دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هفتم، مرداد و شهریور ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

متریک‌پذیری پلی‌گروه‌های توپولوژیکی

مهرداد کهرازه[۱]، جواد جمالزاده[۲]*

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۲۹   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۰۹

چکیده

یکی از مهم‌ترین مفاهیم توپولوژیکی، متریک‌پذیری است. هدف مطالعات مربوط به متریک‌پذیری بررسی شرایطی برای وجود یک متر مانند d است که توپولوژی به دست آمده از آن، با توپولوژی اولیه یکسان باشد. در این مقاله قصد داریم پلی‌گروه‌های توپولوژیکی را متریک‌پذیرسازیم. این مهم را به کمک تعریف پیش‌نرم روی پلی‌گروه‌های توپولوژیکی انجام می‌دهیم. در نهایت، قضیه اساسی متریک‌پذیری را برای پلی‌گروه‌های توپولوژیکی اثبات می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: متریک‌پذیری، پلی‌گروه توپولوژیکی، پیش‌نرم.

۱- مقدمه

یکی از مهمترین موضوعات مطرح شده روی فضاهای توپولوژیک، بحث متریک‌پذیری و نرم روی آن‌ها است و دلیل آن، خواص توپولوژیکی گسترده‌ی فضاهای متریک و نرم‌دار است به‌خصوص در ساختارهای جبری توپولوژیک که نزدیکی خاصی با فضاهای برآمده از آن دارد. به‌عنوان مثال، در گروه‌های توپولوژیک به‌عنوان یک ساختار جبری توپولوژیک خواص بسیار نزدیکی با فضاهای متریک و نرم‌دار، مانند کاملا منظم بودن، هاسدورف بودن و ... دارد.

از جهت متریک‌پذیری نیز یک قضیه‌ی شگفت‌انگیز به نام قضیه‌ی بیرخوف-کاکوتانی وجود دارد که بیان می‌کند، یک گروه توپولوژیک متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر شمارای نوع اول باشد.[۲]

با توجه به اینکه پلی‌گروه‌های توپولوژیکی یک فضای توپولوژیکی می‌باشند، لذا در این مقاله بر آن شده‌ایم که ساختار مشابه با قضیه‌ی بیرخوف-کاکوتانی را ارائه دهیم تا بتواند به کمک پیش‌نرم موارد مشابهی با گروه‌های توپولوژیک را ارائه نماید و ساختار پلی‌گروهای توپولوژیک را به فضاهای متریک نزدیک سازد. اکنون به تشریح ساختار ابرگروه توپولوژیک می‌پردازیم.

فرض کنید H یک مجموعه‌ی ناتهی باشد و P (H) گردایه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های H بجز تهی باشد. یک نگاشت $o : H \times H \to P\ (H)$ را که دارای دو خاصیت زیر باشد ابرگروه می‌گویند.

$1)\ \forall a,b,c \quad H: ao(boc) = (aob)oc$
$2)\ \forall a \quad H: aoH = Hoa$

این ساختار اولین‌بار توسط مارتی[۱۴] در سال ۱۹۳۴ ارائه شده است. سپس در سال‌های متمادی توسط کوسکاس[۱۳]، کوسینی[۳و۴]، دواز[۵و۶] و جعفرآبادی[۱۱] مورد مطالعه و گسترش قرار گرفته است. که کاربردهای زیادی در علوم محض و کاربردی در موضوعات هندسی، ابرگراف‌ها، مشبکه‌ها، مجموعه‌های فازی، ترکیبیات، کدگذاری و هوش مصنوعی دارد([۶] را ببینید).

ساختارهای جبری همراه با توپولوژی نقش مهمی در ریاضیات دارند. اخیراً ریاضیدانان روی ابرساختارهای جبری، توپولوژی تعریف کرده‌اند. عامری [۱] و هوشگوا [۱۰]، ابرگروه‌واره‌ی $\mathrm{T}_{u}(\mathrm{T}_{\ell})$-توپولوژیکی را تعریف و بررسی کرده‌اند. حیدری [۹]این توپولوژی را روی ابرگروه‌ها قرارداد. حال در لم زیر یک توپولوژی روی P (H) تعریف می‌کنیم.

لم:[۱۰] فرض کنید $(\mathrm{H}.\mathrm{T})$ فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه خانواده‌ی ℓ شامل همه‌ی مجموعه‌های

$S_V = \{\mathrm{U} \quad \mathrm{P}\ (\mathrm{H}): \mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}\}$ و $\mathrm{V} \quad \mathrm{T}$

یک پایه برای توپولوژیT_{u} روی P (H) است.

پلی‌گروه‌ها کلاس خاصی از ابرگروه‌ها هستند که برای اولین بار توسط لولیدیس درسال ۱۹۸۱ معرفی شدند. $\mathrm{P} = (\mathrm{P}\ ,\ \mathrm{o}\ ,\ \mathrm{e}.^{-1})$ یک پلی‌گروه است که در آن $\mathrm{P} \quad \mathrm{e}$ و $^{-1}$ عمل معکوس روی پلی‌گروهP و (P , o) یک نیم‌ابرگروه است که

$1)\forall x \quad P:\ eox = xoe = x$
$2)\ \forall\, x.y.z \quad P:\ x \quad yoz \Rightarrow$
$y \quad xoz^{-1}$ و $z \quad y^{-1}ox$

در هر پلی‌گروه احکام زیر برقرار است.

$e \quad xox^{-1} \cap x^{-1}ox$

و

$e^{-1} = e$

و

$(\mathrm{x}^{-1})^{-1} = \mathrm{x}$

و

$(\mathrm{xoy})^{-1} = \mathrm{y}^{-1}\mathrm{ox}^{-1}$

۲- پیش‌نرم روی پلی‌گروه‌های توپولوژیکی

در این بخش می‌خواهیم روی پلی‌گروه‌هایتوپولوژیکی پیش‌نرم تعریف کنیم که مقدمه‌ای است برای تعریف متریک‌پذیری پلی‌گروه‌های توپولوژیکی.

تعریف۱.۲. فرض کنید P یک پلی‌گروه بوده و N یک نگاشت روی P باشد، آنگاه یک نگاشت مانند $\widetilde{N} : P\ (P) \to R$ باضابطه‌ی $\widetilde{N}(A) =$ $\sup\{N(a): a \in A\}$ را یک پیش‌نرم رویP گوییم هرگاه

$P\widetilde{N}1)\ \widetilde{N}(e) = 0$
$P\widetilde{N}2)\ \widetilde{N}(x) = \widetilde{N}(x^{-1})$
$P\widetilde{N}3)\ \widetilde{N}(AB) \le \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(\mathrm{B})$

مثال۲.۲. فرض کنید P مجموعه‌ایاز نقاط [2] باشد. برایP p,q که $\mathrm{p} \neq \mathrm{q}$، $(\overline{\mathrm{pq}})$رامجموعه‌ی همه‌ی نقاط روی خط گذرا از p و q فرض می‌کنیم،یعنی $\overline{\mathrm{pq}} = \mathrm{rp} + (1 \quad \mathrm{r})\mathrm{q}$ که 0< r <1. شیء P I را انتخاب می‌کنیم و $(\ \mathrm{P} \cup \{\mathrm{I}\}.\circ.\mathrm{I}\ .^{-1})\ \mathrm{P} =$ را در نظر می‌گیریم که برای هر $\mathrm{P} \cup \{\mathrm{I}\}$ x، $x^{-1} = x$و $\mathrm{x}\circ\mathrm{I} = \mathrm{I}\circ\mathrm{x} = \mathrm{x}$ و برای P p,q

$$\mathrm{p} \circ \mathrm{q} = \begin{cases} \overline{\mathrm{pq}} \quad \{\mathrm{p.q}\} & \mathrm{p} \neq \mathrm{q} \\ \{\mathrm{P.I}\} & \mathrm{p} = \mathrm{q} \end{cases}$$

لذا $(\ \mathrm{P} \cup \{\mathrm{I}\}.\circ.\mathrm{I}\ .^{-1})\ \mathrm{P} =$ یک پلی‌گروهاست.
اکنون $\widetilde{N}(pq) = \sup\{N(x): x \in \overline{\mathrm{pq}} \quad \{\mathrm{p.q}\}\}$

را تعریف می‌کنیم و خواهیم داشت.

1) $\widetilde{N}(I) = 0$
2) $\widetilde{N}(x) = \widetilde{N}(x^{-1})$
3) $\widetilde{N}(pq) = \widetilde{N}(\mathrm{rp} + (1 \quad \mathrm{r})\mathrm{q})$
$= \widetilde{N}(\mathrm{rp}) + \widetilde{N}((1 \quad \mathrm{r})\mathrm{q})$
$= \mathrm{r}\widetilde{N}(\mathrm{p}) + (1 \quad \mathrm{r})\widetilde{N}(\mathrm{q})$
$\le \widetilde{N}(p) + \widetilde{N}(q)$

و در نتیجه $\widetilde{N}$، یکپیش نرماست.

گزاره۲.۳. اگر $\widetilde{N}$ یک پیش‌نرمرویP باشد، آنگاه برای هرx∈P داریم: $\widetilde{N}(x) \ge 0$

برهان:

$e \in xx^{-1} \Rightarrow 0 = \widetilde{N}(e) \le \widetilde{N}(xx^{-1})$
$\le \widetilde{N}(x) + \widetilde{N}(x^{-1})$
$= 2\widetilde{N}(x)$
$\Rightarrow 2\widetilde{N}(x) \ge 0$
$\Rightarrow \widetilde{N}(x) \ge 0$

گزاره۲.۴. اگر $\widetilde{N}$ یک پیش‌نرمروی پلی‌گروه P باشد، آنگاه برای هر $x, y \in P$ نامساوی زیر، برقرار است.
$|\widetilde{N}(x) \quad \widetilde{N}(y)| \le \widetilde{N}(xy^{-1})$

برهان:
چون $y \in ey \in xx^{-1}y$ لذا
$\widetilde{N}(y) \le \widetilde{N}(xx^{-1}y) \le \widetilde{N}(x) + \widetilde{N}(x^{-1}y)$

همچنین
$\widetilde{N}(xx^{-1}y) \le \widetilde{N}(x) + \widetilde{N}(x^{-1}y)$
و
$\widetilde{N}(x^{-1}) = \widetilde{N}(x) \le \widetilde{N}(yy^{-1}x) =$
$\widetilde{N}((yy^{-1}x)^{-1}) = \widetilde{N}(x^{-1}yy^{-1}) \le$
$\widetilde{N}(x^{-1}y) + \widetilde{N}(y^{-1}) = \widetilde{N}(x^{-1}y) + \widetilde{N}(y)$

و در نتیجه برهان کامل است.

گزاره ۲.۵. فرض کنید $\widetilde{N}$ یک پیش‌نرمروی پلی‌گروه P بوده و α یک عدد حقیقی نامنفی باشد، آنگاه تابع $\alpha\widetilde{N}$ روی P باضابطه‌ی $(\alpha\widetilde{N})(x) = \alpha(\,\widetilde{N}(x))$ برای هر $\mathrm{x} \in \mathrm{P}$، یک پیش‌نرمروی P است.

برهان:

$P\widetilde{N}_1)\ \left(\alpha\widetilde{N}\right)(e) = \alpha\left(\widetilde{N}(e)\right)$
$= \alpha 0 = 0$
$P\widetilde{N}_2)\left(\alpha\,\widetilde{N}\right)(x^{-1}) = \alpha\,(\widetilde{N}\left((x^{-1})\right) =$
$\alpha\,(\widetilde{N}(x)) = \left(\alpha\,\widetilde{N}\right)(x)$
$P\widetilde{N}_3)\left(\alpha\,\widetilde{N}\right)(xy) = \alpha\left(\widetilde{N}(xy)\right)$
$\le \alpha\,\left(\widetilde{N}(x) + \widetilde{N}(y)\right)$
$= \alpha\,\widetilde{N}(x) + \alpha\,\widetilde{N}(y)$
$= (\alpha\,\widetilde{N})(x) + (\alpha\,\widetilde{N})(y)$
$= (\alpha\widetilde{N})(x) + \left(\alpha\,\widetilde{N}\right)(y)$

گزاره ۲.۶. برای هر پیش‌نرم $\widetilde{N}$ روی پلی‌گروه P، مجموعه‌ی $Z_{\widetilde{N}} = \left\{\,x \in P :\ \widetilde{N}(x) = 0\right\}$ زیرپلی گروه P است.

برهان: فرض می‌کنیم $a.b \in Z_{\tilde{N}}$

لذا $\tilde{N}(a) = 0\tilde{N}(b) = 0$. پس

$$\tilde{N}(a.b) \le \tilde{N}(a) + \tilde{N}(b) = 0$$

بنابراین $0 \le \tilde{N}(a.b) \le 0$ و در نتیجه $\tilde{N}(a.b) = 0$ و لذا $ab \in Z_{\tilde{N}}$ از طرفی چون $a \in Z_{\tilde{N}}$ لذا

$$0 = \tilde{N}(a) \quad = \tilde{N}(a^{-1}) \Rightarrow \ \tilde{N}(a^{-1}) = 0$$
$$\Rightarrow a^{-1} \in Z_{\tilde{N}}$$

و در نتیجه برهان کامل است.

گزاره ۲.۷. مجموع دو پیش‌نرمروی پلی‌گروه P، یک پیش‌نرم روی P است.

برهان: اگر $\tilde{N}_1 : P\ (p)\ \to R$ و $\tilde{N}_2 : P\ (p)\ \to R$ به ترتیب با ضابطه‌های

$$\tilde{N}_1(A) = \sup\{N_1(a) : a\ \in A\}$$

و

$$\tilde{N}_2(A) = \sup\{N_2(a) : a\ \in A\}$$

دو پیش‌نرمروی P باشند. تابع

$$(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2) : P\ (p)\ \to R$$

باضابطه‌ی

$$(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2)(A) = (\tilde{N}_1(A) + \tilde{N}_2(B))$$

در نظر می‌گیریم.

$$1)(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2)(e) = (\tilde{N}_1(e) + \tilde{N}_2(e))$$
$$= 0 + 0 = 0$$
$$2)\ (\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2)(x)$$
$$= (\tilde{N}_1(x) + \tilde{N}_2(x))$$
$$= (\tilde{N}_1(x^{-1}) + \tilde{N}_2(x^{-1}))$$
$$= (\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2)(x^{-1})$$
$$3)(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2)(AB)$$
$$= (\tilde{N}_1(AB)\ + \tilde{N}_2(AB))$$
$$\le (\tilde{N}_1(A) + \tilde{N}_1(B))$$
$$= (\tilde{N}_2(A) + \tilde{N}_2(B))$$
$$= (\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2)(A) + (\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2)(B)$$

لم ۲.۸. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار و کراندار و نامنفی روی پلی‌گروه P باشد،آنگاه تابع $\tilde{N}_{\tilde{f}}$ که

$$\tilde{N}_{\tilde{f}}(x) = \sup\{\tilde{f}\ (yx) \quad \tilde{f}(y) |\ y\ \in P\}$$

و

$$\tilde{f}(xy) = \sup\{f(t) : t \in xy\}$$

یک پیش‌نرم روی P است.

برهان:

$$P\tilde{N}1)$$
$$\forall \epsilon\ > 0 :$$
$$\exists x_\epsilon\ \epsilon P\ ;\ x \quad \epsilon < x_\epsilon$$
$$\forall \epsilon\ > 0\ .\ \ 0 \quad \epsilon < x_\epsilon$$
$$\Rightarrow \tilde{N}_{\tilde{f}}(e) = 0$$
$$P\tilde{N}2)$$
$$\tilde{N}_{\tilde{f}}(x^{-1})$$
$$= \ \sup\{|\tilde{f}(yx^{-1}) \quad \tilde{f}(y)| : y \in P\}$$
$$= \sup\{|\tilde{f}(txxx^{-1}) \quad \tilde{f}(txx)| : txx \in P\}$$
$$= \sup\{|\tilde{f}(tx) \quad \tilde{f}(txx)| : txx \in P\}$$
$$= \tilde{N}_{\tilde{f}}(x)$$
$$P\tilde{N}3)$$
$$\tilde{N}_{\tilde{f}}(xy)$$
$$= \sup\{|\tilde{f}(xyz) \quad \tilde{f}(z)| : z \in P\}$$
$$= \sup\{|\tilde{f}(xyz) + \tilde{f}(yz) \quad \tilde{f}(yz)$$
$$\tilde{f}(z)| : z \in P\}$$
$$\le \sup\{|\tilde{f}(xt) \quad \tilde{f}(t)| : t \in P\}$$
$$+\sup\{|\tilde{f}(yz) \quad \tilde{f}(z)| : z \in P\}$$
$$= \tilde{N}_{\tilde{f}}(x) + \tilde{N}_{\tilde{f}}(y)$$

گزاره ۲.۹. پیش‌نرم $\tilde{N}$ روی پلی‌گروه توپولوژیکی P پیوسته است، اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه همسایگی U از e وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $x \in U$، $\tilde{N}(x) \le \varepsilon$.

برهان: به وضوح اگر $\tilde{N}$ روی P پیوسته باشد، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$، همسایگی U از e موجود است که برای هر $x \in U$،

$$\tilde{N}(x) < \varepsilon.$$

برعکس: اگر $Z \in P\ (P)$ و U که همسایگی از e که در فرض گزاره صدق می‌کند.

$$\begin{cases} e \in U \\ V = ZU \end{cases} \Rightarrow Ze \subseteq U$$
$$y \in ZU \Rightarrow Z^{-1}y \subseteq U$$

بنابر فرض $\widetilde{N}(Z^{-1}y) \leq \epsilon$ و لذا

$$\left|\widetilde{N}(Z^{-1}) \quad \widetilde{N}(y)\right| \leq \widetilde{N}(Z^{-1}y) \leq \epsilon$$
$$\Rightarrow \widetilde{N}(Z) \quad \widetilde{N}(y) \leq \epsilon.$$

۳- متریک‌پذیری پلی‌گروه‌های توپولوژیک

در این بخش می‌خواهیم در مورد متریک‌پذیری پلی‌گروه‌های توپولوژیک بحث کنیم. بدین منظور لم اساسی زیر را می‌آوریم.

لم ۳.۱. فرض کنید $\{U_n : n \in \omega\}$ یک دنباله از همسایگی‌های باز و متقارن e در پلی‌گروه توپولوژیکی P باشد. بطوریکه برای هر $n \in \omega U_{n+1}^2 \subseteq U_n$، آنگاه

$$\left\{A \in P\ (p) \colon \widetilde{N}(A) < \frac{1}{2^n}\right\} \subseteq U_n$$
$$\subseteq \{A \in P\ (p) \colon \widetilde{N}(A) < \frac{2}{2^n}\}$$

بنابراین پیش‌نرم $\widetilde{N}$ پیوسته است. علاوه بر این اگر مجموعه‌های U_n پایا باشد.

برهان: مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم.

قرار می‌دهیم $V(1) = U_0$ و $n \in w$ را ثابت در نظر می‌گیریم وبرای هر $m = 1.2.\dots.2^{n-1}$ و $V\left(\frac{m}{2^n}\right)$ را همسایگی باز e در نظر می‌گیریم. اینک قرار می‌دهیم $V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = U_{n+1}$ و به ازای $m = 1.2.\dots.2^n$ و

$$V\left(\frac{2^m}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{m}{2^n}\right)$$

و به‌ازای هر $m = 1.2.\dots.2^{n-1}$

$$V\left(\frac{(2m+1)}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{m}{2^n}\right)U_{n+1}$$
$$= \left(\frac{m}{2^n}\right).\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right)$$

در این صورت برای هر عدد گویای V، *V(r)* را همسایگی باز e تعریف می‌کنیم.

همچنین برای هر $m > 2^n$، $\left(\frac{m}{2^n}\right) = P$ حال نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $n \geq 0 . m > 0$

$$V\left(\frac{m}{2^n}\right).V\left(\frac{1}{2^n}\right) \subseteq V\left(\frac{m+1}{2^n}\right)$$

برای بررسی درستی رابطه *i*، ابتدا می‌بینیم که برای $m + 1 > 2^n$ برقرار است. زیرا با قرار دادن $m' = m + 1$

$$V\left(\frac{m'-1}{2^n}\right).V\left(\frac{1}{2^n}\right) \subseteq V\left(\frac{m'}{2^n}\right)$$

و چون $m' > 2^n$، بنا به $V\left(\frac{m'}{2^n}\right) = P$ و لذا شرط i برقرار است حال ثابت می‌کنیم برای $m < 2^n$ نیز درست است. بدین منظور از استقراء روی n استفاده می‌کنیم.

اگر *n=1*، در این صورت *m=1* است و لذا

$$V\left(\frac{m}{2^n}\right).V\left(\frac{1}{2^n}\right) = V\left(\frac{1}{2}\right).V\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= U_1.U_1$$
$$= U^2 \subseteq U = V(1) = V\left(\frac{m+1}{2^n}\right)$$

لذا i برقرار است.

حال فرض می‌کنیم که i برای هر n برقرار باشد.نشان می‌دهیم برای *n+1* برقرار است. بدین منظور دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: فرض می‌کنیم، m عددی زوج باشد، پس برای $k \in Z$ و $0 < m = 2k + 2 < 2^{k+1}$ در این صورت

$$V\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right).V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right).V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
$$= V\left(\frac{2k+2}{2^{n+1}}\right).U_{n+1}$$
$$= V\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right).V\left(\frac{2}{2^n}\right)U_{n+1}$$
$$= V\left(\frac{k}{2^n}\right).V\left(\frac{1}{2^n}\right)U_{n+1}$$
$$\subseteq V\left(\frac{k+1}{2^n}\right)U_{n+1} = V\left(\frac{k+1}{2^n}\right).V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
$$= V\left(\frac{2(k+1)+1}{2^{n+1}}\right)$$
$$= V\left(\frac{2k+2+1}{2^{n+1}}\right)$$

$= V\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right)$

لذا شرط i،در حالی که m زوج باشد، درست است.

حالت دوم: فرض می‌کنیم m فرد باشد، لذا برای $k \in Z$ و $0 < m = 2k+1 < 2^{n+1}$.

در این صورت مشابه حالت قبل:

$$V\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right).V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right).V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
$$= V\left(\frac{k}{2^{n}}\right)U_{n+1}.U_{n+1}$$
$$\subseteq V\left(\frac{k}{2^{n}}\right).U_{n}$$
$$= V\left(\frac{k}{2^{n}}\right).V\left(\frac{1}{2^{n}}\right)$$
$$\subseteq V\left(\frac{k+1}{2^{n}}\right) = V\left(\frac{2k+1+1}{2^{n+1}}\right)$$
$$= V\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right)$$

و در این حالت نیز برقرار است.

حال تابع حقیقی مقدار f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f : P \to R$$
$$f(x) = \inf\{r > 0 : x \in V(r)\}$$

fخوش تعریف است. زیرا اگر $x=y$

$$f(x) = \inf\{r > 0 : x \in V(r)\}$$
$$= \inf\{r > 0 : y \in V(r)\}$$
$$= f(y)$$

و تعریف می‌کنیم $\tilde{f}(xy) = \sup\{f(t) : t \in xy\}$

اکنون برای هر $x \in P$ و $r=2$ و $V(2)=P$ پس $x \in V(2)$ و در نتیجه برای هر $x \in P$، $f(x)$ قابل تعریف است. حال برای $r.s \in Q$ که $0 < r < s$ در این صورت $V(r) \subset V(s)$. اکنون خواهیم داشت، اگر $f(x) < r$، آنگاه $x \in V(r)$.

بنابراین f یک تابع نامنفی و از بالا کراندار است. ملاحظه می‌کنیم که برای هر $x \in P$ تابع $\tilde{N}$ باضابطه‌ی $\tilde{N}(x) = \sup\{\left|\tilde{f}(yx) \quad \tilde{f}(y)\right|\}$ یک پیش‌نرمروی P است. حال ثابت می‌کنیم $\tilde{N}$ در (PN4) صدق می‌کند.

$$f(x) \leq \left\{\left|\tilde{f}(ex) \quad \tilde{f}(e)\right|\right\} \leq \tilde{N}(x) < \frac{1}{2^n}$$

واز $f(x) < \frac{1}{2^n}$ و از (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$x \in V\left(\frac{1}{2^n}\right) = U_n$$

و این قسمت اول *(PN4)* ثابت می‌کند. یعنی

$$\left\{x \in P : \tilde{N}(x) < \frac{1}{2^n}\right\} \subseteq U_n$$

حال قسمت دیگر(PN4) را ثابت می‌کنیم که حاکی از پیوستگی$\tilde{N}$ است.

فرض می‌کنیم X متعلق به$V\left(\frac{1}{2^n}\right)$ باشد. به وضوح برای هر $y \in P$، یک عدد صحیح مثبت مانند k موجود است که:

$$\frac{k \quad 1}{2^n} \leq f(y) < \frac{k}{2^n}$$

چون $f(y) < \frac{k}{2^n}$ بنا به (۱)،$y \in V\left(\frac{k}{2^n}\right)$، از طرفی دیگر بنا به فرض U_nها متقارن هستند، پس

$$x \in U_n \Rightarrow x^{-1} \in U_n^{-1} = U_n$$
$$= V\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

چون $x \in V\left(\frac{1}{2^n}\right)$ و $x^{-1} \in V\left(\frac{1}{2^n}\right)$ لذا yx و $yx^{-1} \subseteq V\left(\frac{k}{2^n}\right).V\left(\frac{1}{2^n}\right)$، حال با استفاده از i داریم.

$$V\left(\frac{k}{2^n}\right).V\left(\frac{1}{2^n}\right) \subseteq V\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$$
$$\Rightarrow yx\,.\,yx^{-1} \subseteq V\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$$

بنابراین

$$\tilde{f}(yx) < \frac{k+1}{2^n}$$

و

$$\tilde{f}(yx^{-1}) < \frac{k+1}{2^n}$$

اکنون از $\frac{k-1}{2^n} < \tilde{f}(y)$ و نامساوی‌های فوق خواهیم داشت.

$$\tilde{f}(yx) \quad \tilde{f}(y) \le \frac{k+1}{2^n} \quad \frac{k-1}{2^n} = \frac{2}{2^n}$$

و

$$\tilde{f}(yx^{-1}) \quad \tilde{f}(y) \le \frac{2}{2^n}$$

و لذا

$$\tilde{f}(y) \quad \tilde{f}(yx) \le \frac{2}{2^n}$$

بنابراین

$$|\tilde{f}(yx) \quad \tilde{f}(y)| \le \frac{2}{2^n}$$

و در نتیجه $\widetilde{N}(x) \le \frac{2}{2^n}$ و این یعنی

$$U_n \subseteq \{x \in P : \ \widetilde{N}(x) \le \frac{2}{2^n}\}$$

و لذا (PN4) برقرار است.

فرض می‌کنیم U_nها پایا باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\widetilde{N}(xyx^{-1}) = \widetilde{N}(y)$$

بدین منظور

$$\begin{aligned}\widetilde{N}(xyx^{-1}) &= \sup|\tilde{f}\,(zxyx^{-1}) \quad \tilde{f}(z)|\\ &= \sup|\tilde{f}\,(x^{-1}zxy) \quad \tilde{f}(z)|\\ &= \sup|\tilde{f}\,(ty) \quad \tilde{f}(xtx^{-1})|\\ &= \sup|\tilde{f}\,(ty) \quad \tilde{f}(t)|\\ &= \widetilde{N}(y)\end{aligned}$$

تعریف۳.۲. فرض کنید $\widetilde{N}$ یک پیش‌نرمروی پلی‌گروه P باشد. در این صورت

$$\{A \in P\ \ (P): \widetilde{N}(A) < 1\}$$

یک $\widetilde{N}$ گوی واحد درP می‌نامیم و آن را با $B_{\widetilde{N}}$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی

$$B_{\widetilde{N}}(\epsilon) = \{A \in P\ \ (p): \widetilde{N}(A) < \epsilon\}$$

که ϵ عددی مثبت است را$\widetilde{N}$-گوی به شعاع ϵمی‌نامیم.

قضیه (مارکوف)۳.۳. برای هر همسایگی باز U از e در پلی‌گروه توپولوژیکی P یک پیشنرم پیوسته مانند $\widetilde{N}$ وجود دارد که گوی $B_{\widetilde{N}}$ مشمول U است.

برهان: با استفاده از لم۳.۱، دنباله‌ی $\{U_n : n \in w\}$ از همسایگی‌های e را در نظر می‌گیریم که $U_0 = U$. در این صورت پیش‌نرم$\widetilde{N}$ که خاصیت (PN4) در لم ۳.۱ برقرار باشد در نظر می‌گیریم. پس $\widetilde{N}$ پیوسته بوده و گوی واحد $B_{\widetilde{N}}$ مشمول در $U_0 = U$ می‌باشد.

$$\begin{aligned}&\left\{A \in\ P\ \ (p): \widetilde{N}(A) < \tfrac{1}{2^n}\right\}\\ &\subseteq U_n \subseteq \{A \in\ P\ \ (p): \widetilde{N}(A) < \tfrac{2}{2^n}\}\\ &n = 0\ \Rightarrow\\ &B_{\widetilde{N}} = \left\{A \in P\ \ (p): \widetilde{N}(A) < 1\right\}\\ &\subseteq U_0 = U\end{aligned}$$

قضیه(متریک‌پذیری) ۳.۴. پلی‌گروه توپولوژیکی P، متریک‌پذیر است، اگر و تنها اگر شمارای نوع اول باشد.

برهان: اگر متریک پذیر باشد، شمارای نوع اول است. حال فرض می‌کنیم P شمارای نوع اول است،نشان می‌دهیم متریک‌پذیر است. بدین منظور پایه‌ی شمارای $\{w_n\,; n \in \omega\}$ برای P، در نقطه e را در نظر می‌گیریم. با استفاده از استقراء یک دنباله مانند $\{U_n\,; n \in \omega\}$ از همسایگی باز و متقارن e به دست می‌آوریم. به‌طوری که به ازای هر $n \in \omega$، و $U_n \subseteq w_n$ و $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$ ولذا$\{U_n\}_{n\in\omega}$ یک پایه برای P در نقطه e می‌باشد. در این صورت بنا به لم۳.۱ و قضیه مارکوف(۳.۳) پیش‌نرم پیوسته‌ی $\widetilde{N}$ در P موجود است که به ازاء هر $n \in \omega$،

$$B_{\widetilde{N}}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \{A \in\ P\ \ (p): \widetilde{N}(A) < \frac{1}{2^n}\} \subseteq U_n$$

در نتیجه$B_{\widetilde{N}}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ نیز تشکیل یک پایه برای P، در e می‌دهد. حال تابع Q را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&Q : P \times P\ \to [0.+\infty)\\ &Q(x.y) = \inf\{\widetilde{N}(t) : t \in xy^{-1}\}\end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم Q یک متر روی P است.

$$\begin{aligned}&1) Q(x.y) = \inf\{\widetilde{N}(t) : t \in xx^{-1}\} = 0\\ &2) Q(x.y) = \inf\{\widetilde{N}(t) : t \in xy^{-1}\}\\ &Q(x.y) = \inf\{\widetilde{N}(t^{-1}) : t^{-1} \in xy^{-1}\}\\ &= Q(y.x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&3) Q(x.z) = \inf\{\widetilde{N}(t) : t \in xz^{-1}\} \\
&\leq \widetilde{N}(xoz^{-1}) \\
&\leq \widetilde{N}(xoy^{-1}oyoz^{-1}) \\
&\leq \widetilde{N}(xoz^{-1}) + \leq \widetilde{N}(yoz^{-1}) \\
&\Rightarrow Q(x.z) \leq Q(x.y) + Q(y.z)
\end{aligned}
$$

و در نتیجه Q متر است.

به وضوح $B_N(\epsilon)$ یک Q همسایگی e به شعاع $\in$ است و از اینجا نتیجه می‌گیریم که Q همسایگی‌های نقطه‌ی X از P به شعاع $\in$ دقیقاً مجموعه‌ی $B_N(\epsilon)(x)$ است.

$x \in P$ را در نظر می‌گیریم. چون $B_N(\frac{1}{2^n})$ یک پایه برای P در e است و همچنین P یک پلی‌گروه توپولوژیکی است، $B_N(\frac{1}{2^n})(x)$ نیز تشکیل پایه برای P در X می‌دهند و لذا توپولوژی Q، توپولوژی اصلی روی P را تشکیل می‌دهد.

نتیجه‌گیری

یکی از جالبترین و اعجاب انگیزترین مباحث توپولوژی، متریک‌پذیری می‌باشد که همواره مورد بحث قرار گرفته است. گروه‌های توپولوژیک به عنوان یک مبحث توپولوژیکی کامل نیز قضیه مهمی در متریک‌پذیری به نام قضیه بیرخوف_کاکوتانی دارد که شرط لازم و کافی برای آن را شمارای نوع اول بودن توپولوژی می‌داند، لذا خیلی طبیعی به نظر می‌رسد که نزدیک‌ترین ابرساختار به گروه‌های توپولوژیکیعنی پلی‌گروه‌های توپولوژیک را از باب متریک‌پذیری مورد توجه قرار دهیم که در این مقاله مدنظر قرار گرفته است. در تحقیقات پیش‌رو می‌خواهیم مفاهیمی که با متریک پذیری قابل طرح می‌باشند مانند آنتروپی متریک، یکنواختی و... را روی پلی‌گروه‌های توپولوژیک بررسی کنیم.

فهرست منابع

[1] R. Ameri, Topological (transposition) hypergroups, Itah. Pure Apple. Math. 13 (2003) 171_176.

[2] A. V. Arhangelskii, M. G. Tkachenko, Topological Groups and Related Structure, Atlantis Studies in Mathematics, Vol. 1, Atlantis Press/World Scientifivc, Paris, 2008.

[3] P. Corsini, Prolegomena of Hypergroup Theory, Aviani Editor, Tricesimo, 1993.

[4] P. Corsini, V. Leoreanu, Application of Hyperstructures Theory, Advances in Mathematics, Kluwer Academic Publisher, Dor-drecht, 2003.

[5] B. Davvaz, polygroup theory and related Systems, World Scientific Publishing Co. pte. Ltd., Hackensack, 2013.

[6] B. Davvaz,V. Leorena-Fortea, Hypering Theory and applications, International Academic Press, Usb, 2007.

[7] R. Engelking, General Topology, PWN-polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[8] D. Heidari, S.M.S Modarres, B. Davvaz, Topological hypergroups in the sense of marty, Commun. Algebra 42(2014) 4712-4721.

[9] D. Heidari, B. Davvaz, S.M.S Modarres, Topological polygroups, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35(2012) 335-343.

[10] S. Hoskova–Mayerova, Topological hypergroupoids, Comput. Math. Soc. 22 (1981) 95-104.

[11] H.M. Jafarabadi, N.H. Sarmin, M.R. Molaei, Completely Simple and regular semi hypergroups, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35 (2012) 335-343.

[12] J. Jamalzadeh, Paratopological polygroups versus topological polygroups, Filomat 32:8 (2018), 2755-2761.

[13] M. Koskas, Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes, J. Math. Pures Appl. 49:9 (1970) 155-192.

[14] F.Marty, Surunegeneralizatiom de la notion de groupe, 8thCongres Math. Scandinaves, Stockholm, 1934.