دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و پنجم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

نزدیکترین و دورترین نقاط در فضاهای نیم ضرب داخلی غیر خطی

حمید مظاهری تهرانی[۱]، محمد جعفر صالحی[۲]، سعید علیخانی[۳*]

[(۱و۳)] استاد، بخش ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
[(۲)] دانشجوی دکتری ریاضی محض، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص.پ. ۱۹۳۹۵-۳۶۹۷ تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۱۸

چکیده
در این مقاله ابتدا نزدیکترین نقاط و دورترین نقاط در فضاهای نرم دار را معرفی می‌کنیم، سپس فضاهای نیم ضرب داخلی غیرخطی، مجموعه دوگان منفی و مجموعه خورشیدی را معرفی می‌کنیم. قضایایی در ارتباط با این مفاهیم بیان و اثبات می‌کنیم. مفهوم عمود بودن نسبت به نیم ضرب داخلی غیر خطی را تعریف کرده و خواص آن را بیان خواهیم نمود. در پایان، نزدیکترین و دورترین نقاط را در فضاهای خطی آورده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: نزدیکترین نقاط، دورترین نقاط، فضاهای نیم ضرب داخلی غیرخطی، مجموعه دوگان منفی، مجموعه خورشیدی، عمود بودن نسبت به نیم ضرب داخلی غیر خطی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: alikhani206@gmail.com

۱- مقدمه

در ابتدا مفاهیم فضای نرم دار، نزدیکترین نقاط و دورترین نقاط را در فضاهای نرم دار بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۱- تابع حقیقی مثبت $\|.\|$ تعریف شده بر فضای برداری X را نرم نامیم، اگر در سه خاصیت زیر صدق کند:

آ) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$، و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

ب) به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in R$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$؛

پ) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث).

اگر خاصیت اول از تعریف نُرم را حذف کنیم، تابع جدیدی به دست می‌آید که به آن نیم‌نرم می‌گوییم. فضای مجهز به نرم را فضای برداری نرم‌دار می‌نامیم. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار و $x \in X$ باشد. اگر M زیر مجموعه ناتهی X باشد و $g_0 \in M$، آنگاه g_0 را نقطه نزدیکی از x گوییم، هرگاه برای هر $g \in M$ داشته باشیم:

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g\|.$$

$$P_M(x) = \{g \in M: \ \|x - g\| = \inf_{g \in M} \|x - g\| := d(x, M)\}.$$

مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

در صورتی که برای هر $x \in X \setminus \bar{W}$، مجموعه $P_W(x)$ ناتهی باشد، آنگاه W را تقریبی و در صورتی مجموعه $P_W(x)$ تک عضوی باشد، W را یکتایی گوییم. اگر M زیر مجموعه کراندار ناتهی X و $g_0 \in M$، آنگاه g_0 را نقطه دوری از x گوییم، هرگاه برای هر $g \in M$

$$F_M(x) = \{g \in M: \ \|x - g\| = \sup_{g \in M} \|x - g\| := \delta(x, M)\}.$$

$$\|x - g_0\| \geq \|x - g\|.$$

به طور مشابه مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم:

اگر W کراندار باشد و برای هر $x \in X \setminus \bar{W}$، مجموعه $F_W(x)$ ناتهی باشد، آنگاه W را دوری و در صورتی که مجموعه $F_W(x)$ تک عضوی باشد، W را یکتا دوری گوییم ([1,2,3]).

نظریه تقریب که عمدتاً از نظریه بهترین تقریب و تقریب دورترینی تشکیل شده است، موضوعی مورد توجه در آنالیز ریاضی می باشد. در این حوزه، نتایجی توسط کرک[۴] در سال ۲۰۰۳ معرفی شد. بعد از آن، تحقیق در این زمینه بوسیله تعدادی از محققین ادامه یافت و نتایج زیادی حاصل شد. در سال ۲۰۰۶ الدرد و ویرامانی [۵] تحقیق درباره بهترین نقاط تقریبی از نگاشت های انقباض دوری را ادامه دادند و به نتایجی در این شاخه دست یافتند. در موضوع بهترین تقریب نزدیکترین فاصله عضوی مانند x از مجموعه‌ای مانند B در فضاهای متریک، باناخ، هیلبرت یا دیگر فضاها در شرایطی خاص مورد بررسی قرار می گیرد. موضوع جالب دیگر یافتن دورترین نقاط می باشد. این بحث اولین بار به وسیله چسن [۶] مطرح شد.

مثال ۱-۲ فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار و $W = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ است. برای $0 \neq x \in X$، $\frac{x}{\|x\|}$ نقطه نزدیکی به x و $-\frac{x}{\|x\|}$ نقطه دوری به x است.

در سال ۱۹۶۱ لومر در مقاله [۷] بر فضاهای برداری یک نوع خاص از نگاشت ها به نام نیم ضرب داخلی غیر خطی را معرفی کرد که متفاوت از ضرب داخلی خطی است. در ادامه مفهوم فضای نیم ضرب داخلی را بیان می کنیم:

تعریف ۱-۳ فرض کنید X یک فضای برداری روی اعداد حقیقی یا مختلط باشد. نگاشت $[.,.]: X \times X \to C$ را نیم ضرب داخلی غیرخطی گوییم، هرگاه شرایط زیر را داشته باشیم:

آ) برای هر $x, y \in X$، x ؛ $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$ ؛

ب) برای هر $x,y \in X$ و هر اسکالر λ، $[\lambda x, y]=\lambda[x,y]$ و $[x, \lambda y]=\bar{\lambda}[x,y]$؛

پ) برای هر $x \in X$، $[x,x]\geq 0$ و $[x,x]=0$ نتیجه دهد، $x=0$ ؛

ت) برای هر $x,y \in X$، $|[x,y]|\leq [x,x][y,y]$.

در اینصورت X همراه با نیم ضرب داخلی غیر خطی $[.,.]$ یک فضای نیم ضرب داخلی غیر خطی نامیده می‌شود. توجه کنید نگاشت $[.,.]$ نسبت به مولفه دوم غیر خطی است.

هر فضای نیم ضرب داخلی X همراه با نیم ضرب داخلی غیر خطی $[.,.]$ یک فضای نرم دار با نرم $\|x\|=[x,x]^{1/2}$ است.

مثال ۱-۴ فرض کنید $1<p<\infty$. برای فضای اندازه پذیر (X,μ) فضای $L^p(\mu)$را با نرم زیر در نظر می‌گیریم،

$$\| f \|_P=\left(\int_X | f |^p\right)^{1/p}, f \in L^p(\mu).$$

برای $f,g \in L^p(\mu)$ تعریف می‌کنیم:

$$[f,g]=\| g \|_p^{2-p}\left(\int_X f\,| g |^{p-2}\ g d\mu\right)^{1/p}$$

به سادگی می توان تحقیق کرد که$[.,.]$ یک نیم ضرب داخلی روی $L^p(\mu)$ است که $\|.\|_p$را تولید می‌کند.

مثال ۱-۵ فرض کنید $1<p<\infty$ و $p\neq 2$، فضای l^pرا با نرم زیر در نظر می‌گیریم.

$$\| x \|_P=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}, x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^p.$$

تعریف می‌کنیم.

$$[x,y]=\| y \|_p^{2-p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k\bar{y}_k\left|{y_k}^{p-2}\right|\right)^{1/p} \quad x,y \in l^p.$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که$[.,.]$ یک نیم ضرب داخلی روی l^p است که $\|.\|_p$را تولید می‌کند.

مثال ۱-۶ فضای $X=R^2$ با نرم زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2| \qquad x=(x_1,x_2)\in R^2.$$

تابعک تعریف شده زیر را در نظر می‌گیریم

$$[x,y]=\frac{x_1y_1(|y_1|+|y_2|}{|y_1|}+\frac{x_2y_2(|y_1|+|y_2|}{|y_2|},$$

در صورتی که $y_1,y_2\neq 0$.

به سادگی می توان تحقیق کرد که $[.,.]$ یک نیم ضرب داخلی روی R^2 است که $\|.\|_1$ را تولید می‌کند.

در این مقاله به نتیجه زیرنیاز داریم.

لم ۱-۷ (معیار کولوموگرف): فرض کنید H فضای هیلبرت و C مجموعه بسته محدب از H باشد. برای $x\in H$و $w\in C$ شرایط زیر معادلند:

آ) $w \in P_C(x)$؛

ب)برای هر $y \in C$ داریم $[x-w, y-w]\leq 0$؛

پ) برای هر $y \in C$، $\|x-w\|^2+\|y-w\|^2\leq\|x-y\|^2$.

تعریف ۱-۸ فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای نرم دار و G زیر مجموعه ناتهی از X باشد. مجموعه دوگان منفی مربوط به نیم ضرب داخلی غیر خطی $[.,.]$ به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$G^0=\{x\in X:[y,x]\leq 0, \quad \forall y \in G\}$$

لم ۱-۹ فرض کنید $(X,\|.\|)$ فضای نرم دار و C زیر مجموعه بسته محدب از X باشد. برای $x\in X$ و $w\in C$ شرایط زیر معادلند:

آ) $w\in P_C(x)$

ب) $x-w\in (C-w)^0$؛

پ) برای هر $u\in C$ و هر $\lambda\in[0,1]$، $x-w-\lambda(u-w)\in (C-w)^0$

تعریف ۱-۱۰ فرض کنید W مجموعه یکتایی در فضای نرم دار $(X,\|.\|)$ باشد. مجموعه W را خورشیدی گوییم، هرگاه برای هر $x\notin W$ و $y=P_W(x)$ داشته باشیم:

$P_W(\lambda x+(1-\lambda)y)=y,\quad \forall\lambda\geq 0$.

قضیه ۱-۱۱ فرض کنید H فضای هیلبرت و W زیر مجموعه بسته محدب از H باشد. آنگاه W مجموعه خورشیدی است.

اثبات: می‌دانیم W یک مجموعه یکتایی است. فرض کنید $x\in X$ و $y_0\in W$. اگر $y_0=P_W(x)$ طبق لم ۱-۷ $[y-y_0,x-y_0]\leq 0$ و در نتیجه برای $\lambda\geq 0$ داریم:

$$\lambda[y-y_0,x-y_0]=[y-y,\lambda x-\lambda y_0]\leq 0,$$

و لذا $[y-y_0|\ \lambda x+(1-\lambda)y_0-y_0]\leq 0$. پس طبق لم ۱-۷ داریم $P_W(\lambda x+(1-\lambda)y_0)=y_0$. □

قضیه ۱-۱۲ فرض کنید H فضای هیلبرت و W مجموعه یکتایی و خورشیدی باشد. آنگاه W محدب است.

اثبات. به مرجع [۷] مراجعه شود. □

۲- نزدیکترین نقاط و دورترین نقاط در فضای نیم ضرب داخلی غیر خطی

در این بخش نتایجی جدید در مورد دورترین نقاط در فضای نیم ضرب داخلی غیرخطی را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲-۱ فرض کنید $(X,[.,.])$ یک فضای نیم ضرب داخلی و W زیرمجموعه ای از X، $x\in X$ و $y_0\in W$ باشد. اگر به ازای هر $z\in W$ داشته باشیم $[y_0-z,x-z]\leq 0$، آنگاه $y_0\in F_W(x)$.

برهان: فرض کنید برای هر $z\in W$ داشته باشیم $[y_0-z,x-z]\leq 0$. آنگاه

$$\begin{aligned}0&\geq[y_0-z,x-z]\\&=[-x+y_0-z+x,x-z]\\&=[-x+y_0,x-z]+[x-z,x-z]\\&=[-x+y_0,x-z]+\|x-z\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\|x-y_0\|.\|x-z\|&\geq[x-y_0,x-z]\\&\geq\|x-z\|^2.\end{aligned}$$

پس $\|x-y_0\|\geq\|x-z\|$ و لذا $y_0\in F_W(x)$. □

قضیه ۲-۲ فرض کنید $(X,[.,.])$ یک فضای نیم ضرب داخلی، W یک زیر مجموعه از X، $x\in X$ و به ازای هر $z\in W$، $[y_0-z,x-y_0]=0$. شرط $[x-z,x-y_0]=\delta^2(x,W)$ برقرار است اگر و فقط اگر $y_0\in F_W(x)$.

برهان: داریم:

$$\begin{aligned}\delta^2(x,W)&=[x-z,x-y_0]\\&=[x-z,x-y_0]-[y_0-z,x-y_0]\\&=[x-z-y_0+z,x-y_0]\\&=\|x-y_0\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین $\delta(x,W)=\|x-y_0\|$. لذا $y_0\in F_W(x)$.

حال فرض کنید $y_0\in F_W(x)$ آنگاه $\delta(x,W)=\|x-y_0\|$

$$\begin{aligned}[x-z,x-y_0]&=[x-z,x-y_0]-[y_0-z,x-y_0]\\&=[x-z-y_0+z,x-y_0]\\&=[x-y_0,x-y_0]\\&=\|x-y_0\|^2\\&=\delta^2(x,W).\end{aligned}$$

در این قسمت مفهوم عمود بودن نسبت به نیم ضرب داخلی غیر خطی را تعریف کرده و خواص آن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲-۳ فرض کنید X یک فضای نیم ضرب داخلی غیرخطی و $x,y\in X$ باشد. x را عمود نسبت به نیم ضرب داخلی غیر خطی به y گوییم و با $x\perp y$ نشان می‌دهیم، هرگاه $[y,x]=0$.

خواص ۱: به سادگی مشاهده می‌شود، اگر $x,y,z\in X$ و α یک اسکالر باشد. آنگاه

۱) $x\perp 0$ و $0\perp x$؛

۲) $x\perp x$ اگر و فقط اگر $x=0$ ؛

۳) اگر $x\perp y$ و $x\perp z$ آنگاه $x\perp y+z$؛

۴) $x\perp y$ نتیجه می دهد $\alpha x\perp y$ و $x\perp \alpha y$؛

۵) اگر $x,y\in X$ و $x\perp y$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $y\perp x$.

خواص ۲: فرض کنید X یک فضای نرم دار و G زیر مجموعه ناتهی از X باشد. مجموعه $G^{\perp}=\{x\in X:\ x\perp G\}$ را مولفه متعامد G می‌نامیم. در این صورت داریم:

- $G^{\perp}=\bigcap_{y\in G} y^{\perp}$؛
- $0^{\perp}=X,\ X^{\perp}=\{0\}$؛
- $0\in G^{\perp}$؛
- $x\in G$ ایجاب می کندکه $\alpha x\in G$ (α یک اسکالر است)؛
- $G^{\perp}\subseteq G^0$؛
- مجموعه $G\bigcap G^{\perp}$ تهی است یا برابر با $\{0\}$؛
- $G^{\perp}=G^0\bigcap(-G)^0$؛
- اگر G یک زیر مجموعه محدب باشد. آنگاه $G^0=G^{\perp}$؛

بنابراین $y_0\in P_G(x)$ اگر و فقط اگر $x-y_0\in G^{\perp}$.

قضیه ۲-۴ فرض کنید G زیر مجموعه محدب و یکتایی در فضای ضرب داخلی غیر خطی X باشد. آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$\| P_W(x)-P_W(y)\|\le\| x-y\|.$$

برهان: برای $x,y\in X$ اگر $P_G(x)=P_G(y)$ حکم برقرار است. طبق قضیه ۲-۲، $[x-P_G(x),P_G(y)-P_G(x)]\le 0$ و $[y-P_G(y),P_G(x)-P_G(y)]\le 0$. با جمع این دو رابطه داریم

$$[x-y+p_G(y)-p_G(x).p_G(y)-p_G(x)]\le 0,$$

و بنابراین

$$[p_G(y)-p_G(x).p_G(y)-p_G(x)]\le [y-x.p_G(y)-p_G(x)].$$

۳- نزدیکترین نقاط و دورترین نقاط در فضای نیم ضرب داخلی خطی

در این بخش به مطالعه نزدیکترین و دورترین نقاط در فضای نیم ضرب داخلی خطی می‌پردازیم. ابتدا ضرب داخلی‌خطی را بصورت زیر را درنظر می‌گیریم.

تعریف ۳-۱ [1] یک نیم ضرب داخلی خطی روی فضای برداری مختلط X یک نگاشت از $X\times X$ به C است که برای هر $x,y,z\in X$ و هر اسکالر $\alpha\in C$ داشته باشیم:

آ) خاصیت خطی بودن در متغیر اول: به

$$[x+y\mid z]=[x\mid z]+[y\mid z]$$

عبارت دیگر

$$[\alpha x\mid z]=\alpha[x\mid z]$$

ب) خاصیت مزدوج تقارنی: $[y \mid x]=[x \mid y]$؛

پ) خاصیت مثبت بودن: $[x,x]\geq 0$.

به علاوه اگر $[x \mid x]=0$ نتیجه دهد $x=0$، آنگاه $[.|.]$ را یک نیم ضرب داخلی خطی گوییم. یک فضای خطی با یک نیم ضرب داخلی خطی را یک فضای نیم ضرب داخلی خطی گوییم.

خاصیت (آ) در تعریف بالا را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$[\alpha x+\beta y \mid z]=\alpha[x \mid z]+\beta[y \mid z].$$

طبق خاصیت (ب) داریم:

$$[z \mid \alpha x+\beta y]=\overline{\alpha}[z \mid x]+\overline{\beta}[y \mid z].$$

برای نیم ضرب داخلی خطی $[.|.]$ نیم نرم زیر تعریف را در نظر می‌گیریم: $\| x \|=\sqrt{[x \mid x]}$.

قضیه ۳-۲ فرض کنید W زیر فضای حقیقی $(X,[.|.])$ باشد و $x,y\in X$. در این صورت $y\in P_W(x)$ اگر و فقط اگر به ازای هر $z\in W$،

$$[x-\frac{y+z}{2} \mid z-y]\leq 0$$

برهان: برای هر $z\in W$

$$\begin{aligned} y\in P_W(x) &\Leftrightarrow \|x-y\|\leq\|x-z\| \\ &\Leftrightarrow \|x-y\|^2\leq\|x-z\|^2 \\ &\Leftrightarrow [x-y \mid x-y]\leq[x-z \mid x-z] \\ &\Leftrightarrow [x-z+z-y \mid x-y]\leq [x-y+y-z \mid x-z] \\ &\Leftrightarrow [x-z \mid x-y]+[z-y \mid x-y]\leq [x-y \mid x-z]+[y-z \mid x-z] \\ &\Leftrightarrow [z-y \mid x-y]-[y-z \mid x-z]\leq 0 \\ &\Leftrightarrow [z-y \mid x-y+x-z]\leq 0. \end{aligned}$$

نتیجه ۳-۳ فرض کنید W زیر مجموعه نقطه وسط محدب در فضای نیم ضرب داخلی حقیقی $(X,[.|.])$ و $x\in X$ باشد. در این صورت $y\in P_W(x)$ اگر و فقط اگر برای هر $z\in W$ داشته باشیم $[x-z \mid z-y]\leq 0$.

فهرست منابع

[1] E. W. Cheney. Introduction to approximation theory, 2nd ed. AMS publishing, Providence, 1982.

[2] J. R. Rahmani, H. Mazaheri, The Farthest Orthogonality, Best Proximity Points and Remotest Points in Banach Spaces. Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci. 44 (2020), 195-2020.

[3] I. Singer. The theory of best approximation and functional analysis, volume 13 of Series in applied mathematics. SIAM, Philadelphia, 1974.

[4] W. A. Kirk, S. Reich, P. Veeramani, Proximinal retracts and best proximity pair theorems. Numer. Funct. Anal. *Optim.* 24 (2003), no. 7-8, 851--862.

[5] A. A. Eldred, P. Veeramani, P. Existence and convergence of best proximity points. J. Math. Anal. Appl. 323 (2006), no. 2, 1001--1006.

[6] B. Jessen, Two theorems on convex point sets. (Danish) Mat. Tidsskr. *B* 1940 (1940), 66-70.

[7] G. Lumer, Semi-inner product spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 100:29–43, 1961.