دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره چهلم، بهمن و اسفند ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

روش تکرار تغییراتی فرکتال برای حل معادلات مشتقات جزئی فرکتال

هما افراز[1*]، علیرضا خلیلی گلمانخانه[2]

(۱) مربی، گروه ریاضی کاربردی (آنالیزعددی)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
(۲) استاد، گروه فیزیک، واحد ارومیه، دانشگاه آزاد اسلامی، ارومیه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۲۲

چکیده

حسابان کسری شاخه‌ای از ریاضیات کلاسیک است، که با عملیات مشتق و انتگرال رتبه کسری سروکار دارد. اخیراً تحقیقات زیادی شامل حسابان کسری برای مطالعه پدیده های مربوط به ساختارها و فرایندهای فرکتال انجام شده است. فرکتال‌ها شکل‌هایی هستند که دارای بعد کسری بوده و به طور طبیعی در پدیده های غیرخطی و نامتعادل در زمینه‌های مختلف ظاهر می‌شوند. در سال‌های اخیر انواع مختلفی از مشتقات و حسابان کسری و فرکتال توسط دانشمندان زیادی ارائه شده و به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است. اندازه‌گیری‌ها در فرآیندهای فیزیکی موضعی است و حسابان کسری موضعی ابزار مفیدی برای حل برخی از مسائل فیزیک و مهندسی می‌باشد. گنگال حسابان کسری موضعی را بررسی کرده و ارتباطی بین آن و فرکتال‌ها را به دست آورده است. با استفاده از حسابان کسری موضعی و ویژگی‌های فرکتال، F^{α}- حسابان یا حسابان فرکتال را روی زیر مجموعه‌ای از خط حقیقی تعریف کرده که یک حساب ساده، سودمند، ساختاری و الگوریتمی است. در این پژوهش، ابتدا مفاهیم اولیه و اساسی F^{α}- حسابان یا حسابان فرکتال را بیان می‌کنیم. سپس روش تکرار تغییراتی تعمیم یافته در حسابان فرکتال را پیشنهاد می‌کنیم. برای نشان دادن کارایی حسابان فرکتال و روش جدید، چند معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی فرکتال را با این روش حل کرده و نشان می‌دهیم که این روش نسبت به روش تکرار تغییراتی لاپلاس کسری موضعی بهتر، کاراتر، راحت‌تر و مناسب‌تر است.

واژه‌های کلیدی: حسابان فرکتال، فرکتال، روش تکرار تغییراتی تعمیم یافته، معادلات مشتقات جزئی فرکتال.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: Homaafraz@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

در طی چند دهه گذشته حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری موضعی به‌عنوان یک ابزار مفید در سطح وسیعی از مسائل علوم پایه و مهندسی آشکار شده و نقش مهمی در توصیف پدیده‌های پیچیده بر روی مجموعه کانتور که یک فرکتال است، بازی می‌کند و به خاطر سر و کار داشتن با فرکتال‌ها و توابع مشتق‌ناپذیر پیوسته در دنیای واقعی از اهمیت و مجذوبیت ویژه‌ای برخوردار شده است.

از سال ۱۹۷۰ هنگامی که مندلبرت مفهوم «فرکتال» را پیشنهاد کرد، فرکتال در زمینه‌های گوناگون مانند مفاهیم علوم پایه، اقتصاد، کشاورزی و هنر به خاطر عمومیت پدیده فرکتال به کار برده شده است.

فرکتال‌ها اشکالی هستند که دارای بعد کسری بوده و به‌طور طبیعی در پدیده‌های غیرخطی و نامتعادل در اشکال و زمینه‌های مختلف ظاهر شده و می‌توانند بسیاری از ساختارهای موجود در طبیعت را مدل‌سازی کنند. فرکتال‌ها اغلب آن قدر نامنظم هستند که هیچ ساختار مشتق‌پذیر همواری روی آنها تعریف نمی‌شود و روش‌ها و فنون حسابان معمولی روی آنها غیر قابل اجراء هستند. نمودار توابع هیچ جا مشتق‌پذیر یک مجموعه فرکتال است.

در سال۱۹۹۷ کلوانکار و گنگال عملگر مشتق سری موضعی را با دوباره نرمال‌سازی تعریف ریمان لیوویل پیشنهاد کردند[۱]. مشتق کسری موضعی از یک تعمیم طبیعی مشتقات معمولی برای حفظ مرتبه کسری گونه موضعی مشتقات در مقایسه با تعاریف سنتی مشتقات و انتگرال‌های کسری پیروی می‌کند و بیشتر برای توابع وایرشتراس هیچ‌جا مشتق‌پذیر استفاده می‌شود.

برخی از کمیت‌های فیزیکی مشتق‌ناپذیر برای توصیف پارامترهای به‌طور موضعی فیزیکی وجود دارند که در مفاهیم توابع مشتق‌پذیر قابل اجرا نیستند. در چنین مواردی مفاهیم حسابان کسری موضعی اجازه می‌دهد تا راه حل‌های مناسب برای چنین مسائل مشتق‌ناپذیری به‌دست آید. روابط بین حسابان کسری و فرکتال‌ها در [۲] نشان داده شده است.

پراوت و گنگال حسابان فرکتال را ساخته‌اند که به مشتق کسری موضعی کلوانکار و گنگال مربوط می‌شود. این حساب که در مقالات اصلی و پایه‌ای [۳-۹] بیان و گسترش یافته است، F^{α}- حسابان نامیده شده و یک حساب شبه ریمان بوده که برای توابعی با دامنه فرکتال مانند مجموعه‌های کانتور فرکتال تعریف شده است.

F^{α}- حسابان یک تعمیم از حسابان معمولی و یک روش الگوریتمی، ساده و ساختاری برای تجزیه و تحلیل و اجرا روی فرکتال‌ها می‌باشد که زمانی که حسابان استاندارد قابل اجرا نیست، استفاده می‌شود. از این حساب برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی با ساختار فرکتال در شاخه‌های مختلف علوم مانند مکانیک فلکی، اپتیک، فیزیک هسته‌ای و مکانیک آماری نامتعادل و غیره استفاده شده است. از مزایای این حساب می‌توان ویژگی‌های زیر را نام برد:

۱. مشتق فرکتال، موضعی است و در فیزیک خیلی مهّم است چرا که اوّلا علّیت را نقض نمی‌کند و ثانیا" اندازه‌گیری‌ها در فیزیک موضعی است.

۲. رتبه مشتق فرکتال غیرصحیح است و دارای مفهوم هندسی مساوی با بعد دامنه تابع می‌باشد.

۳. رتبه مشتق فرکتال، یک رابطه با مفهوم فیزیکی با بعد طیفی دارد.

حسابان فرکتال یا F^{α}- حسابان که برای یک رده وسیع از توابع که F^{α} - انتگرال‌پذیر می‌باشند، توسط خلیلی گلمانخانه گسترش داده شده و در بسیاری از کاربردهای فیزیک استفاده شده است [۱۰-۲۵].

حساب فرکتال چارچوب جدیدی فراهم می‌کند تا قوانین فیزیک را در فضاهای با ابعاد کسری (فرکتال‌ها) بیان کنیم. بیان قوانین فیزیک در فضای

با ابعاد کسری مخصوصا در فیزیک نیمه هادی نتایج جدیدی داشته است و بدون هیچ تناقضی با سایر قوانین فیزیک پدیده نفوذ را در موادی با ساختارهای فرکتالی به درستی توضیح داده و با نتایج تجربی سازگاری زیادی را نشان می‌دهد. البته پژوهشگران مختلف برای اینکه پدیده نفوذ را توضیح دهند از حسابان کسری استفاده کرده‌اند، ولی متاسفانه با قوانین فیزیک در شاخه‌های مختلف تناقض دارد، مثلا قانون علیت را در زمان‌های کوچک در دینامیک نقض می‌کند. با توجه به اهمیت این مدل و کاربرد آن در فیزیک، معادلات فرکتالی با روشهای مختلف این حساب حل شده تا نتایج آن برای مهندسان بیشتر مورد استفاده قرار گیرد. (خواننده برای نتایج بیشتر به کتاب [۲۴] مراجعه کند).

هدف از نگارش این پژوهش ارائه روش جدید تکرار تغییراتی تعمیم یافته با استفاده از حسابان فرکتال یا F^{α}-حسابان برای حل معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی فرکتال می‌باشد. برای این منظور این دست نوشته با ساختار زیر سازمان‌دهی شده است:

ابتدا مفاهیم مهّم و مورد نیاز حسابان فرکتال یا F^{α}- حسابان را بیان می‌کنیم. سپس روش تکرار تغییراتی تعمیم یافته را با استفاده از حسابان فرکتال یا F^{α}- حسابان تعریف می‌کنیم. برای نشان دادن کارایی حساب و روش جدید چند معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی فرکتال را با این روش حل می‌کنیم.

۲- پیش بایسته‌ها

حساب روی فرکتال‌ها یا F^{α}- حسابان یک حساب براساس زیرمجموعه‌های فرکتال F از بوده و شامل F^{α}-انتگرال و F^{α}- مشتق از مرتبه α، $1 \leq \alpha < 0$ می‌باشد که α بعد فرکتال F است.

در این بخش خلاصه‌ای از مطالب مورد نیاز و مهم مربوط به حسابان فرکتال یا F^{α}- حسابان را بیان می‌کنیم. (برای توضیحات کامل‌تر منابع [۶،۷،۲۴] را ببینید.

تعریف ۱: یک افراز $P_{[a,b]}$ از بازه $[a,b]$ یک مجموعه متناهی از نقاط $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ و $x_i < x_{i+1}$ می‌باشد. هر بازه به شکل $[x_i, x_{i+1}]$ یک بازه جزء یا یک مولفه از افراز نامیده می‌شود.

تعریف ۲: تابع پرچم (flag) $\theta(C, I)$ برای مجموعه C و فاصله بسته I به صورت زیر داده می‌شود:

$$\theta(C, I) = \begin{cases} 1 & C \cap I \neq \\ 0 & C \cap I = \end{cases} \qquad (۱)$$

تعریف ۳: برای یک مجموعه F و بازه $[a,b]$ و $a < b$ تابع جرم (چگال) $\gamma^{\alpha}(F, a, b)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma^{\alpha}(F, a, b) = lim_{\delta \to 0} inf_{\{p_{[a,b]}:|p| \leq \delta\}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \times \theta(F, [x_i, x_{i+1}]) \qquad (۲)$$

که θ تابع پرچم (۱) می‌باشد و $|P| = \max_{0 \leq i \leq n-1}(x_{i+1} - x_i)$.
علاوه براین اینفیمم در (۲) روی همه افرازهای P از $[a,b]$ که $|P| \leq \delta$ در نظر گرفته می‌شود صرف نظر از اینکه n تعداد مولفه‌های P است.

تعریف ۴: فرض می‌کنیم a_0 یک عدد ثابت، حقیقی و دلخواه باشد. تابع پله‌ای انتگرال $S_F^{\alpha}(x)$ از مرتبه α برای مجموعه F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_F^{\alpha}(x) = \begin{cases} \gamma^{\alpha}(F, a_0, x), & x \geq a_0 \\ \gamma^{\alpha}(F, x, a_0), & x < a_0 \end{cases} \qquad (۳)$$

تعریف ۵: فرض می‌کنیم , $F \subset R,\ f: \ \to$ x ∈ F. یک عدد ℓ حد f برای نقاط F یا به سادگی α -حد نامیده می‌شود، اگر برای هر

$\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری‌که

$$y \in F, |y \quad x| < \delta \Rightarrow |f(y) \quad \ell| < \varepsilon. \quad (۴)$$

اگر چنین عددی وجود داشته باشد، آنگاه به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\ell = F^{\alpha} - \lim_{y \to x} f(y).$$

تعریف ۶: یک تابع $f: \quad \to \quad$ در $x \in F$، α - پیوسته نامیده می‌شود اگر

$$f(x) = F^{\alpha} - \lim_{y \to x} f(y). \quad (۵)$$

تعریف ۷: یک تابع $f: \quad \to \quad$ روی $E \subset F$ به طور یکنواخت α -پیوسته نامیده، اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$x \in F, y \in E, |y \quad x| < \delta \Rightarrow |f(y) \quad f(x)| < \varepsilon. \quad (۶)$$

تعریف ۸: F^{α}-انتگرال در تعریف انتگرال زیر مقادیر تابع فقط در نقاط مجموعه F در نظر گرفته می‌شود. علاوه براین به جای طول زیر تقسیم‌ها در افراز تفاوت بین مقادیرتابع پله‌ای S_F^{α} در نقاط انتهایی در نظر گرفته شده است. F^{α}-انتگرال برای توابع با دامنه فرکتال مناسب است. انتگرال معمولی چنین توابعی بسته به ماهیت دامنه و تعریف انتگرال (لبگ یا ریمان) صفر یا تعریف نشده است. رده‌ای از توابع $f: \quad \to \quad$ که روی $f \subset \quad$ کران‌دار هستند با $B(F)$ نشان داده می‌شوند.

فرض کنید $f \in B(F)$ و I یک بازه بسته باشد. دو مقدار M و m را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M[f, F, I] = \begin{cases} sup \quad f(x), & F \cap I \neq \varphi \\ 0, & F \cap I = \varphi \end{cases} \quad (۷)$$

و به‌طور مشابه

$$m[f, F, I] = \begin{cases} inf \quad f(x), & F \cap I \neq \varphi \\ 0, & F \cap I = \varphi \end{cases} \quad (۸)$$

فرض کنید $S_F^{\alpha}(x)$ برای $x \in [a, b]$ متناهی بوده و $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ یک افراز از $[a, b]$ باشد. حد بالا و پایین F^{α}- مجموع را برای تابع f روی افراز P به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U^{\alpha}[f, F, P] = \sum_{i=0}^{n-1} M\left[f, F, [x_i, x_{i+1}]\right] \times \left(S_F^{\alpha}(x_{i+1}) \quad S_F^{\alpha}(x_i)\right) \quad (۹)$$

و

$$L^{\alpha}[f, F, P] = \sum_{i=0}^{n-1} m\left[f, F, [x_i, x_{i+1}]\right] \times \left(S_F^{\alpha}(x_{i+1}) \quad S_F^{\alpha}(x_i)\right) \quad (۱۰)$$

فرض کنید F طوری باشد که S_F^{α} روی $[a, b]$ متناهی باشد. برای $f \in B(F)$ حد پایین انتگرال به صورت

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x) d_F^{\alpha} x = \sup_{P[a,b]} L^{\alpha}[f, F, P], \quad (۱۱)$$

و حد بالای آن به صورت زیر داده می‌شود:

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x) d_F^{\alpha} x = \inf_{P[a,b]} U^{\alpha}[f, F, P]. \quad (۱۲)$$

فرض کنید $f \in B(F)$. در این صورت f روی $[a, b]$ F^{α}-انتگرال‌پذیر است اگر

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x) d_F^{\alpha} x = \int_{a}^{\bar{b}} f(x) d_F^{\alpha} x. \quad (۱۳)$$

در این حالت-F^{α} انتگرال تابع f روی $[a, b]$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\int_a^b f(x) d_F^{\alpha} x.$$

ویژگی‌های F^{α}- انتگرال در مراجع [۶،۷] بیان شده است.

اگر $\chi_F(x)$ تابع مشخصه $F \subset \quad$ باشد، آنگاه

$$\int_a^b \chi_F(x) d_F^{\alpha} x = S_F^{\alpha}(b) \quad S_F^{\alpha}(a) \quad (۱۴)$$

تعریف ۹: تابع گاما با دامنه فرکتال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_F^{\alpha}(x) = \int_{S_F^{\alpha}(0)}^{S_F^{\alpha}(\infty)} e^{-S_F^{\alpha}(t)}\, S_F^{\alpha}(t)^{S_F^{\alpha}(x)-1} d_F^{\alpha} \qquad (۱۵)$$

به طوری که

$$e^{-S_F^{\alpha}(t)} = F^{\alpha} - \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{S_F^{\alpha}(t)}{n}\right)^{n}. \qquad (۱۶)$$

تعریف ۱۰: تابع میتاگ لفلر فرکتال بایک پارامتر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{F,\gamma}^{\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(S_F^{\alpha}(t)\right)^{j}}{\Gamma_F^{\alpha}(\gamma j+1)} \qquad (۱۷)$$

همچنین می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin\left(S_F^{\alpha}(t)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(S_F^{\alpha}(t)\right)^{2j-1}}{(2j-1)} (\ \ 1)^{j-1} \qquad (۱۸)$$

تعریف ۱۱: نقطه x **یک نقطه تغییر** تابع f است اگر f روی هر بازه باز (c,d) شامل x ثابت نباشد. مجموعه همه نقاط تغییر تابع f مجموعه تغییر f نامیده می‌شود و با $Sc\ \ f$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۲: فرض کنید $F \subset$ باشد به‌طوری که $S_F^{\alpha}(x)$ برای هر $x \in$ و $\alpha \in (0,1]$ متناهی باشد، آنگاه مجموعه(S_F^{α}) Sc، **α - کامل** نامیده می‌شود.

مجموعه‌های کانتور نمونه‌های مهمی از مجموعه‌های **α - کامل** هستند.

مانند مشتق مرتبه اول، F^{α} - مشتق حد یک خارج قسمت است، اما در اینجا حد، F^{α}-حد است و مخرج اختلاف مقادیر تابع پله‌ای در دو نقطه است.

F^{α} -مشتق برای مشتق توابعی که تغییرات آن فقط روی مجموعه فرکتال است (به‌طور خاص توابع f که $Sc\ \ f \subset F$) به عنوان مثال تابع پله‌ای کانتور مناسب است. مشتق معمولی توابعی که برای آن‌ها مشتق فرکتال تعریف می‌شود تقریباً همه جا صفراست و یا تعریف نشده است.)

تعریف ۱۳: اگر F یک مجموعه F^{α}-کامل باشد آنگاه F^{α}-**مشتق** f در نقطه x به صورت زیر تعریف می‌شود اگر حد موجود درتعریف زیر وجود داشته باشد:

$$D_F^{\alpha}\left(f(x)\right) = \begin{cases} F-\lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(y)-f(x)}{S_F^{\alpha}(y)-S_F^{\alpha}(x)}, & x\in F \\ 0, & x\notin F \end{cases} \qquad (۱۹)$$

قضیه اساسی اوّل: فرض می‌کنیم $f: \ \to \ $ یک مجموعه F^{α} -کامل است. اگر $f \in B(F)$ یک تابع F^{α} -پیوسته روی $F \cap [a,b]$ باشد و برای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم:

$g(x) = \int_a^x f(y)\, d_F^{\alpha} y$، در این صورت

$$D_F^{\alpha}\left(g(x)\right) = f(x)\chi_F(x)$$

که $\chi_F(x)$ تابع مشخصه مجموعه F است (برای اثبات وتوضیحات کامل‌تر مراجع [۶،۷] را ببینید.)

یادآوری: فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. در این صورت تابع مشخصه A در X یعنی $\chi_A: X \to \{0,1\}$ برای هر $x \in X$ به صورت زیرتعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \quad A \end{cases}$$

قضیه اساسی دوم: فرض کنید $f: \ \to \ $ یک تابع F^{α}- پیوسته، F^{α}- مشتق‌پذیر و $Sc\ \ (f)$ در یک مجموعه F^{α}–کامل F موجود بوده و $\ : \ \to \ $، F^{α}- پیوسته باشد به طوری‌که

$$D_F^{\alpha}\left(f(x)\right) = \ \ (x)\chi_F(x)$$

آنگاه $\int_a^b \ \ (x)\, d_F^{\alpha} x = f(b) \quad f(a)$ برای اثبات و توضیحات کامل‌تر مراجع [۶،۷] را ببینید.

قضیه: یک تابع $\ \in \tilde{B}(F)$ ، F^{α} - انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ است اگر و فقط اگر $g = \varphi(\ \ )$ روی $\mathrm{K} = [S_F^{\alpha}(a), S_F^{\alpha}(b)]$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد.

به عبارت دیگر یک تابع $\quad \in \tilde{B}(F)$ به F متعلق است اگر و فقط اگر g به روی K متعلق باشد. علاوه بر این در این حالت داریم:

$$\int_a^b \quad (x) d_F^{\alpha} x = \int_{S_F^{\alpha}(a)}^{S_F^{\alpha}(b)} g\,(u) du. \tag{۲۰}$$

برای اثبات و توضیحات کامل‌تر مرجع [۷] را ببینید. برخی از فرمول‌های کاربردی توابع فرکتال به صورت زیر می‌باشد:

فرض می‌کنیم c یک ثابت است.

$$D_F^{\alpha} c \chi_F = 0 \tag{۲۱}$$

$$D_F^{\alpha} S_F^{\alpha}(t) = \chi_F(t) \tag{۲۲}$$

$$D_F^{\alpha} \left(S_F^{\alpha}(t)\right)^n = n \left(S_F^{\alpha}(t)\right)^{n-1} \chi_F(t) \tag{۲۳}$$

$$D_F^{\alpha} sin\left(S_F^{\alpha}(t)\right) = \chi_F(t)\, cos\left(S_F^{\alpha}(t)\right) \tag{۲۴}$$

$$D_F^{\alpha} (\chi_F(t) t^n) = n \chi_F(t) t^{n-1} \tag{۲۵}$$

$$D_F^{\alpha}\left(cos \quad \left(a S_F^{\alpha}(t)\right)\right) = a \chi_F(t)\, sin \quad \left(a S_F^{\alpha}(t)\right) \tag{۲۶}$$

$$D_F^{\alpha}\left(f(t) g(t)\right) = D_F^{\alpha}\left(f(t)\right) g(t) + f(t) D_F^{\alpha}\left(g(t)\right) \tag{۲۷}$$

$$D_F^{\alpha}\, exp\left(S_F^{\alpha}(t)\right) = \chi_F(t)\, exp\left(S_F^{\alpha}(t)\right) \tag{۲۸}$$

$$sin\left(S_F^{\alpha}(t)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (\quad 1)^{i-1} \frac{[S_F^{\alpha}(t)]^{2i-1}}{(2i-1)!} \tag{۲۹}$$

$$sin\left(a S_F^{\alpha}(t)\right) = \frac{e^{ia S_F^{\alpha}(t)} - e^{-ia S_F^{\alpha}(t)}}{2i} \tag{۳۰}$$

$$sin \quad \left(a S_F^{\alpha}(t)\right) = \frac{e^{a S_F^{\alpha}(t)} - e^{-a S_F^{\alpha}(t)}}{2} \tag{۳۱}$$

$$cos\left(a S_F^{\alpha}(t)\right) = \frac{e^{ia S_F^{\alpha}(t)} + e^{-ia S_F^{\alpha}(t)}}{2} \tag{۳۲}$$

$$\int_0^y \left(S_F^{\alpha}(t)\right)^n d_F^{\alpha} t = \frac{1}{n+1} \left(S_F^{\alpha}(y)\right)^{n+1} \tag{۳۳}$$

۳- حساب فرکتال برای مجموعه‌های کانتور فرکتال

در این قسمت خلاصه‌ای از حساب فرکتال برای توابع تعریف شده روی مجموعه‌های شبیه کانتور و منحنی‌های فرکتال ارائه می‌شود [۲۴،۵].

ابتدا مراحل ساخت مجموعه کانتور ξ - میانی را بیان می‌کنیم.

برای شروع بازه با طول $1 > \xi > 0$ را از وسط $J = [0,1]$ حذف می‌کنیم. با انجام فرآیندهای مشابه به صورت زیر مجموعه کانتور ξ - میانی حاصل می‌شود.

گام۱:

$$C_1^{\xi} = \left[0, \tfrac{1}{2}(1 \quad \xi)\right] \cup \left[\tfrac{1}{2}(1+\xi), 1\right]$$

گام ۲:

$$C_2^{\xi} = \left[0, \tfrac{1}{4}(1 \quad \xi)^2\right] \cup \left[\tfrac{1}{4}(1 \quad \xi^2), \tfrac{1}{2}(1 \quad \xi)\right] \cup \left[\tfrac{1}{2}(1+\xi), \tfrac{1}{2}\left((1+\xi) + \tfrac{1}{2}(1 \quad \xi)^2\right)\right] \cup \left[\tfrac{1}{2}(1+\xi)\left(1 + \tfrac{1}{2}(1 \quad \xi)\right), 1\right]$$

گام $\boldsymbol{k}$: حذف یک بازه باز با طول ξ^k از وسط هر یک از بازه‌های بسته با طول $(\xi)^{k-1}$ باقیمانده از گام $k \quad 1$. سرانجام مجموعه کانتور ξ - میانی به صورت $C^{\xi} = \quad {}_{k=1}^{\infty} C_k^{\xi}$ به دست می‌آید.

اندازه لبگ مجموعه C^{ξ} را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$m\left(C^{\xi}\right) = 1 \quad \xi \quad 2\left(\tfrac{1}{2}(1 \quad \xi)\xi\right) \quad 4\left(\tfrac{1}{4}(1 \quad \xi)^2 \xi\right) = 1 \quad \xi \frac{1}{1-(1-\xi)} = 1 \quad 1 = 0$$

یعنی اندازه لبگ مجموعه‌های ξ - میانی کانتور صفر است. بعد هاسدورف مجموعه کانتور ξ - میانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dim_{\,H}\left(C^{\xi}\right) = \frac{log\, 2}{log\, 2 - log(1-\xi)} \tag{۳۴}$$

که بر اساس اندازه هاسدورف می‌باشد.

به عنوان نمونه با توجه به مطالب فوق، مجموعه $\frac{1}{3}$- کانتور $C^{\frac{1}{3}}$ با گام‌های زیر تولید می‌شود:

گام۱: حذف یک بازه باز با طول $\frac{1}{3}$ از وسط بازه $[0,1]$

گام۲: حذف یک بازه باز با طول $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ از وسط هر یک از بازه‌های بسته باقیمانده از گام یک.

گام k: حذف یک بازه باز با طول $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ از وسط هر یک از بازه‌های بسته با طول $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ باقیمانده از گام $1\quad k$. همچنین داریم:

$$dim_{\,H}\left(C^{\frac{1}{3}}\right) = dim_{\,\gamma}\left(C^{\frac{1}{3}}\quad [a,b]\right) = \frac{log\,2}{log\,3} = 0.63$$

تابع پرچم برای مجموعه کانتور C^ξ و بازه $J=[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(C^\xi, J) = \begin{cases} 1, & C^\xi \cap J \neq \varphi \\ 0, & C^\xi \cap J = \varphi \end{cases} \qquad (۳۵)$$

فرض می‌کنیم:

$$Q_{[a,b]} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$$

یک افراز از J باشد، آنگاه

$$\gamma^\alpha[C^\xi, Q] = \sum_{i=0}^{n-1} \Gamma(\alpha+1)\,(t_{i+1}\quad t_i)^\alpha F(C^\xi, [t_i, t_{i+1}]),\quad 0 < \alpha \leq 1. \qquad (۳۶)$$

و تابع جرم $M^\alpha(C^\xi, a, b)$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$M^\alpha(C^\xi, a, b) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{\{Q_{[a,b]} : |Q| \leq \delta\}} \gamma^\alpha[C^\xi, Q] \qquad (۳۷)$$

در اینجا اینفیمم روی همه افرازهای Q از $[a,b]$ صدق می‌کند.

$$|\,Q\,| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i) \leq \delta \qquad (۳۸)$$

تابع پله‌ای انتگرال مجموعه‌های فرکتال C^ξ طبق مرجع [۶] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^\alpha_{C^\xi}(t) = \begin{cases} M^\alpha(C^\xi, t_0, t), & t \geq t_0 \\ \quad M^\alpha(C^\xi, t_0, t), & t < t_0 \end{cases} \qquad (۳۹)$$

که t_0 یک عدد حقیقی و ثابت دلخواه می‌باشد.

بعد گاما مجموعه $C^\xi \cap [a,b]$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$dim_{\,\gamma}(C^\xi\quad [a,b]) = inf\{\alpha: M^\alpha(C^\xi, a, b) = 0\} = sup\{\alpha: M^\alpha(C^\xi, a, b) = \infty\} \qquad (۴۰)$$

تابع مشخصه برای یک مجموعه کانتور ξ - میانی فرکتال C^ξ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_{C^\xi}(\alpha, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}, & t \in C^\xi \\ 0, & t\quad C^\xi \end{cases} \qquad (۴۱)$$

فرض می‌کنیم $\quad(t): C^\xi \to\quad$ در این صورت C^α- حد تابع (t) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$t, z \in C^\xi, |z\quad t| < \delta \Rightarrow |\ \ (z)\quad \ell| < \varepsilon \qquad (۴۲)$$

اگر ℓای وجود داشته باشد، می‌نویسیم:

$$\ell = C^\alpha - \lim_{z \to t} h(z) \qquad (۴۳)$$

به همین ترتیب C^α- پیوستگی (t) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$h(t) = C^\alpha - \lim_{z \to t} h(z) \qquad (۴۴)$$

C^α- مشتق (t) روی مجموعه α - کامل در [۶،۷] به صورت زیر تعریف شده است:

$$D^\alpha_{C^\xi}(h(t)) = \begin{cases} C^\alpha - \lim_{z \to t} \frac{h(z) - h(t)}{S^\alpha_{C^\xi}(z) - S^\alpha_{C^\xi}(t)}, & z \in C^\xi \\ 0, & z \notin C^\xi \end{cases} \qquad (۴۵)$$

C^α- انتگرال (t) روی $[a,b]$ به صورت

$$\int_a^b \ \ (t)\, d^\alpha_{C^\xi} t$$

نشان داده و به‌طور تقریبی به‌-صورت زیر محاسبه می‌شود: [۶،۷]

$$\int_a^b \ \ (t)\, d^\alpha_{C^\xi} t \approx \sum_{i=1}^{n} \ {}_i(t) \left(S^\alpha_{C^\xi}(t_j)\quad S^\alpha_{C^\xi}(t_{j-1})\right). \qquad (۴۶)$$

۱-۳- چند فرمول مهم در مجموعه C^{ξ} :

$$D^{\alpha}_{C^{\xi}}\chi_{C^{\xi}}(\alpha,t)t=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\chi_{C^{\xi}}(\alpha,t) \qquad (۴۷)$$

$$D^{\alpha}_{C^{\xi}}\chi_{C^{\xi}}(\alpha,t)t^2=\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\chi_{C^{\xi}}(\alpha,t)t \qquad (۴۸)$$

$$D^{\alpha}_{C^{\xi}}\sin\left(t\chi_{C^{\xi}}(\alpha,t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\cos\left(t\chi_{C^{\xi}}(\alpha,t)\right) \qquad (۴۹)$$

$$D^{\alpha}_{F}\left(S^{\alpha}_{C^{\xi}}(x)\right)^{n}=n\left(S^{\alpha}_{C^{\xi}}(x)\right)^{n-1}\chi_{C^{\xi}}(x) \qquad (۵۰)$$

$$\int_0^y\left(S^{\alpha}_{C^{\xi}}(x)\right)^{n}d^{\alpha}_{C^{\xi}}x=\frac{1}{n+1}\left(S^{\alpha}_{C^{\xi}}(y)\right)^{n+1} \qquad (۵۱)$$

۴- روش تکرار تغییراتی تعمیم یافته

روش تکرار تغییراتی برای حل موثر، ساده و دقیق‌تر انواع معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی با تقریباتی که به سرعت به جواب دقیق همگرا می‌شود، به کار می‌رود. بیشتر معادلات کسری و فرکتال جواب تحلیلی دقیق ندارند، بنابراین برای حل این مسائل نیز روش‌های عددی و تحلیلی به طور گسترده استفاده می‌شود که یکی از این روش‌های تحلیلی و عددی روش تکرار تغییراتی است. روش تکرار تغییراتی یک روش تکراری است که مبتنی بر استفاده از ضریب لاگرانژ، تغییرات محدود و تابع تصحیح می‌باشد.

در این قسمت روش تکرار تغییراتی تعمیم یافته را برای مجموعه‌های فرکتال وF^{α}- حسابان تعریف می‌کنیم. معادله دیفرانسیل فرکتال کلی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$_{(m\alpha)}u(x,t)+\ _{\alpha}u(x,t)+\ _{\alpha}u(x,t)=f(x,t),\ t\geq 0,\ 0<\alpha\leq 1, x\in \qquad (۵۲)$$

که در آن $_{(m\alpha)}=(D^{\alpha}_{t})^{m}$ و $m\in N$، α عملگر خطی فرکتال و α عملگر غیرخطی فرکتال کلی را نشان می‌دهند و $f(x,t)$ تابع منبع می‌باشد.

حال فرمول تکرار تغییراتی تعمیم یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\int_0^t\left\{\lambda\left(\ _{(m\alpha)}u_n(x,\tau)+\ _{\alpha}u_n(x,\tau)+\ _{\alpha}u_n(x,\tau)\ f(x,\tau)\right)\right\}d^{\alpha}_{F}\tau \qquad (۵۳)$$

بر طبق روش تکرار تغییراتی، یک تابع تصحیح فرکتال را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\int_0^t\left\{\lambda\left(\ _{(m\alpha)}u_n(x,\tau)+\ _{\alpha}\tilde{u}_n(x,\tau)+\ _{\alpha}\tilde{u}_n(x,\tau)\ f(x,\tau)\right)\right\}d^{\alpha}_{F}\tau \qquad (۵۴)$$

که در آن $\tilde{u}_n$ به عنوان یک محدودیت روش تکرار تغییراتی فرکتال در نظر گرفته شده و λ ضریب لاگرانژ فرکتال می‌باشد. λ با شرایط پایداری فرکتال $\delta^{\alpha}\tilde{u}_n=0$ می‌شود.

برای اولین تکرار $u_0(x,t)$، می‌توانیم از مقدار اولیه $u(x,0)$ را استفاده کنیم:

در (۵۵)، اگر فرض کنیم $n\to\infty$، آنگاه خواهیم داشت:

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t) \qquad (۵۵)$$

با توجه به همگرایی روش تکرار تغییراتی وقتی n به بینهایت میل کند، جواب حاصل به جواب دقیق همگرا می‌شود.

۵- کاربرد روش تکرار تغییراتی تعمیم یافته فرکتال

در این بخش با حل چند مثال از معادلات فرکتال خطی و غیرخطی به توصیف بیشتر روش تکرار تغییراتی تعمیم یافته فرکتال و کاربرد آن می‌پردازیم:

مثال ۱: معادله کوشی فرکتال به صورت زیر را در نظر می‌گیریم[۱۸]:

$$D_F^{\alpha}u(t) = u(t), 0 < \alpha \leq 1,$$
$$u(0) = 1, F = C^{\xi},\ t \in F \qquad (۵۶)$$

می‌خواهیم جواب این معادله را با استفاده از روش تکرار تغییراتی تعمیم یافته فرکتال به‌دست آوریم.
جواب دقیق این مساله

$$u(t) = exp\left(S_F^{\alpha}(t)\right) \qquad (۵۷)$$

می‌باشد. ابتدا با استفاده از فرمول (۵۳) و $m = 1$، فرمول تکرار تغییراتی تعمیم یافته فرکتال را به صورت زیر می‌سازیم:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \{\lambda\left(D_F^{\alpha}u_n(\tau)\right.$$
$$\left.u_n(\tau)\right)\} d_F^{\alpha}\tau \qquad (۵۸)$$

بر طبق روش تکرار تغییراتی، تابع تصحیح فرکتال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \{\lambda\left(D_F^{\alpha}u_n(\tau)\right.$$
$$\left.\tilde{u}_n(\tau)\right)\} d_F^{\alpha}\tau \qquad (۵۹)$$

با استفاده ازشرط پایداری فرکتال $\delta^{\alpha}\tilde{u}_n = 0$ و اکسترمم کردن معادله (۵۹)، λ را می‌توان به شکل زیر به دست آورد:

$$\delta^{\alpha}u_{n+1}(t) =$$
$$\delta^{\alpha}u_n(t) + \delta^{\alpha}\left(\int_0^t \{\lambda\left(D_F^{\alpha}u_n(\tau)\right.\right.$$
$$\left.\left.\tilde{u}_n(\tau)\right)\} d_F^{\alpha}\tau\right) = 0$$
$$\delta^{\alpha}u_n(t) + \lambda\delta^{\alpha}u_n(t)$$
$$\int_0^t (D_F^{\alpha}\lambda)\, \delta^{\alpha}u_n d_F^{\alpha}\tau = 0$$
$$\delta^{\alpha}u_n(t)(1+\lambda) \quad \int_0^t (D_F^{\alpha}\lambda)\, \delta^{\alpha}u_n d_F^{\alpha}\tau =$$
$$0 \Rightarrow \lambda = \quad 1$$

با قرار دادن مقدار λ در معادله (۵۹) داریم:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) \quad \int_0^t \{\left(D_F^{\alpha}u_n(\tau)\right.$$
$$\left.u_n(\tau)\right)\} d_F^{\alpha}\tau \qquad (۶۰)$$

می‌توانیم شرط اولیه را به صورت $u_0(t) = u(0) = 1$ درنظر بگیریم. با این انتخاب در تابع تصحیح تقریبات متوالی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$u_0(t) = 1$$
$$u_1(t) = u_0(t) \quad \int_0^t \{\left(D_F^{\alpha}u_0(\tau)\right.$$
$$\left.u_0(\tau)\right)\} d_F^{\alpha}\tau = 1 + \int_0^t d_F^{\alpha}\tau = 1 +$$
$$\int_0^t \chi_F^{\alpha}(\tau) d_F^{\alpha}\tau$$
$$u_1(t) = 1 + S_F^{\alpha}(t)$$
$$u_2(t) = u_1(t) \quad \int_0^t \{\left(D_F^{\alpha}u_1(\tau)\right.$$
$$\left.u_1(\tau)\right)\} d_F^{\alpha}\tau$$
$$= 1 + S_F^{\alpha}(t) \quad \int_0^t \left(\chi_F^{\alpha}(\tau) \quad 1\right.$$
$$\left.S_F^{\alpha}(\tau)\right) d_F^{\alpha}\tau = 1 + S_F^{\alpha}(t) + \int_0^t S_F^{\alpha}(\tau) d_F^{\alpha}\tau$$
$$u_2(t) = 1 + S_F^{\alpha}(t) + \frac{\left(S_F^{\alpha}(t)\right)^2}{2}$$

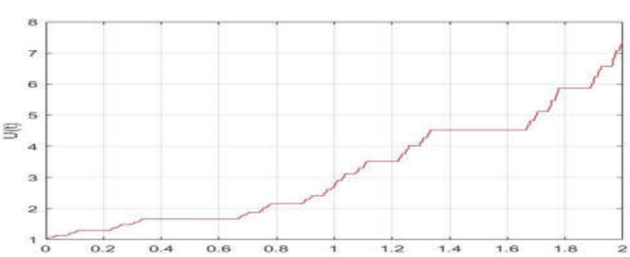
با ادامه این فرآیند، حاصل می‌شود:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(S_F^{\alpha}(t)\right)^k}{k!} \qquad (۶۱)$$

بنابراین با حد گرفتن از جواب بالا، جواب نهایی به صورت زیر فراهم می‌گردد:

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(S_F^{\alpha}(t)\right)^k}{k!} = \exp\left(S_F^{\alpha}(t)\right) \qquad (۶۲)$$

که جواب دقیق مساله شکل۱ می‌باشد.



شکل۱

مثال ۲: معادله شرودینگر فرکتال را بر روی مجموعه کانتور به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$D_{F,t}^{\alpha}\psi(x,t) = \quad k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + v(x)\psi(x,t), \psi(x,0) = e^{ix}, 0 < \alpha \leq 1, F = C^{\xi}, x \in F, t \geq 0 \qquad (۶۳)$$

برای راحتی می‌توانیم $v(x) = 0$ و $k = 1$ را انتخاب کنیم. پس خواهیم داشت:

$$D_{F,t}^{\alpha}\psi(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = 0,$$
$$\psi(x,0) = e^{ix}, 0 < \alpha \leq 1, F = C^{\xi}$$

حال قصد داریم جواب این معادله را با استفاده از روش تکرار تغییراتی فرکتال به دست آوریم.
برای این کار با استفاده از فرمول (۵۴) و m=1، فرمول تکرار تغییراتی تعمیم یافته فرکتال را به صورت زیر می‌سازیم.

$$\psi_{n+1}(x,t) = \psi_n(x,t) + \int_0^t \left\{\lambda\left(D_{F,t}^{\alpha}\psi_n(x,\tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_n(x,\tau)\right)\right\} d_F^{\alpha}\tau \qquad (۶۴)$$

با استفاده از شرط پایداری فرکتال $\delta^{\alpha}\tilde{\psi}_n = 0$ و اکسترمم کردن معادله (۶۵)، مقدار $\lambda = \quad 1$ بدست می‌آید. حال با قرار دادن مقدار λ در فرمول (۶۴) خواهیم داشت:

$$\psi_{n+1}(t) = \psi_n(x,t) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^{\alpha}\psi_n(x,\tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_n(x,\tau)\right) d_F^{\alpha}\tau \qquad (۶۵)$$

اکنون می‌توانیم شرط اولیه را به صورت $\psi_0(x,t) = \psi(x,0)$ در نظر گرفته و با این انتخاب در تابع تصحیح، تقریبات متوالی را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\psi_0(x,t) = \psi(x,0) = e^{ix}$$
$$\psi_1(x,t) = \psi_0(x,t) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^{\alpha}\psi_0(x,\tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_0(x,\tau)\right) d_F^{\alpha}\tau$$
$$= e^{ix} \quad \int_0^t e^{ix}\, d_F^{\alpha}\tau = e^{ix}\big(1 \quad S_F^{\alpha}(t)\big)$$
$$\psi_2(x,t) = \psi_1(x,t) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^{\alpha}\psi_1(x,\tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1(x,\tau)\right) d_F^{\alpha}\tau$$
$$= e^{ix}\big(1 \quad S_F^{\alpha}(t)\big) \quad \int_0^t \Big(e^{ix}\big(\quad 1 + 1 \quad S_F^{\alpha}(\tau)\big)\Big) d_F^{\alpha}\tau$$
$$= e^{ix}\Big(1 \quad S_F^{\alpha}(t) \quad \int_0^t \big(\quad 1 + 1 \quad S_F^{\alpha}(\tau)\big) d_F^{\alpha}\tau\Big)$$
$$= e^{ix}\left(1 \quad S_F^{\alpha}(t) + \frac{\left(S_F^{\alpha}(t)\right)^2}{2}\right)$$

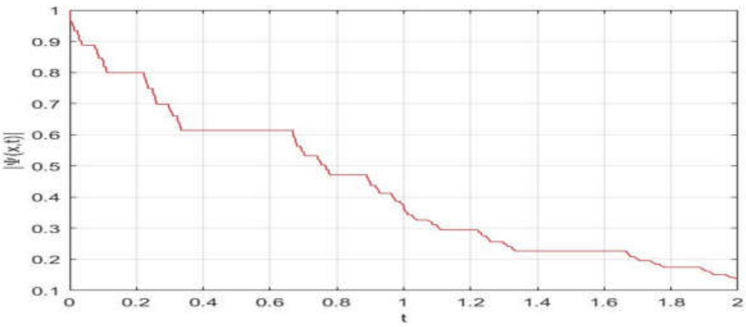
به همین ترتیب ادامه داده و بقیه تکرارها را محاسبه می‌کنیم. با ادامه این روند می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\psi_n(x,t) = e^{ix}\left(1 \quad S_F^{\alpha}(t) + \frac{\left(S_F^{\alpha}(t)\right)^2}{2} + \quad + \frac{\left(-S_F^{\alpha}(t)\right)^n}{n!}\right)$$

بنابراین پس از حد گرفتن از جواب تقریبی بالا برای $n \to \infty$، جواب نهایی به صورت زیر فراهم می‌گردد:

$$\psi(x,t) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(x,t) = e^{-ix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-S_F^{\alpha}(t)\right)^n}{n!} = exp(ix)exp(\quad S_F^{\alpha}(t)) = exp(ix \quad S_F^{\alpha}(t))$$

که جواب دقیق مسئله شکل ۲ می‌باشد.



شکل۲

مثال ۳: معادله KdV خطی فرکتال روی مجموعه کانتور به شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$D_{F,t}^{\alpha}\psi + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$
$$\psi(x,0) = exp(x),$$
$$0 < \alpha \leq 1, F = C^{\xi}, x \in F, t \geq 0. \qquad (۶۶)$$

می‌خواهیم جواب این معادله را با استفاده از روش تکرار تغییراتی تعمیم یافته فرکتال به دست آوریم. ابتدا با استفاده از فرمول (۵۴) و $m = 1$، فرمول تکرار تغییراتی تعمیم یافته فرکتال را به صورت زیر می‌سازیم:

$$\psi_{n+1}(x,t) = \psi_n(x,t) + \int_0^t \left\{\lambda\left(D_{F,t}^{\alpha}\psi_n(x,\tau) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_n(x,\tau) + \frac{\partial}{\partial x}\psi_n(x,\tau)\right)\right\} d_F^{\alpha}\tau \qquad (۶۷)$$

با استفاده از شرط پایداری فرکتال $\delta^{\alpha}\tilde{\psi}_n = 0$ و اکسترمم کردن معادله (۶۸)، مقدار $\lambda = \quad 1$ بدست می‌آید. حال با قرار دادن مقدار λ^{α} در فرمول (۶۷) خواهیم داشت:

$$\psi_{n+1}(x,t) = \psi_n(x,t) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^{\alpha}\psi_n(x,\tau) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_n(x,\tau) + \frac{\partial}{\partial x}\psi_n(x,\tau)\right) d_F^{\alpha}\tau \qquad (۶۸)$$

می‌توانیم شرط اولیه را به صورت $\psi_0(x,t) = \psi(x,0)$ در نظر بگیریم. با این انتخاب در تابع تصحیح تقریبات متوالی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\psi_0(x,t) = \psi(x,0) = exp(x)$$
$$\psi_1(x,t) = \psi_0(x,t) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^{\alpha}\psi_0(x,\tau) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_0(x,\tau) + \frac{\partial}{\partial x}\psi_0(x,\tau)\right) d_F^{\alpha}\tau$$
$$\psi_1(x,t) = exp(x) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^{\alpha}\psi_0(x,\tau) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_0(x,\tau) + \frac{\partial}{\partial x}\psi_0(x,\tau)\right) d_F^{\alpha}\tau$$
$$= exp(x) \quad \int_0^t 2\,exp(x) d_F^{\alpha}\tau = exp(x)\left(1 \quad 2S_F^{\alpha}(t)\right)$$
$$\psi_2(x,t) = \psi_1(x,t) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^{\alpha}\psi_1(x,\tau) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_1(x,\tau) + \frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x,\tau)\right) d_F^{\alpha}\tau$$
$$= exp(x)\left(1 \quad 2S_F^{\alpha}(t)\right) \quad \int_0^t \left(\quad 2\,exp(x) + 2\,exp(x)\left(1 \quad 2S_F^{\alpha}(t)\right)\right) d_F^{\alpha}\tau$$
$$= exp(x)\left(1 \quad 2S_F^{\alpha}(t)\right) + 4\,exp(x)\frac{\left(S_F^{\alpha}(t)\right)^2}{2} = exp(x)\left(1 \quad 2S_F^{\alpha}(t) + \frac{\left(2S_F^{\alpha}(t)\right)^2}{2}\right)$$

با ادامه این فرآیند، حاصل می‌شود:

$$\psi_n(x,t) = exp(x)\left(1 \quad 2S_F^\alpha(t) + \frac{\left(2S_F^\alpha(t)\right)^2}{2} + \quad + \frac{\left(-2S_F^\alpha(t)\right)^n}{n!}\right)$$

$$\psi_n(x,t) = exp(x)\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-2S_F^\alpha(t)\right)^k}{k!} \tag{۶۹}$$

بنابراین پس از حد گرفتن از جواب تقریبی بالا برای وقتی که $n \to \infty$، جواب نهایی به صورت زیر فراهم می‌گردد:

$$\psi(x,t) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x,t) = \exp(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\left(-2S_F^\alpha(t)\right)^k}{k!}\right) = \exp(x)\exp\left(\quad 2S_F^\alpha(t)\right) = \exp(x \quad 2S_F^\alpha(t)) \tag{۷۰}$$

مثال ۴: معادله KdV غیرخطی روی مجموعه کانتور با عملگرهای کسری موضعی را به صورت زیر

$$D_{F,t}^\alpha \psi + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$
$$\psi(x,0) = x, 0 < \alpha \le 1, F = C^\xi,$$
$$x \in F, t \ge 0. \tag{۷۱}$$

در نظر می‌گیریم.

می‌خواهیم جواب این معادله را با استفاده از روش تکرار تغییرات تعمیم یافته فرکتال به دست آوریم.

ابتدا با استفاده از فرمول (۵۴) و $m = 1$، فرمول تکرار تغییراتی تعمیم یافته فرکتال را به صورت زیر می‌سازیم:

$$\psi_{n+1}(x,t) = \psi_n(x,t) + \int_0^t \left\{\lambda\left(D_{F,t}^\alpha \psi_n(x,\tau) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_n(x,\tau) + \psi_n(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x}\psi_n(x,\tau)\right)\right\} d_F^\alpha\tau \tag{۷۲}$$

با استفاده از شرط پایداری فرکتال $\delta^\alpha\tilde{\psi}_n = 0$ و اکسترمم کردن معادله (۷۲)، مقدار $\lambda = \quad 1$ بدست می‌آید. حال با قرار دادن مقدار λ در فرمول (۷۲) خواهیم داشت:

$$\psi_{n+1}(x,t) = \psi_n(x,t) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^\alpha \psi_n(x,\tau) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_n(x,\tau) + \psi_n(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x}\psi_n(x,\tau)\right) d_F^\alpha\tau$$

می‌توانیم شرط اولیه را به‌صورت $\psi_0(x,t) = \psi(x,0)$ در نظر بگیریم. با این انتخاب در تابع تصحیح تقریبات متوالی به‌شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\psi_0(x,t) = \psi(x,0) = x$$

$$\psi_1(x,t) = \psi_0(x,t) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^\alpha \psi_0(x,\tau) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_0(x,\tau) + \psi_0(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x}\psi_0(x,\tau)\right) d_F^\alpha\tau$$

$$\psi_1(x,t) = x \quad \int_0^t x \;\; d_F^\alpha\tau = x\left(1 \quad S_F^\alpha(t)\right)$$

$$\psi_2(x,t) = \psi_1(x,t) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^\alpha \psi_1(x,\tau) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_1(x,\tau) + \psi_1(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x,\tau)\right) d_F^\alpha\tau = x\left(1 \quad S_F^\alpha(t)\right) \quad \int_0^t \left(\quad x + x\left(1 \quad S_F^\alpha(t)\right)^2\right) d_F^\alpha\tau = x\left(1 \quad S_F^\alpha(t) + \left(S_F^\alpha(t)\right)^2 \quad \frac{\left(S_F^\alpha(t)\right)^3}{3}\right)$$

$$\psi_3(x,t) = \psi_2(x,t) \quad \int_0^t \left(D_{F,t}^\alpha \psi_2(x,\tau) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_2(x,\tau) + \right.$$

$$\psi_2(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x,\tau)\Big)\, d_F^\alpha \tau =$$

$$x\left(1 \quad S_F^\alpha(t) + \left(S_F^\alpha(t)\right)^2 \quad \frac{\left(S_F^\alpha(t)\right)^3}{3}\right)$$

$$\int_0^t \Bigg(x(\quad 1 + 2S_F^\alpha(t) \quad \left(S_F^\alpha(t)\right)^2 +$$

$$x\Bigg(1 \quad S_F^\alpha(t) + \left(S_F^\alpha(t)\right)^2$$

$$\frac{\left(S_F^\alpha(t)\right)^3}{3}\Bigg)^2\Bigg)\, d_F^\alpha \tau$$

$$\psi_3(x,t) = x\Big(1 \quad S_F^\alpha(t) + \left(S_F^\alpha(t)\right)^2$$

$$\left(S_F^\alpha(t)\right)^3 + \frac{2}{3}\left(S_F^\alpha(t)\right)^4$$

$$\frac{1}{3}\left(S_F^\alpha(t)\right)^5 \quad + \frac{2}{9}\left(S_F^\alpha(t)\right)^6$$

$$\frac{1}{6\ 3}\left(S_F^\alpha(t)\right)^7\Big)$$

با ادامه این فرآیند جملات دیگری از این دنباله به دست می‌آید که جواب تقریبی معادله است. با توجه به همگرایی روش تکرار تغییراتی، هنگامی که $n \to \infty$، دنباله حاصل به جواب دقیق معادله میل خواهد کرد.

۵- نتیجه‌گیری

حسابان فرکتال یا F^α -حسابان یک چارچوب مناسب برای مدل‌سازی فرآیندهای مربوط به مکان و زمان فرکتال است که در رابطه با تشابهات نزدیک به حساب معمولی بهبود یافته است. همانند سایر روش‌های تکرار تغییراتی، روش تکرار تغییراتی فرکتال بسیار راحت بوده و قادر است پاسخ‌های دینامیکی پیچیده با عبارت‌های طولانی را در سیستم‌های غیرخطی حتی اگر بسیار بی‌نظم باشند را پیش‌بینی کند.

همان طور که در مثال‌های کاربردی ملاحظه می‌شود این روش نیز همانند سایر روش‌های تکرار تغییراتی حل معادلات خطی به جواب دقیق و در مسائل غیرخطی جواب تقریبی حاصل شده که با توجه به همگرایی روش تکرار تغییراتی وقتی n به بینهایت میل کند به جواب دقیق همگرا می‌شود.

حسابان فرکتال یک موضوع به نسبت جدید و به طور ساختاری الگوریتمی بوده و استفاده از کامپیوتر را برای محاسبات امکان پذیر می‌کند. با علم به اینکه مسائل زیادی در دنیای واقعی در علوم مختلف به طور غیرخطی و نامنظم بوده و حل آنها با حساب معمولی دشوار و یا گاها امکان پذیر نمی‌باشد. به عنوان مثال بسیاری از قوانین فیزیک موضعی بوده و حسابان فرکتال می تواند گزینه مناسبی برای حل مسائل مربوط به این علوم باشد. بنابراین می‌توان تعاریف، قضایا و روش‌های جدیدی را براساس حسابان فرکتال برای حل این گونه مسائل ارائه نمود. بررسی همگرایی و پایداری روش‌های جدید در حالت‌های مختلف فرکتال موضعی و غیر موضعی نیز می‌تواند یکی دیگر از موضوعات پژوهش‌های آتی باشد.

فهرست منابع

[1] Kolwankar, K.M., Gangal, A.D, Hölder exponents of irregular signals and local fractional derivatives, Pramana J. Phys., 1997, 49-68.

[2] Tatom F. B, The Relationship between Fractional Calculus and Fractals, Fractals, 3(1), 1995, 217-229.

[3] Golmankhaneh.A.K, On the calculus of the parameterized fractal curves, Turk. J. Phys. 41 (2017) 418-425.

[4] Golmankhaneh.A.K, Fernandez.A, Fractal Calculus of Functions on Cantor Tartan Spaces. Fractal Fract 2(30) (2008) 1-13.

[5] Golmankhaneh.A. K, Fernandez.A, Golmankhaneh. A. K, Baleanu.D, Diffusion on middle-X Cantor sets, Entropy, 20(504) (2018) 1-13.

[6] Parvate.A, Gangal.A.D, Calculus on fractal subsets of real-line I: Formulation, Fractals 17(01) (2009) 53-148.

[7] Parvate.A, Gangal.A.D, Calculus on fractal subsets of real line II: Conjugacy with ordinary calculus, Fractals 19(03) (2011) 271-290.

[8] Parvate.A, Satin.S, Gangal.A.D, Calculus on fractal curves in R^n, Fractals, 19(01) (2011), 15-27.

[9] Satin.S, Gangal.A.D, Langevin Equation on Fractal Curves, Fractals 24(03) (2016), 1650028.

[10] Ashrafi.s , Golmankhaneh. A.K., Energy Straggling Function by Fa -Calculus, ASME J. Comput. Nonlin. Dyn. 12(5) (2017), 051010.

[11] Golmankhaneh. A.K, Golmankhaneh. A.K, Baleanu. D, About Maxwell's equations on fractal subsets of R3, Cent. Eur. J. Phys., 11(6) (2013) 863-867.

[12] Golmankhaneh. A.K, On the Fractal Langevin Equation, Fractal Fract.,3(1):11 (2019) 1-9.

[13] Golmankhaneh.A.K, Statistical Mechanics Involving Fractal Temperature, Fractal Fract. 3(2):20 (2019) 1-12.

[14] Golmankhaneh.A.K, Baleanu.D, Fractal calculus involving gauge function. Commun. Nonlinear Sci, 37, (2016) 125-130.

[15] Golmankhaneh .A.K,Golmankhaneh. A.K, Baleanu.D, Lagrangian and Hamiltonian mechanics on fractals subset of real-line, Int.J. Theor. Phys., 52(11), (2013) 4210-4217.

[16] Golmankhaneh.A.K.Golmankhaneh. A.K, Baleanu.D,About Schr¨odinger equation on fractals curves imbedding in R3, Int. J. Theor. Phys., 54(4) (2015), 1275-1282.

[17] Golmankhaneh.A.K, Baleanu.D, Diffraction from fractal grating Cantor sets, J. Mod. Opt., 63(14) (2016), 1364-1369.

[18] Golmankhaneh.A.K, Cattani.C, Fractal Logistic Equation, Fractal Fract.,DOI:10.3390/fractalfract3030041.

[19] Golmankhaneh.A.K, Fazlollahi.V, Baleanu.D, Newtonian mechanics on fractals subset of real-line, Rom. Rep. Phys., 65(1) (2013) 84-93.

[20] Golmankhaneh.A.K,Fernandez.A, Random Variables and Stable

Distributions on Fractal Cantor Sets, Fractal Fract., 3(2):31(2019) 1-13.

[21] Golmankhaneh.A.K, Tunc.C, On the Lipschitz condition in the fractal calculus, Chaos, Soliton Fract. , 95 (2017), 140-147.

[22] Golmankhaneh.A.K, Tunc.C, Sumudu Transform in Fractal Calculus, Appl. Math. Comput., 350 (2019) 386-401.

[23] Golmankhaneh. A. K, KamalAli. K, Fractal Kronig-Penney model involving fractal comb potential, DOI: 10. 22124/Journal of Mathematical Modeling, Vol. 9, No. 3, 2021, pp. 331-345.

[24] Golmankhaneh. A. K, Fractal Calculus and its Applications, World Scientific, 2022. doi:10.1142/12988.

[25] Ashrafi. S, Golmankhaneh. A. K , Dimension of quantum mechanical path, chain rule, and extension of Landau's energy straggling method using F^α-Calculus, Turk. J. Phys., 42(2) (2018), 104-115