۹ می‌باشد.

برهان: در شکل ۱(b) اندازه حجم حاصل از دو گوی با شعاع ۱.۵ را با اندازه حجم حاصل از گوی‌ها با شعاع ۲ مقایسه می‌کنیم. مقدار S از انتگرال زیر به دست می‌آید:

$$V(S) = \frac{4\pi(2)^3}{3} - 8 \times \left[\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} dy dx - \int_0^2 \int_0^{\sqrt{(1.5)^2-(y-0.5)^2}} \sqrt{(1.5)^2-x^2-(y-0.5)^2} dx dy \right] = 20.9439$$

نتیجه ۶-۲: فرض کنید B_1 و B_2 دو گوی در شکل ۱(b) بوده و فرض کنید V_1 حجم حاصل از $B_1 - B_2$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$V_1 = 20.9439 - \frac{4\pi(1.5)^3}{3} = 6.8067$$



شکل (۱) b : دو گوی با شعاع 1.5 و a : دو گوی با شعاع 1

۳- اجسام افلاطونی

افلاطون در مکاتبات خود با تیمائوس در سال ۳۶۰ قبل از میلاد جهان را مبتنی بر چهار عنصر ارایه می‌کند و این عناصر را با چهار حجم هندسی نشان می‌دهد. جهان را نیز با یک دوازده وجهی منتظم که از دوازده تا پنج ضلعی منتظم تشکیل شده نمایش داد. این پنج حجم هندسی احجام افلاطونی نامیده می‌شوند.

تعریف ۱-۳: یک چندوجهی محدب جسم افلاطونی است، اگر و تنها اگر:

- (الف) همه وجه‌های آن چندضلعی‌های منتظم هم‌نهشت باشند.
 - (ب) هیچ‌کدام از وجه‌های آن با هم تلاقی نکنند، مگر در اضلاع آن.
 - (ج) تعداد یکسانی از وجه‌ها در هر یک از رأس‌ها به هم برسند.
- به مجموع وجه‌ها و ضلع‌هایی که در یک رأس به هم می‌رسند «هرم رأس» گفته می‌شود. منظور از هرم در اینجا یال هرم است و قاعده این هرم ممکن است مسطح نباشد. اگر مجموع زوایای بین ضلع‌هایی که در یک رأس به هم می‌رسند کمتر از 360° باشد، آن رأس «محدب» گفته می‌شود. برای اینکه یک چندوجهی محدب باشد، همه رئوس آن باید محدب باشند. حداقل تعداد وجه‌هایی که می‌توانند در یک ضلع به هم برسند تا تشکیل یک چندوجهی بدهند سه تا است.

شعاع، مساحت و حجم

همه اجسام افلاطونی، سه کره هم مرکز دارند :

- (الف) کره محیطی که از همه رأس‌ها عبور می‌کند،
 - (ب) کره میانی که بر همه اضلاع در نقطه وسط ضلع مماس است،
 - (ج) کره محاطی که بر همه وجه‌ها در مرکز وجه مماس است.
- شعاع این کره‌ها، «شعاع محیطی»، «شعاع میانی» و «شعاع محاطی» نامیده می‌شوند که به ترتیب برابر با فاصله مرکز چندوجهی از رأس‌ها، نقطه وسط اضلاع و مرکز وجه‌ها هستند. شعاع محیطی (R) و شعاع محاطی (r) برای چندوجهی $\{p, q\}$ با طول ضلع a از رابطه زیر به دست می‌آید که P تعداد اضلاع هر وجه و q تعداد وجه‌هایی است که در هر رأس به هم می‌رسند.

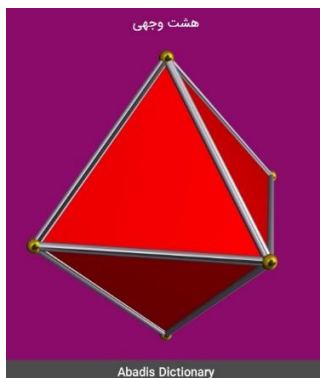
$$R = \left(\frac{a}{q}\right) \tan \frac{\pi}{q} \tan \frac{\theta}{2}$$

$$r = \left(\frac{a}{p}\right) \cot \frac{\pi}{p} \tan \frac{\theta}{2}$$

که θ ، زاویه دوسطحی است. مساحت سطح کل جسم (A) برای یک جسم افلاطونی $\{p, q\}$ به آسانی و با استفاده از ضرب تعداد وجه‌ها (F) در مساحت p ضلعی منتظم به دست می‌آید :

$$A = \left(\frac{a}{r}\right)^2 F p \cot \frac{\pi}{p}$$

حجم اجسام افلاطونی برابر است با حاصل ضرب F در حجم هرمی با قاعده p ضلعی منتظم و ارتفاع شعاع داخلی r

$$V = \frac{1}{3} rA$$


شکل (۲). ۸ وجهی منتظم محیط بر یک کره به شعاع 0.5

یک ۸ وجهی منتظم مطابق شکل (۲) را در نظر بگیرید. به ازای هر کره یک و تنها یک ۸ وجهی منتظم محیط بر آن وجود دارد. بدیهی است که این ۸ وجهی در ۸ نقطه بر کره مماس است. می‌خواهیم به جای کره با شعاع ۰.۵ از ۸ وجهی محیط بر آن استفاده می‌کنیم. لذا وقتی این کره‌ها به تعداد زیاد در حالت فشرده بر هم مماس باشند، ۸ وجهی‌های محیط بر آن نیز بر هم مماس هستند و هیچ حفره‌ای بین آنها وجود ندارد. حالت سه کره دو به دو مماس بر هم و ۸ وجهی‌های محیط بر آنها به سادگی قابل درک است.

لم ۱-۳: حجم ۸ وجهی محیط بر یک گوی به شعاع ۰.۵ معادل با ۰.۸۶۶۱ می‌باشد.
برهان:

در یک ۸ وجهی داریم:

$$(p, q) = (3, 4)$$

$$r = \left(\frac{a}{r}\right) \cot \frac{\pi}{p} \tan \frac{\theta}{r} \quad \text{داشته‌ایم}$$

$$\tan \frac{\theta}{r} = \sqrt{2} \quad \text{در مورد ۸ وجهی منتظم داریم}$$

$$V = \frac{1}{3} rA \quad \text{پس خواهیم داشت } a = 1.2249 \text{ و با توجه به فرمول } V = \frac{1}{3} rA \text{ خواهیم داشت } V = 0.8661$$

قضیه ۲-۳: در هر گراف گوی واحد همبند نامساوی زیر برقرار است:

$$\alpha(G) \leq 7.8590 \gamma_c(G) + 8.4636$$

برهان: حداکثر حجم ایجاد شده توسط تمام کره‌های به شعاع ۱.۵ را در نظر می‌گیریم و عدد حاصل را بر حجم ۸ وجهی منتظم محیط بر کره به شعاع ۰.۵ تقسیم می‌کنیم. در واقع حداکثر تعداد ۸ وجهی منتظم را می‌شماریم که در حداکثر حجم ایجاد شده توسط تمام کره‌های به شعاع ۱.۵ می‌توان قرار داد. با استفاده از نتیجه ۲-۶ و لم ۱-۳ خواهیم داشت :

$$\alpha(G) \leq \frac{14.1371 + (\gamma_c(G) - 1) \times 6.8067}{0.8661} = 7.8590 \gamma_c(G) + 8.4636$$

۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادات :

در این کار تحقیقی با استفاده از یک روش هندسی جبری کران بالای عدد استقلال را روی گراف گوی واحد بهبود دادیم. به عنوان کار بعدی تحقیق و مطالعه جهت بهبود دادن بیشتر به واسطه روش‌های مختلف از جمله کار روی اجسام هندسی چند وجهی پیشنهاد می‌گردد.

- [۱] Du D. Z., Wan P. J., Connected Dominating Set, Theory and Applications, Springer, Optimization and Its Applications ۷۷, New York, ۲۰۱۳. ۳, ۱۵, ۲۹
- [۲] Butenko S., Kahruman A. S., Ursulenko O., On connected domination in unit ball graphs, Optim. Lett. ۵(۲), pp. ۱۹۵–۲۰۵, ۲۰۱۱. ۱, ۱۵
- [۳] Kim D., Zhang Z., Li X., Wang W., Wu ., Du D. Z., A better approximation algorithm for computing connected dominating sets in unit ball graphs, IEEE Trans. Mobilee compot. ۹(۸), pp. ۱۱۰۸-۱۱۱۸, ۲۰۱۰. ۱۵, ۱۶, ۱۸, ۱۹.
- [۴] Mojdeh D.A., R am ezan i M., Ghanbari M., A new approximation of the bound of independence number in UDG, IMC ۴۴, University of Ferdowsi, August ۲۷-۳۰, Mashhad, Iran, ۲۰۱۳. ۱۰, ۱۲, ۱۶