دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و چهارم، مهر و آبان ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حل مسائل چندهدفه هندسی با رویکرد اعداد صحیح

الهه حاجی‌محمدی[۱]، منصور سراج[۲]*، مریم مومنی[۱]، فاطمه کیانی[۱]

(۱) گروه ریاضی، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۸/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۳۱

چکیده

ترکیب مسائل چندهدفه هندسی با متغیرهای صحیح یکی از موضوعات جالب و قابل توجه در بسیاری از زمینه‌های بهینه‌سازی است که توجه بسیاری از محققین را در چند دهه اخیر به خود جلب کرده است. با توجه به اینکه در مسائل عملی و کاربردی نمی‌توان فقط متغیرهای حقیقی را در نظر گرفت، لذا در نظر گرفتن متغیرها به شکل صحیح از اهمیت ویژه‌ای در این نوع از مسائل برخوردار می‌باشد. هدف ما در این مقاله بررسی یک مسئله برنامه‌ریزی هندسی چندهدفه با متغیرهای عدد صحیح است. با استفاده از تکنیک تقریب تکه خطی مسئله را به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح آمیخته تبدیل می‌کنیم. سپس با روش وزن‌دهی مسئله را حل کرده و با استفاده از روش غیرخطی شاخه و کران، جواب صحیح را پیدا می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی هندسی، برنامه‌ریزی چندهدفه، برنامه‌ریزی عدد صحیح، تقریب تکه خطی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: msaraj@scu.ac.ir

مقدمه:

مسائل چند هدفه هندسی، نوع خاصی از مسائل بهینه‌سازی می‌باشد که برای حل نوع خاصی از مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی با محدودیت‌های خطی و یا غیرخطی کاربرد دارند. یکی از اهداف فرمول‌بندی مسائل هندسی تبدیل مسائل عملی و کاربردی مانند مسائل مهندسی و یا طراحی به فرم هندسی آنها می‌باشد. با توجه به اینکه در مسائل عملی و کاربردی نمی‌توان فقط متغیرهای حقیقی را در نظر گرفت، در نظر گرفتن متغیرها به شکل صحیح از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. بنابراین مسائل برنامه‌ریزی هندسی با متغیرهای صحیح از دسته مسائل مهم در ریاضیات می‌باشد. برای حل مسائل هندسی با متغیرهای صحیح تحقیقات بیشماری صورت گرفته است. در سال ۱۹۶۰، کاربردهای زیادی در زمینه‌های ریاضی، شیمی، مهندسی، آمار و اقتصاد و .... از مسائل هندسی مطرح شده است. بسیاری از مقالات بهینه‌سازی در زمینه مهندسی، علمی و کاربردهای آنها که شامل مسائل سیستم‌های غیرخطی با متغیرهای تصمیم گسسته و یا دینامیکی می‌باشند، نیز ارائه شده‌اند. همچنین در نظر گرفتن متغیرهای صحیح و سیستم‌های غیرخطی مسائل بهینه‌سازی در فضای گسسته را حل می‌نماید. امروزه بسیاری از مقالات مهم بهینه‌سازی شامل متغیرهای دو دویی و صحیح با سیستم‌های غیرخطی برای حل اینگونه مسائل ارئه شده‌اند. در مقالات متعددی روش‌هایی برای حل اینگونه از مسائل ارائه شده است. در سال ۱۹۷۷،دینکل و همکارانش یک الگوریتم صفحه برشی را ارائه کردند که برای مسائل برنامه‌ریزی هندسی با توابع پوزینومیال کاربرد دارد.[۱] در سال ۱۹۹۹، آلوس یک مسئله چندهدفه هندسی با متغیرهای صحیح را با روش نقطه مرجعی و با استفاده از الگوریتم شاخه و کران حل نمود.[۲] همچنین الگوریتم‌ها و کاربردهای متفاوتی برای مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی صحیح آمیخته توسط لیفر در سال ۲۰۰۹ بیان شد.[۳] وندل ملو و همکارانش در سال ۲۰۱۴ الگوریتمی ارائه کردند که تعمیم‌یافته الگوریتم شاخه و کران برای مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌باشد.[۴] همچنین وسترلوند و همکارانش در مقاله‌ای در سال ۲۰۰۸ الگوریتمی برای حل مسائل برنامه‌ریزی هندسی با اعداد صحیح ارائه کردند که در آن از مجموعه مرتب خاص نوع دوم[۲]استفاده نموده است.[۵] در سال‌های اخیر برخی روش‌های نسبی و سراسری برای حل مسائل هندسی در مقالات متعددی مطرح شده است. شن و همکارانش در مقاله‌ای در سال ۲۰۰۴ بهینه‌سازی سراسری برای مسائل هندسی با توابع سیگنومیال مطرح کردند که در آن از آزادسازی خطی استفاده شده است. [۶] همچنین لاندل روش بهینه‌سازی سراسری برای مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی با متغیرهای صحیح در سال ۲۰۱۸ ارائه داد. [۷]

تقریب محدب توابع پوزینومیال:

تقریب محدب تابع پوزینومیال یکی از مباحث مهم و کاربردی در روش‌های بهینه‌سازی است. بهترین تقریب محدب باید شامل حداقل تعداد متغیرها و محدودیت‌ها باشد. تقریب توانی منفی یکی از روش‌های مهم و کاربردی محدب‌سازی توابع پوزینومیال می‌باشد.برای بیان این روش گزاره‌ی زیر را بیان می‌نماییم.

گزاره ۱:

تابع مونومیال دو بار مشتق‌پذیر زیر را در نظر بگیرید $f(x) = \prod_{i=۱}^{n} x_i^{\gamma_i}$ که $x = \left(x_۱, x_۲, \dots, x_n\right)$. این تابع محدب می‌باشد اگر $\gamma_i < ۰ ، \forall x_i > ۰$.

[۲] special ordered set(SOS۲)

با توجه به گزاره‌ی فوق، برای محدب کردن یک تابع مونومیال می‌توان از تبدیل توانی منفی با توجه به تبصره زیر استفاده کرد.

تبصره ۱:

اگر $j \notin I$ و $I = \{k: \gamma_k < ۰ ، k = ۱،۲، \dots ، n\}$ اگر $\gamma_j > ۰$ آنگاه می‌توان $f(x)$ را به $f(x، y) = \prod_{i\in I} x_i^{y_i} \prod_{j\notin I} y_j^{\gamma_j/\alpha_j}$ تبدیل کرد بطوریکه $y_j = L\left(x_j^{-\alpha_j}\right)$ و $\alpha_j > ۰$ و $L\left(x_j^{-\alpha_j}\right)$ تابع تقریب تکه خطی $x_j^{-\alpha_j}$ می‌باشد. آنگاه $f(x، y)$ به ازای $x_i > 0, i \in I, y_j > ۰، j \notin I$ طبق گزاره ی فوق یک تابع محدب می‌باشد.

گزاره ۲:

فرض کنید $\overline{x_i}$،$\underline{x_i}$ به ترتیب یک کران بالا و پایین x_i باشند و ε دقت کامپیوتر باشد. کمترین مقدار ممکن α_j به گونه‌ای که فاصله محاسباتی بین تابع تبدیل معکوس و تقریب تکه خطی وجود داشته باشد را به صورت زیر می‌توان بدست آورد:

i) If $(\overline{x}_j.\underline{x}_j) <= ۰$ then $\alpha_j >= ۲\sqrt{\varepsilon}/ (Ln\ (\overline{x}_j/\underline{x}_j))$.

ii) If $(\overline{x}_j.\underline{x}_j) > ۰$ then $\alpha_j >= (۴\ Ln(\overline{x}_j/\underline{x}_j) - \sqrt{G}/(۲\ Ln(\overline{x}_j/\underline{x}_j).\ (\overline{x}_j.\ \underline{x}_j).$ G=۱۶

$(\overline{x}_j/\underline{x}_j).\ (\overline{x}_j.\ \underline{x}_j) - ۲\sqrt{\varepsilon}\ (\overline{x}_j.\underline{x}_j)$ and $\varepsilon <= (Ln\ (\overline{x}_j/\underline{x}_j)/ Ln\ (\overline{x}_j.\underline{x}_j))^{۲}$.

پس از یافتن کمترین مقدار α_j، باید تابع تبدیل معکوس را با تکنیک تقریب تکه خطی تقریب بزنیم. یک تابع مزدوج برای مدل‌سازی تابع تقریب تکه خطی به صورت زیر می‌باشد:

تبصره ۲:

تابع مزدوج $\theta = [\log_۲ m]$ ، ⍰ $B:\left\{۱، \dots ، m\right\} \to \left\{۰،۱\right\}$ که در آن بردارهای B و B(p+۱) حداکثر در یک مولفه به ازای $p \in \left\{۱،۲، \dots ، m + ۱\right\}$، متفاوت هستند، را می‌توان ساخت بطوریکه

$B(p) = (u۱ \dots u⍰) \forall\ uk \in \left\{۰،۱\right\}، k = ۱، \dots ، ⍰ ، B(۰) = B(۱).$

برخی از اصطلاحات مورد نیاز در تبصره ۲ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$S^+(p) = \{p\ |\forall B(P) and\ B(p+۱)، uk = ۱، p = ۱، \dots ، m-۱\} \cup \{p|\forall\ B(p)، uk = ۱، p \in \{۰ \dots ، m\}\}$

$S^-(p) = \{p\ |\ \forall B(P) and\ B(p+۱), uk = ۰, p = ۱, \dots , m-۱\} \cup \{p|\forall\ B(p)، uk = ۰، p \in \{۰، \dots ، m\}\}$

برای تقریب یک تابع تک متغیره با روش پیشنهادی ویلما، قضیه زیر را بیان می‌کنیم:

قضیه۱: تابع تک متغیره f(x) را در نظر می‌گیریم به طوریکه $a_0 \leq x \leq a_m$.تقریب تکه خطی تابع f(x) را با $L(f(x))$ نشان می‌دهیم که $a_0<a_1<\ldots<a_m$ ،m+۱ نقطه شکست $L(f(x))$ می‌باشد.$L(f(x))$ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$L(f(x)) = \sum_{p=0}^{m} f(a_p)\,\lambda_p \qquad x = \sum_{p=0}^{m} a_p\lambda_p \qquad \sum_{p=0}^{m} \lambda_p = 1 \qquad (1)$$

$$\sum_{p\in s+(k)} \lambda_p \leq u_k \qquad \sum_{p\in s-(k)} \lambda_p \leq 1 - u_k \qquad \forall \lambda_p \in R_+,\ \forall u_k \in \{0,1\}$$

الگوریتم شاخه و کران:

الگوریتم شاخه و کران مسائل غیرخطی توسط داکین در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید. قبل از بیان این الگوریتم فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Min\ f(x,y) \\ &s.t \quad g_i(x,y) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, q \\ &\qquad h_i(x,y) = 0 \qquad i = 1 \ldots l \qquad\qquad (2) \\ &\qquad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \quad y \in Y \in conv(Y)^m \end{aligned}$$

بطوریکه

i. $X \subseteq \mathbb{R}^m$ یک مجموعه محدب فشرده و Y مجموعه اعداد صحیح متناهی می‌باشد.

ii. $g_i(i = 1, \ldots, q)$ توابع محدب و مشتق‌پذیری از (x, y) و $h_i(i = 1, \ldots, q)$ توابع خطی از (x, y) می‌باشد.

iii. برخی از مشخصه‌های قیدی برنامه‌ریزی غیرخطی صدق می‌کنند.

الگوریتم با حل آزادسازی مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی ۲ آغاز می‌شود. فرض‌های i,ii بیان می‌کند که هر جواب نسبی از مسئله غیرخطی یک جواب مطلق نیز می‌باشد که این نتیجه با بکارگیری شرایط KKT بطور مستقیم نیز بدست می‌آید. یک شرط کافی برای فرض iii این است که جواب بهینه هر زیرمسئله شدنی غیرخطی یک نقطه منظم می‌باشد و این بدین معنی است که بردارهای گرادیان محدودیت‌های فعال مستقل خطی می‌باشد.

انشعاب:

اگر جواب $\acute{x}$ از مسئله $NLP(-\infty,\infty)$ یک جواب غیرصحیح شدنی باشد آنگاه روی هر متغیر غیرصحیح انشعاب صورت می‌گیرد و آنها را $\acute{x}_i$ می‌نامیم، که شاخه‌های دو گره غیرخطی جدید را نشان می‌دهد. دو کران جدید را به صورت $(l^+,u^+) =: \left(l,u\right),\left(l^-,u^-\right) =: (l,u)$ نشان می‌دهیم. سپس کران‌های مربوطه را برای متغیرهای انشعاب به صورت زیر تصحیح می‌کنیم:$NLP\left(l^+,u^+\right)$، $NLP\left(l^-,u^-\right)$. $l_i^+ := \lceil \acute{x}_i \rceil$ ، $u_i^- := \lfloor \acute{x}_i \rfloor$.

شرایط توقف:

شرایط توقف الگوریتم برای روش شاخه و کران مسائل غیرخطی بر اساس بهینه بودن و شدنی بودن مسائل غیرخطی است. فرض می‌کنیم u یک کران بالا برای مسئله بهینه است. در ابتدا $u=\infty$ را در نظر می‌گیریم.

- **گره شدنی:**

اگر هر گره NLP(l,u) شدنی باشد، پس هر مسئله در زیردرختی که در این گره ریشه دارد نیز شدنی است. بنابراین می‌توان آن را قطع کرد و یا به عبارت دیگر می‌توان گفت که این گره به عمق رسیده است.

- **گره شدنی صحیح**:

اگر جواب $x^{(l،u)}$ از $NLP(l،u)$ صحیح باشد آنگاه یک جواب جدید به دست می‌آوریم اگر $f(x^{(l،u)}) < u$ آنگاه قرار می‌دهیم :

$f\left(x^{(l،u)}\right) = u$ و $x^* = x^{(l،u)}$

- **کران بالای گره‌های مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی:**

اگر جواب بهینه $NLP(l،u)$ برابر با $f\left(x^{(l،u)}\right)$ باشد (یعنی کران پایین مقدار بهینه)،آنگاه توسط کران بالا محصور می‌شود اگر $f(x^{(l،u)}) \geq u$ ، سپس این گره به‌عمق رسیده است زیرا جواب صحیح بهتری پیدا نمی‌شود.

الگوریتم شاخه و کران مسائل غیرخطی صحیح آمیخته:

قضیه۲: جواب مسئله شاخه و کران زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&min f(x)\\&s.t\ \ g(x) \leq ۰\\&x \in X ، x_i \in \mathbb{Z}\ \ \forall i \in I \quad\ I \subseteq \{۱،۲، \dots ،n\}\end{aligned}$$

فرض کنید که f و g دو مسئله محدب، پیوسته و دو بار مشتق‌پذیر باشند، و X مجموعه‌ای چند وجهی کران‌دار باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم شاخه و کران پس از تعداد متناهی جستجو به یک جواب بهینه می‌رسد و متوقف می‌شود و یا نشان می‌دهد که مسئله نشدنی است.

الگوریتم ۱:

برای $۰ < \varepsilon$ قرار دهید $U = \infty$, و $\phi\ \mathcal{H} =$
((NLP(-∞، + ∞)) را به پشته $\left(-\infty، + \infty\right)$ $\mathcal{H} = \mathcal{H} \cup NLP$ اضافه کنید.
تا زمانیکه $\mathcal{H} \neq \phi$ انجام بده
مسئله $\left(NLP(l;\ u)\right)$ را از پشته $\mathcal{H} = \mathcal{H} - (NLP(l;\ u)$ حذف کنید.
مسئله $(NLP(l;\ u))$ را حل کنید و جواب را $x^{(l،u)}$ قرار دهید.
اگر $(NLP(l;\ u))$ نشدنی بود آنگاه
گره را می‌توان به دلیل نشدنی بودن قطع کرد.
در غیر این صورت اگر $f(x^{(l،u)}) > U$ آنگاه
گره را می‌توان قطع کرد زیرا کران بالایی بر آن غالب است.
در غیر اینصورت اگر $\boldsymbol{x_I^{(l،u)}}$ صحیح باشدآنگاه
جواب $x^* = x^{(l،u)}، u = f(x^{(l،u)})$ را بروز رسانی کنید
در غیر اینصورت روی متغیر $\left(\boldsymbol{x_i^{(l،u)}}، \boldsymbol{l}، \boldsymbol{u}، \mathcal{H}\right)$ شاخه زنی کنید. به الگوریتم ۲ مراجعه کنید.

انشعاب روی متغیرهای کسری:

الگوریتم ۲:

روی متغیر $\left(\boldsymbol{x_i^{(l،u)}}،\boldsymbol{l}،\boldsymbol{u}،\mathcal{H}\right)$ شاخه زنی کنید S $\leftarrow$
// روی قسمت کسری $\boldsymbol{i \in I}$، $\boldsymbol{x_i^{(l،u)}}$ شاخه زنی کنید//
قرار دهید : $u^+ = u$ ، $l_i^+ = \left\lfloor x_i^{(l،u)} \right\rfloor$، $l^- = l$، $u_i^- = \left\lfloor x_i^{(l،u)} \right\rfloor$
$NLP\left(l^-،u^-\right)$ و $NLP\left(l^+،u^+\right)$ را به پشته $\mathcal{H} = \mathcal{H}\{NLP\left(l^-،u^-\right)،NLP\left(l^+،u^+\right)\}$ اضافه کنید.

مسئله برنامه‌ریزی چند هدفه هندسی صحیح آمیخته:

فرم کلی یک مسئله برنامه‌ریزی هندسی چند هدفه به صورت زیر می‌باشد:

$$\min f_{\cdot}^{k}(x) = \sum_{t=1}^{T_{\cdot k}} c_{\cdot t}^{k} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha}\, \alpha_{tj}^{k}$$

$$s.t \;\; g_i(x) = \sum_{t=1}^{T_t} c_{it} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{itj}} \leq 1$$

$$x_{\mathrm{j}} \geq 0$$

$$j = 1, \ldots, p \quad i = 1,2, \ldots\ldots n \quad k = 1 \ldots p \qquad x \in X \cap \mathbb{Z}\mathrm{n}$$

روش‌های متعدی برای حل مسائل چند هدفه وجود دارد از جمله روش اپسیلون قید و ورش وزن‌دهی. در این مقاله به بررسی روش وزن‌دهی برای حل این دسته از مسائل می‌پردازیم:

روش وزن‌دهی:

یک مسئله وزن‌دهی به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$Min\; w\,(z(x)) \triangleq \sum_{i=1}^{k} w_{\mathrm{I}}\, \mathrm{z_i(x)} \qquad w = (w_1 \ldots \ldots w_{\mathrm{k}}) \geq 0$$

روش وزن‌دهی برای مسائل غیرمحدب جوابگو نمی‌باشد زیرا در مسائل غیرمحدب بردارهای وزنی عمود بر صفحه منحصر به فرد نخواهند بود لذا این روش برای مسائل غیرمحدب کاربرد نخواهد داشت و باید با احتیاط استفاده شود.

قضیه۳: اگر x^* یک جواب بهینه برای مسئله وزن‌دهی به ازای $w>0$ باشد، x^* یک جواب بهینه پاراتو برای برنامه‌ریزی چند هدفه می‌باشد.[۲۲]

قضیه ۴: اگر x^* یک جواب بهینه پاراتو برای مسئله برنامه‌ریزی چند هدفه باشد، آنگاه x^* یک جواب بهینه برای مسئله وزن‌دهی به ازای $W= (w_1, \ldots, w_k) \geq 0$ است.[۲۲]

در روش وزن‌دهی، تصمیم‌گیرنده نقش مهمی را در به دست آوردن مقدار تابع هدف ایفا می‌کند. در این فرآیند، زمانی که تصمیم‌گیرنده مقادیر مختلف وزن‌های مختلف را نشان می‌دهد، مسئله مربوطه برای تولید جواب بهینه پاراتو حل می‌شود، تصمیم‌گیرنده می‌تواند بهترین جواب بهینه را که در مرز پاراتو قرار دارد، انتخاب کند.

مثال های عددی:

مثال ۱:

$$Min\ ۰.۴\, x_{۱}^{۰,۶۷}\, x_{۷}^{-۰,۶۷} + ۰.۴ x_{۴}^{۰,۶۷} x_{۹}^{-۰,۶۷} + ۱۰ - x_{۱} - x_{۲}$$

$$Min\ ۰.۰۵۸۸ x_{۵} x_{۷} + ۰.۱ x_{۱}$$

$$s.t\quad ۴ x_{۳} x_{۵}^{-۱} + ۲ x_{۳}^{-۰,۷۱} x_{۵}^{-۱} + ۰.۰۵۸۸ x_{۳}^{-۱,۳} x_{۷} \leq ۱$$

$$۴ x_{۴} x_{۶}^{-۱} + ۲ x_{۴}^{-۰,۷۱} x_{۶}^{-۱} + ۰,۰۵۸۸ x_{۴}^{-۱,۳} x_{۸} \leq ۱$$

$$۰,۱ \leq x_{i} \leq ۱۰ \qquad x_{۱}, x_{۳}, x_{۴} \text{ is integer}$$

مسئله محدب با روش تقریب توانی منفی و تقریب تکه خطی به صورت زیر می‌باشد:

$$Min\ ۰.۴\, y_{۱}^{-۰,۶۷}\, x_{۷}^{-۰,۶۷} + ۰.۴ y_{۲}^{-۰,۶۷} x_{۸}^{-۰,۶۷} + ۱۰ - x_{۱} - x_{۲}$$

$$Min\ ۰.۰۵۸۸\, y_{۵}^{-۱} y_{۷}^{-۱} + ۰.۱ x_{۱}$$

$$s.t\quad ۴ y_{۳}^{-۱} x_{۵}^{-۱} + ۲ x_{۳}^{-۰,۷۱} x_{۵}^{-۱} + ۰.۰۵۸۸ x_{۳}^{-۱,۳} y_{۷}^{-۱} <= ۱$$

$$۴ y_{۴}^{-۱} x_{۶}^{-۱} + ۲ x_{۴}^{-۰,۷۱} x_{۶}^{-۱} + ۰.۰۵۸۸ x_{۴}^{-۱,۳} y_{۸}^{-۱} <= ۱$$

$$۰,۱ <= Xi <= ۱۰ \qquad ۰,۱ <= yi <= ۱۰ \qquad Yi = L(xi^{-\beta_j}) \quad i = ۱, ۳،۴،۵،۷$$

$$x_{۱}, x_{۳}, x_{۴} \in \mathbb{Z}^n$$

عبارت $y_i = L(xi^{-\beta_j})$ تابع تکه خطی $x_i^{-\beta_j}$ می باشد. مطابق با گزاره ۲ مقدار β_i را محاسبه می‌کنیم (در این مسئله $\beta_i = ۱$ در نظر می‌گیریم).

پس از حل مسئله از روش وزن‌دهی و بکارگیری الگوریتم شاخه و کران غیرخطی، با استفاده از نرم افزار لینگو داریم:

جدول ۱: نتایج حاصل از مثال ۱

	$W_۱$=۰,۹ $W_۲$=۰,۱	$W_۱$=۰,۱ $W_۲$=۰,۹	$W_۱$=۰,۲ $W_۲$=۰,۸	$W_۱$=۰,۸ $W_۲$=۰,۲	$W_۱$=۰,۷ $W_۲$=۰,۳	$W_۱$=۰,۳ $W_۲$=۰,۷	$W_۱$=۰,۶ $W_۲$=۰,۴	$W_۱$=۰,۴ $W_۲$=۰,۶	$W_۱$=۰,۵ $W_۲$=۰,۵
Objective value	-۷,۹۷۰۵۸۰	۱,۰۱۳۸	۰,۸۹۶۱۲۴۹	-۶,۷۶۷۶۱۶	-۵,۵۹۹۹۳۲	-۱,۱۴۹۷۱	-۴,۴۵۹۸۸۶	-۲۲۴۳۴۴۰	-۳,۳۴۱۹۲۷
U_i=۰	I=,,۲،۴،۶،۷, ۸،۱۰	I=۱،۲،۴،۶،۷، ۸،۱۰	I=,۲،۴،۶،۷، ۸،۱۰	I=۱،۲،۴،۶،۷، ۸،۱۰	I=۱،۲،۴،۶،۷، ۸،۱۰	I=۱،۲،۴،۶، ۷،۸	I=۱،۲،۴،۶،۷، ۸،۱۰	I=۱،۲،۴،۶،۷، ۸،۱۰	I=۱،۲،۴،۶،۷، ۸،۱۰
U_i=۱	I=۱،۳،۵،۹	I=,۳،۵, ۹	I=۱،۳،۵, ۹	I=۳،۵،۹	I=۳،۵،۹	I=۳،۵, ۹،۱۰	I=۳،۵،۹	I=۳،۵, ۹	I=۳،۵, ۹
$Y_۱$	۰,۱	۰,۲۵	۰,۲۵	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱
$Y_۲$	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
$Y_۳$	۰,۱	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵
$Y_۴$	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۵
$Y_۵$	۰,۱	۰,۱۰۳۹۳۵۰	۰,۱۰۳۹۳۵	۰,۱۰۱۰۰۱۱	۰,۱۰۲۲۳۷۲	۰,۱۰۳۹۳۵	۰,۱۰۳۰۲۵۸	۰,۱۰۳۹۳۴۹	۰,۱۰۳۶۰۶۵
$Y_۶$	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱
$Y_۷$	۰,۳۰۷۱۹۳۷	۰,۵	۰,۵	۰,۳۳۹۷۳۷۸	۰,۳۹۱۹۳۴۴	۰,۵	۰,۴۳۵۳۱۱۳	۰,۵	۰,۴۷۴۴۱۵۶
$Y_۸$	۱,۵۰۶۱۴۱	۱,۵۰۶۱۴۱	۱,۵۰۶۱۴۱	۱,۵۰۶۱۴۱	۱,۵۰۶۱۴۱	۱,۵۰۶۱۴۱	۱,۵۰۶۱۴۱	۱,۵۰۶۱۴۱	۱,۵۰۶۱۴۱
$X_۱$	۱۰	۷	۷	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
$X_۲$	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۲	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
$X_۳$	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲
$X_۴$	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲
$X_۵$	۰,۱	۹,۶۸۵۲۰۱	۹,۶۸۵۲۱۱	۹,۹۱۹۹۱۲	۹,۸۲۱۰۲۷	۹,۶۸۵۲۱۰	۹,۷۵۷۳۳۹	۹,۶۸۵۲۱۰	۹,۷۱۱۴۷۸
$X_۶$	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰

X_7	۳,۵۴۲۴۵۱	۲	۲	۳,۲۸۲۰۹۷	۲,۸۶۴۵۲۵	۲	۲,۵۱۱۷۵۰۹	۲	۰,۴۷۴۴۱۵۶
X_8	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
λ_0	۰	۰,۳۷۵	۰,۳۷۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_1	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_2	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_3	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_4	۱	۰,۶۲۵	۰,۶۲۵	۱	۱	۱	۱	۱	۱
λ_5	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
λ_6	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_7	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_8	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_9	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_{10}	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
λ_{11}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_{12}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_{13}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_{14}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_{15}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_{16}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_{17}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_{18}	۰	۰,۱۵۷۳۹۹۵	۰,۱۵۷۳۹۴	۰,۴۰۰۴۳۸۳E-۰۱	۰,۸۹۴۸۶۵۵E-۰۱	۰,۱۵۷۳۹۵	۰,۱۲۱۰۳۰۳	۰,۱۵۷۳۹۴۹	۰,۱۴۴۲۶۱۰
λ_{19}	۱	۰,۸۴۲۶۰۰۵	۰,۸۴۲۶۰۵	۰,۹۵۹۹۵۶۲	۰,۹۱۰۵۱۳۴	۰,۸۴۲۶۰۵	۰,۸۷۸۹۶۹۷	۰,۸۴۲۶۰۵۱	۰,۸۵۵۷۳۹۰
λ_{20}	۰,۲۲۸۷۷۴۶	۱	۱	۰,۳۵۸۹۵۱۳	۰,۵۶۷۷۳۷	۱	۰,۷۴۱۲۴۵۳	۱	۰,۸۹۷۶۶۲۴
λ_{21}	۰,۷۷۱۲۲۵۴	۰	۰	۰,۶۴۱۰۴۸۸۷	۰,۴۳۲۲۶۲۵	۰	۰,۲۵۸۷۵۴۷	۰	۰,۱۰۲۳۳۷۶
λ_{22}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_{23}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
λ_{24}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

طبق جدول ۱ موثرترین وزن ها $W_1=۰,۹$ و $W_2=۰,۱$ است، و این بدین معنی است که اولویت تابع هدف اول بیشتر از تابع هدف دوم است.

نتیجه‌گیری:

در این مقاله، از روش تقریب تکه خطی برای تبدیل یک مسئله برنامه‌ریزی چند هدفه هندسی مختلط غیرمحدب به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی محدب صحیح آمیخته استفاده شده است. پس از محدب‌سازی، مسئله با روش وزن‌دهی حل می‌شود. سپس از الگوریتم شاخه و کران غیرخطی برای بدست آوردن جواب‌های صحیح استفاده می‌کنیم.

فهرست منابع

۱. Dinkel J.J, Ellott W.H, and Kochenberger G. A. Computational aspects of cutting – plane algorithms for geometric programming problems. Springer, Mathematical programming, ۱۳ (۱): ۲۰۰-۲۲۰ (۱۹۷۷)

۲. Alves M.J., and Climaco J. An interactive reference point approach for multi-objective mixed-integer programming using branch-and-bound. Elsevier, European journal of operational research, ۱۲۴(۳۱): ۴۷۸-۴۹۴ (۲۰۰۰).

۳. Leyffer J., Linderoth J., Luedtke J., Andrew M., and Muson M. Application and algorithms for mixed integer non-linear programming. Journal of physics, conference series ۱۸۰(۱),(۲۰۰۹)

۴. Melo W., Fampa M., and Raupp F. Integrating non-linear branch-and-bound and outer approximation for convex mixed integer non-linear programming. Springer, Journal of global optimization ۶۰(۲): ۳۷۳-۳۸۹(۲۰۱۴)

۵. Dua V. Mixed integer polynomial programming. Computer and chemical engineering, ۷۲:۳۸۷-۳۹۴(۲۰۱۵)

۶. Lundell A., and Westerlund T. solving global optimization problems using reformulations and signomial transformation. Elsevier, Computer and chemical engineering, ۱۱۶: ۱۲۲-۱۳۴(۲۰۱۸)

۷. Shen P., and Zhang K. Global optimization of signomial geometric programming using linear relaxation. Elsevier, Applied mathematics and computational, ۱۵۰(۱): ۹۹-۱۱۴(۲۰۰۴)

۸. Lundell A., Westerlund J., and Westerlund T. Some transformation techniques with applications in global optimization. Springer, Journal of global optimization, ۴۳ (۲-۳): ۳۹۱-۴۰۵(۲۰۰۹)

۹. Ansari M.A., and Hasanifard F. Solution of mixed integer nonlinear and non-convex optimization problem by convexification methods based on special ordered sets. (۱):۷۱-۸۵(۲۰۱۷)

۱۰. Lundell A., Skjä l A., and Westerlund T. A reformulation framework for global optimization. Springer, Journal of global optimization, ۵۷(۱):۱۱۵-۱۴۱(۲۰۱۳)

۱۱. Ali F.M. Technique for solving multi-objective nonlinear programming using differential equations approach. Journal of information and optimization sciences, ۱۸ (۳): ۳۵۱-۳۵۷(۱۹۷۷)

۱۲. Roy T.K. Multi-objective geometric programming and its application in an inventory model. Fuzzy Multi-Criteria Decision Making: ۵۳۹-۵۶۶(۲۰۰۸)

۱۳. Ehrott M.A discussion of secularization techniques for multiple objective integer programming .Annals of operation research ۱۴۷(۱): ۳۴۳-۳۶۰(۲۰۰۶)

۱۴. Ojha A, and Biswal K. Multi-objective geometric programming problem with weighted mean method. arXiv preprint arXiv: ۱۰۰۳,۱۴۷۷(۲۰۱۰)

۱۵. Bazikar F, and saraj M .solving linear multi-objective geometric problems via reference point approach.Sains Malaysian ۴۳(۸): ۱۲۷۱-۱۲۷۴(۲۰۱۴)

۱۶. Tsai J.F., and Lin M.H. An efficient global approach for posynomial geometric programming problems. Informs journal on computing۲۳ (۳): ۴۸۳-۴۹۲(۲۰۱۱)

۱۷. Forest J, and Tomlin J. Branch-and bound, integer and non-integer programming. Annals of operation research ۱۴۹(۱): ۸۱-۸۷(۲۰۰۷)

۱۸. Hemmeck R, Koppe M, Lee J, and Weismantel R. Non-linear integer programming.۵۰ Years of integer programming: ۵۶۱-۶۱۸(۲۰۱۰)

۱۹. Belotti P, Kriches C, Leyffer S, Linderott J, Luedtke J, and Mahajon A. mixed integer non-linear optimization. Publish by Cambridge University (۲۰۱۳)

۲۰. Tsang C.L., Zhan Y, Zheng Q.P., and Kumar M. A mixed integer linear programming formulation generalized geometric programming using piece-wise linear approximation. European journal of operational research ۲۴۵(۲):۳۶۰-۳۷۰(۲۰۱۵)

۲۱.Boyd S, Kim S.J., Vandenbergh L, and Hassibi A. A tutorial on geometric programming. Optimization and engineering۸ (۱): ۱-۶۷(۲۰۰۷)

۲۲. Steure R.E., and Wiley. Multiple criteria optimization: theory, computation, and application. New York,(۱۹۸۶)

۲۳.Hatami-Marbini A ,Rostamy-Malkhalifeh M, Agrell PJ,Tavana M.Extended symmetric and asymmetric weight assignment methods in data envelopment analysis. computers and industrial engineering ۸(۷):۶۲۱-۶۳۱(۲۰۱۵)

۲۴.Razipour-Ghalehjough S, Hosseinzadeh lotfi F ,jahanshahloo G.Finding closest target for bank branches in the presence of weight restrictions using data envelopment analysis.

۲۵. Z. Mousavi۱, M. Saraj , Multi Objective Geometric Programming with Interval Coefficients: A Parametric Approach. Earthline Journal of Mathematical Sciences,Volume ۲, Number ۲, ۲۰۱۹, Pages ۳۹۵-۴۰۷