دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و نهم، آذر و دی ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

تاثیر استفاده از بازنمایی‌ها بر کیفیت تدریس مفاهیم جبری (معادله درجه اول)

اکرم دریایی[۱]، ابوالفضل تهرانیان[۲*]، احمد شاهورانی[۳]، محسن رستمی مال‌خلیفه[۴]

[۱و۲و۳و۴] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۳/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۲۸

چکیده

یاددهی و یادگیری مفاهیم جبری همواره با مشکلاتی مواجه بوده است. فرایند یاددهی و یادگیری جبر در مدارس باید به گونه ای باشد تا دانش آموزان بدانند اغلب ایده های جبری می تواند به صورتی عینی و ملموس، با استفاده از بازنمایی ها معرفی شوند. بنابراین با تلاش در بوجود آوردن یک دیدگاه شهودی در دانش آموزان و حرکت تدریجی از تجربه های عینی و ملموس به سمت ایده های مجردتر و استفاده ی مناسب از بازنمایی ها می توان به ساخته شدن مفاهیم و ایده های ریاضی در آن ها کمک نمود. هدف اصلی این پژوهش، بررسی تاثیر استفاده از بازنمایی‌ها بر کیفیت تدریس مفاهیم جبری می‌باشد. چارچوب پژوهش به کمک سه نوع بازنمایی؛ عددی، نمادین و نموداری است. نمونه در دسترس از یک مدرسه در منطقهٔ ۴ شهر تهران انتخاب شده است. روش پژوهش نیمه آزمایشی با طرح پیش‌آزمون و پس‌آزمون با گروه کنترل در میان ۸۳ دانش-آموز دختر پایه دهم در سه رشته انسانی، تجربی و ریاضی پیاده‌سازی و اجرا شد. ابزار پژوهش آزمون محقق ساخته است که روایی صوری و محتوایی آزمون توسط ۸ نفر از اساتید ریاضی تأیید گردید. به کمک معیار آلفای کرونباخ ضریب پایایی آن ۰/۸۵ به دست آمد. داده‌های پیش و پس از آموزش مبتنی بر بازنمایی‌ها در گروه آزمایش و آموزش سنتی در گروه کنترل جمع‌آوری شد. نتایج یافته‌ها با استفاده از نرم افزار SPSS ۲۴ نشان داد که استفاده از هر یک از "بازنمایی به شیوه نموداری، آن-عددی، و نمادین" با توجه به موقعیت‌های تدریس مفاهیم جبری و متناسب با شرایط دانش آموزان، تأثیر مثبتی بر عملکرد ها در حل مسائل جبری پایه دهم داشته است. نتایج این پژوهش برای آموزشگران ریاضی و مؤلفین کتب درسی مفید است.

واژه‌های کلیدی: ریاضی، بازنمایی، تدریس جبر، عملکرد، معادله درجه اول.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: tehranian۱۳۴۰@yahoo.com

۱- مقدمه

کلاس جدید از معادلات قدر مطلقی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$G(x) = Ax - B|x| - b = o, \quad (B \neq I,\ \sigma_{\max}(|B|) < \sigma_{\min}(A)), \qquad (۱)$$

که در آن $A, B \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^n$ و $|\cdot|$ نشان دهنده‌ی مقدار قدرمطلقی است. تاکنون همگرایی و پایداری عددی کلاس جدید در حالت $B \neq I$ مورد بررسی قرار نگرفته است. اکنون می‌خواهیم در این مقاله، به بررسی همگرایی و پایداری عددی کلاس جدید بپردازیم. مسئله‌ی حل معادلات قدر مطلقی، جزو مسائل ان-پی سخت می‌باشد و از طرفی مسئله‌ی متمم خطی (LCP) هم‌ارز معادله‌ی قدر مطلق است. مرجع [۱۲] را ببینید. منگسرین[۲] برای حل معادله‌ی قدر مطلق، $B = I$، از روش نیوتن تعمیم‌یافته استفاده کرد و نشان داد که حل معادله‌ی قدر مطلق، $B = I$، اگر مقادر منفرد A، بیشتر از ۱ باشد، آنگاه دارای همگرایی خطی می‌باشد.

اگر مقادیر منفرد A بیشتر از ۱ باشد، آنگاه معادله‌ی قدر مطلق (۱)، $B = I$ جواب منحصر به فرد دارد، [۱۵، ۱۴].

کلاس جدید، $B \neq I$ با شرط $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$ دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد، [۱۵]. حل منحصر به فردی معادله‌ی قدر مطلق $B = I$ در مراجع [۲۱، ۱۱، ۱۰، ۱] بررسی شده است. در برخی دیگر از روش‌ها، همگرایی خطی کلاس جدید در حالت $B = I$ نشان داده شده است، [۱۶، ۱۳، ۵]. زینلی و لطفی [۲۱] برای حل کلاس جدید در حالت $B = I$ روش نیوتن تعمیم‌یافته را اصلاح کرده و اثبات کرده‌اند که این روش دارای همگرایی موضعی مرتبه‌ی ۲ است.

روش‌های ذکر شده به همـــگرایی و پایداری عـددی معادلات قدرمطلقی در حالت $B = I$ پرداخته‌اند.

بنابراین ما $B \neq I$ و شرط $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$ را لحاظ کرده‌ایم و اثبات نموده‌ایم که در این حالت کلاس جدید نیز دارای همگرایی موضعی مرتبه‌ی دوم و دارای پایداری عددی می‌باشد.

فضای تابعی $W_2^1[0,1]$ یک فضای هسته باز تولید است که در بخش بعدی تعریف خواهد شد. هدف ما در این مقاله پیدا کردن تابعی مانند $u(x)$ در $W_2^1[0,1]$ است به‌طوری که در معادله (۱) صدق کند. بدین منظور با توجه به شکل معادله (۱) یک عملگر خطی روی $W_2^1[0,1]$ تعریف می‌کنیم. سپس با استفاده از عملگر الحاقی نظیر و توابع هسته باز تولید در $W_2^1[0,1]$ یک پایه برای آن می‌سازیم. سپس جواب معادله (۱) را بر حسب این پایه به دست می‌آوریم.

۲- روش نیوتن تعمیم‌یافته و همگرایی موضعی مرتبه‌ی دوم برای حل کلاس جدید معادلات قدر مطلق

فرض کنیم ژاکوبین تعمیم‌یافته از معادله‌ی (۱) به صورت زیر باشد:

$$\boldsymbol{J_G(x) = A - BD(x)}, \qquad \mathbf{(2)}$$

که در آن $D(x) = diag(sign(x))$ فرض کنیم $x^{۰}$ بردار شروع مناسب برای حل دقیقی از معادله‌ی قدر مطلق باشد. روش نیوتن تعمیم‌یافته‌ی منگسرین برای حل کلاس جدید از معادلات قدر مطلقی به کار گرفته‌ایم:

$$(A - BD(x))\Delta x^k = -Ax^k + B|x^k| + b \qquad (۳)$$

$$\boldsymbol{x^{k+۱} = x^k + \Delta x^k, \left(k = ۰,۱,۲, \dots\right)}. \qquad \mathbf{(4)}$$

ابتدا ما سیستم خطی (۳) را حل می‌کنیم و $x^{k+۱}$ از (۴) را بروز رسانی می‌کنیم. جزئیات بیشتر را در مراجع [۲۰، ۱۹، ۸، ۶، ۲] ببینید.

[۲] Mangasarian

فرض کنیم $G(x) = Ax - B|x| - b$، $J_G(x)$ ژاکوبین تعمیم‌یافته‌ی $G(x)$ باشد و $D(x) = diag(sign(x))$ باشد. روش نیوتن تعمیم‌یافته برای پیدا کردن جواب معادله‌ی (۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$G(x^i) + J_G(x^i)\left(x^{i+1} - x^i\right) = o. \qquad (۵)$$

$$Ax^i - B\left|x^i\right| - b + \left(A - BD(x^i)\right) \times \left(x^{i+1} - x^i\right) = o, \qquad (۶)$$

با توجه به نکته که $D(x^i)x^i = \left|x^i\right|$، روش نیوتن تعمیم‌یافته، شکل ساده شده، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(A - BD(x^i)\right)x^{i+1} = b, \qquad (۷)$$

در نتیجه

$$x^{i+1} = \left(A - B(x^i)\right)\backslash b, \qquad (۸)$$

لم ۱. فرض کنیم $G(x)$ عضوی از کلاس (۱) باشد، اگر $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$ باشد، آنگاه $\left(A - BD(x)\right)^{-1}$ برای هر ماتریس قطری D وجود دارد جایی که D دارای عناصر قطری ± 1 یا صفر می‌باشد.

برهان. اثبات به روش برهان خلف است. فرض کنیم $\left(A - BD(x)\right)^{-1}$ منفرد باشد، آنگاه برای برخی از $x \neq o$ داریم:

$$\left(A - BD(x)\right)x = o, \qquad (۹)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Ax &= B|x| \\ x^T A^T Ax &\leq |(Ax)^T(Ax)| \\ &\leq |Ax|^T|Ax| \\ &\leq (|B||x|)^T|B||x| \\ &= |x|^T|B|^T|B||x|, \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

در نتیجه تناقضی با فرض مسئله به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{min}(A) &= min\, x^T A^T Ax \\ &\leq x^T A^T Ax \\ &\leq |x|^T|B|^T|B||x| \\ &= max\, z^T|B|^T|B|z \\ &= \sigma \max_{\|z\|_z=1} (|B|), \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

لم ۲. فرض کنیم $G(x^i) = Ax^i - Bx^i - b$ اگر $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$، آنگاه روش نیوتن تعمیم‌یافته برای رابطه‌ی (۳) خوش تعریف و کراندار است.

برهان. اثبات مشابه گزاره‌ی ۳ در [۱۰] است. همچنین به مرجع [۲۲] مراجعه کنید.

لم ۳. فرض کنیم $G(x)$ عضوی از کلاس جدید (۱) باشد، آنگاه:

$$\left\|\left(A - BD(x)\right)^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|\|D(x)\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\|B\|\|D(x)\|}. \qquad (۱۲)$$

برهان. چون $\left(A - BD(x)\right)^{-1}$ وجود دارد، آنگاه:

$$\left(A - BD(x)\right)\left(A - BD(x)\right)^{-1} = I. \qquad (۱۳)$$

بنابراین با گرفتن نرم از طرفین تساوی داریم:

$$\|A - BD(x)\| \qquad (۱۴)$$
$$\|A - BD(x)\|^{-1} = 1.$$

در نتیجه

$$\|A - BD(x)\| = \frac{1}{\|A - BD(x)\|}.$$

چون داریم:

$$\|A\| - \|B\|\|D(x)\| \leq \|A - BD(x)\|, \qquad (۱۴)$$

با ضرب $\|A^{-1}\|$ در طرفین نامساوی داریم:

$$\left\|A^{-1}\right\|\,\|A\| - \left\|A^{-1}\right\|\,\|B\|\|D(x)\| \le \left\|A^{-1}\right\|\,\|A-BD(x)\|,$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\left\|A^{-1}\right\|\|A-BD(x)\|} \le \frac{1}{1-\left\|A^{-1}\right\|\|B\|\|D(x)\|},$$

$$\|A-BD(x)\|^{-1} \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|\,\|D(x)\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\,\|B\|\|D(x)\|}. \tag{1}$$

لم ۴. فرض کنیم $G(x^i)$ عضوی از کلاس جدید (۱) باشد و $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$ و $\left\|A^{-1}\right\| < \frac{1}{4}$، آنگاه $\left\|J_G^{-1}(x^i)\right\| < 1$.

برهان. چون $\left\|J_G^{-1}(x^i)\right\| = \|A-BD(x^i)\|^{-1}$، با توجه به لم ۳ داریم:

$$\left\|J_G^{-1}(x^i)\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|\|D(x^i)\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\|B\|\|D(x^i)\|}$$

و از طرفی، با توجه به فرض مسئله که $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$، نتیجه می‌گیریم که $\left\|A^{-1}\right\|\,\|B\| < 1$، پس $\left\|J_G^{-1}(x^i)\right\| < 1$.

قضیه ۵. اگر D یک بازه‌ی باز در $\mathbb{R}^n$ باشد و J_G در همسایگی x در D دارای خاصیت لیپ‌شیتز باشد، آنگاه برای هر $t \in [0,1]$ و هر $x + t\Delta x \in D$ داریم:

$$\|G(x+\Delta x) - G(x) - J_G(x)\Delta x\| \le \frac{L_{J_G}}{2}\|\Delta x\|^2, \tag{2}$$

جایی که L_{J_G} پیوسته‌ی لیپ‌شیتز برای J_G در x است به عبارت دیگر:

$$\|J_G(x+t\Delta x) - J_G(x)\| \le L_{J_G}\|t\Delta x\|. \tag{3}$$

برهان. اثبات مشابه برهان قضیه‌ی ۲،۳ در [۲۱] است یا به مرجع [۲،۳] مراجعه نمایید.

قضیه ۶. فرض کنیم x^* جوابی از $G(x)$ از کلاس جدید (۱) باشد. یعنی اینکه $G(x^*) = o$ و فرض کنیم که مفروضات لم ۵ برقرار باشد و G به طور پیوسته مشتق‌پذیر برای تمام $x^k \in N_r(x^*) \subset D$ باشد، همچنین $\left\|J_G^{-1}(x)\right\| < 1$. آنگاه برای $k >$ ۰، دنباله‌ی $\{x^k\}$ تولید شده توسط (۳) و (۴) در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$\left\|x^{k+1} - x^*\right\| \le \frac{L_{J_G}}{2}\left\|x^k - x^*\right\|^2. \tag{4}$$

برهان.

$$x^{i+1} = x^i - J_G^{-1}(x^i)G(x^i), \tag{5}$$

بنابراین

$$x^{i+1} - x^* = x^i - x^* - J_G^{-1}(x^i)\left(G(x^i) - G(x^*)\right) = J_G^{-1}(x^i)\left(G(x^*) - G(x^i) - J_G(x^i)\right)(x^* - x^i). \tag{6}$$

در نتیجه با گرفتن نرم از طرفین تساوی داریم:

$$\left\|x^{i+1} - x^*\right\| = \|J_G^{-1}(x^i)\left(G(x^*) - G(x^i) - J_G(x^i)\right)(x^* - x^i)\| \le \left\|J_G^{-1}(x)\right\|\,\|G(x^*) - G(x^i) - J_k(x^i)(x^* - x^i)\|. \tag{22}$$

چون $\left\|J_G^{-1}(x)\right\| < 1$، آنگاه با استفاده از لم ۱-۴ داریم:

$$\left\|x^{k+1}-x^*\right\| \leq \frac{L_{J_G}}{2}\left\|x^k-x^*\right\|^2. \qquad (7)$$

قضیه ۷. فرض کنیم مفروضات قضیه‌ی ۶ برقرار باشد. اگر $\frac{2}{L_{J_G}} > r_{.} \geq r_k > 0$ و $N_{r_.}\left(x^k\right) \subset D$، آنگاه روابط (۳) و (۴) دنباله‌ی $\{x^k\}$ را به طوری که $x^k \in N_{r_.}(x^*)$ و $x^k \to x^*$ تولید می‌کند.

برهان. اثبات مشابه قضیه‌ی ۳,۳ در [۲۱] می‌باشد.

قضیه ۸. اگر مفروضات قضیه‌ی ۶ برقرار باشد، آنگاه جواب x^* در $N_{\frac{2}{L_{J_G}}}(x^*)$ منحصر به فرد است.

برهان. اثبات مشابه قضیه‌ی ۴,۳ در [۲۱] است یا به مرجع [۲۴] مراجعه نمایید.

۳. بررسی پایداری عددی معادلات کلاس جدید (۱)

در این قسمت، برای بررسی پایداری عددی معادلات قدر مطلق کلاس جدید (۱)، روابط (۲۴) و (۲۵) را در نظر بگیرید:

$$A-BD\left(\hat{x}^k+E_1^k\right)\Delta\hat{x}^k = -Ax^k+B\left|x^k\right|+b+E_2^k, \qquad (8)$$

$$\hat{x}^{k+1}=\hat{x}^k+\Delta\hat{x}^k+E_3, \quad \left(k=0,1,2,\dots\right). \qquad (9)$$

این دو روابط را با استفاده از نقطه‌ی شناور با دقت اعداد متناهی و با جایگزین کردن $A-BD(\hat{x}^k+E_1)$ به به جای $J_G(\hat{x}^k)$ و $\hat{x}^k$ به جای x^k و با در نظر گرفتن خطاهای E_1^k، E_2^k و E_3^k که همگی خطاهای محاسباتی هستند، به دست آورده‌ایم.
کاندیشن نامبر $G(x,d)$ که نقش مهمی در مطالعه‌مان دارد و برای جزئیات بیشتر [۶] را ببینید. در تمام فرمول‌ها برای سادگی، بردار b را در نظر نگرفته‌ایم. کاندیشن نامبر از $G(x,d)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{cond}\,(G;d) = \left\|G'_x(x^*;d)^{-1}G'_d(x^*;d)\right\|\frac{\|d\|}{\|x^*\|}, \qquad (10)$$

جایی که G'_x و G'_d مشتقات فرچهت نسبت به x و d هستند. برای جزئیات بیشتر [۲۱، ۲۰، ۱۸، ۶] را ببینید. فرض کنیم A و B ماتریس‌هایی به عنوان بردارهای ورودی نسبت به G باشند، آنگاه اگر

$$G(x;A,B)=Ax-B|x|-b,$$

آنگاه $G'_x(x;A,B)=A-BD(x)$ و $G'_A(x;A,B)=diag\,(x)$ و $G'_B(x;A,B)=-D(x)|x|$ که در آن $diag(x)$ یک ماتریس قطری با عناصر $d_{ii}=x_i$ و $i=1,\dots,n$ می‌باشند:

$$\text{cond}(G;A,B) = \left\|G'_x(x;A)^{-1}G'_A(x^*;A)\right\|\frac{\|A\|}{\|x^*\|} + \left\|G'_x(x^*;B)^{-1}\cdot G_B(x^*;B)\right\|\frac{\|B\|}{\|x^*\|}. \qquad (27)$$

با جایگزین کردن مشتقات G'_x و G'_A در رابطه‌ی (۲۷) داریم:

$$\text{cond}(G;A,B) = \left\|\left(A-BD(x^*)\right)^{-1}\times diag(x^*)\right\|\times\frac{\|A\|}{\|x^*\|} + \left\|\left(-BD(x^*)\right)^{-1}\times diag(x^*)\right\|\times\frac{\|B\|}{\|x^*\|}. \qquad (11)$$

با ساده‌تر کردن تساوی بالا داریم:

$$\text{cond}(G;A,B) = \left\|\left(A-BD(x^*)\right)^{-1}\right\|\times\|A\| + \|(-BD(x^*)^{-1}\|\times\|B\|. \qquad (12)$$

در رابطه‌ی (۲۹) اگر $D(x^*)=o$، آنگاه داریم:

$$K(G;A,B)=\left\|A^{-1}\right\|\|A\|. \qquad (13)$$

اکنون با در نظر گرفتن x^* تولید شده در روابط (۳) و (۴) به‌طور قطع می‌توان گفت که $x^{k+۱}$ خیلی وابسته به کاندیشن نامبر در رابطه‌ی (۳۰) است. اگر k خیلی بزرگ باشد، یعنی عدد کاندیشن نامبر عددی بزرگی باشد، آنگاه مقدار $G(x^k)$ به صفر میل می‌کند. بنابراین ما یک سیستم خطی همگن داریم.
اکنون فرض کنیم:

$$\begin{aligned}&\mathrm{fl}\left(G\left(x^k;A,B\right)\right)\\ &=\left(I+\Delta G_\varepsilon^k\right)G\left(x^k+x_\varepsilon^k;A+A_\varepsilon,B+B_\varepsilon\right)\\ &=G\left(x^k\right)+\delta G\left(x^k\right),\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

جایی که $eps = ۵ \times ۱۰^{-t}$ و O_ε به ترتیب دقت ماشین و خطای گرد کردن O و $\|\Delta G_\varepsilon^*\| \sim eps$ و $\|x_\varepsilon^*\| \sim eps$ و $\|A_\varepsilon\| \sim eps\|A\|$ و $\|B_\varepsilon\| \sim eps\|B\|$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}&\delta G\left(x^k\right)=\Delta G_\varepsilon^k G\left(x^k\right)+\\ &\left(A-BD\left(x^k\right)\right)x_\varepsilon^k+\\ &\mathrm{diag}\left(x^k\right)D\left(A_\varepsilon\right)\\ &+\left(-BD\left(x^k\right)\right)x_\varepsilon^k+\\ &\mathrm{diag}\left(x^*\right)D\left(B_\varepsilon\right)+O(\mathrm{eps})^۲,\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

جایی که D یک بردار با عناصر $d_i = max\, A_\varepsilon(i,j)$، $j = ۱,\dots,n$ و $d_i = max\, B_\varepsilon(i,j)$ که در آن $j = ۱,\dots,n$. بنابراین فرض کنیم:

$$\begin{aligned}&fl\left(G'\left(x^k;A,B\right)\right)\\ &=G'\left(x^k\right)+\delta G'\left(x^k\right),\\ &\delta G'\left(x^k\right)=O(eps).\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

آنگاه حل عددی (۳) با استفاده از $E_k = O(eps)$ را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\left(G'\left(x^k\right)+\delta G'\left(x^k\right)+E^k\right)\Delta\tilde{x}^k\\ &=G\left(x^k\right)+\delta G\left(x^k\right),\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

برای جزئیات بیشتر [۶] را ببینید. سپس $x^{k+۱}$ توسط فرمول زیر مقایسه شده است:

$$x^{k+۱} = (I+\varepsilon^k)(x^k+\Delta\tilde{x}^k) \qquad (۱۸)$$

جایی که ε^k ماتریس قطری با $\|\varepsilon^k\| \sim eps$ می‌باشد. اکنون می‌توانیم پایداری عددی (۳۴) و (۳۵) را اثبات کنیم.

قضیه ۸. فرض کنیم روابط (۳۱) و (۳۳) برقرار باشند، آنگاه روش (۳۴) و (۳۵) دارای پایداری عددی هستند.
برهان. اثبات مشابه قضیه‌ی ۵٫۱ در [۲۰] است یا به مرجع [۲۵] مراجعه نمایید.

اجرای عددی و مقایسات

در این قسمت از مطالعه، ما مرتبه‌ی همگرایی محاسباتی برای حل ۱۰۰ مثال از معادلات در کلاس جدید (۱) با استفاده از روش نیوتن تعمیم‌یافته به صورت زیر به دست آورده‌ایم.
با استفاده از دستور randi([-m,m],n,n) در متلب، ۱۰۰ ماتریس تصادفی $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ برای مقادیر متفاوت به طوری که $n = ۲۰,۵۰,۱۰۰,۵۰۰,۱۰۰۰$ و $m = ۱,۲,\dots,۲۰$ را به دست آورده‌ایم. ۱۰۰ جواب x^* با همین ایده تنها برای $m = ۰٫۵$ و همچنین بردار b را به صورت $b = Ax^* - B|x^*|$ به دست آمده است.

مقادیر $x^۰$ ابتدایی طوری انتخاب شده است که در مفروضات همخوانی داشته باشد. ما مرتبه‌ی همگرایی عددی (COC) به‌صورت زیر استفاده کرده‌ایم. برای جزئیات بیشتر به [۲۰، ۱۷، ۶، ۳] را ببینید.

$$\begin{aligned}&COC=\frac{L_n\left\|x^{k+۱}-x^k\right\|}{L_n\left\|x^k-x^{k-۱}\right\|},\\ &\left(k=۰,۱,۲,\dots\right).\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

در جدول‌های ۱ تا ۵، مرتبه‌ی همگرایی معادلات کلاس جدید (۱) را با دیگر روش‌ها مقایسه کرده‌ایم.

جدول ۱: نتایج عددی و مقایسات برای ۲۰ = n

روش	COC	زمان
روش حل زینلی و لطفی در [۲۱]	۱٫۷۳۰۰	۰٫۰۰۴۵۵
روش حل منگسرین در [۱۰]	۰٫۹۹۸۴	۰٫۰۰۰۲۵۵
روش حل خاکسار در [۵]	۱٫۲۲۷۵	۰٫۰۰۰۳۹۲
روش حل کلاس جدید (۱)	۲٫۰۵۱۷	۰٫۰۰۰۳۹۲

جدول ۲: نتایج عددی و مقایسات برای ۵۰ = n

روش	COC	زمان
روش حل زینلی و لطفی در [۲۱]	۲٫۰۸۱۴	۰٫۰۰۴۵۱
روش حل منگسرین در [۱۰]	۱٫۰۰۵۰	۰٫۰۰۰۳۵۰
روش حل خاکسار در [۵]	۱٫۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۷۰۰
روش حل کلاس جدید (۱)	۲٫۰۱۵۰	۰٫۰۰۰۸۹۷

جدول ۳: نتایج عددی و مقایسات برای ۱۰۰ = n

روش	COC	زمان
روش حل زینلی و لطفی در [۲۱]	۱٫۹۶۸۳	۰٫۰۰۰۸۹۶
روش حل منگسرین در [۱۰]	۱٫۰۲۸۴	۰٫۰۰۱۰۲۱
روش حل خاکسار در [۵]	۱٫۰۷۴۴	۰٫۰۰۲۱۰۵
روش حل کلاس جدید (۱)	۱٫۹۱۲۰	۰٫۰۰۳۷۵۲

جدول ۴: نتایج عددی و مقایسات برای ۵۰۰ = n

روش	COC	زمان
روش حل زینلی و لطفی در [۲۱]	۲٫۱۰۳۲	۰٫۰۲۱۶
روش حل منگسرین در [۱۰]	۱٫۰۲۲۸	۰٫۱۷۹۳۵
روش حل خاکسار در [۵]	۱٫۰۱۰۰	۰٫۰۳۵۸۱
روش حل کلاس جدید (۱)	۲٫۱۰۳۸	۰٫۰۷۳۹

جدول ۵: نتایج عددی و مقایسات برای ۱۰۰۰ = n

روش	COC	زمان
روش حل زینلی و لطفی در [۲۱]	۲٫۰۱۵۸	۰٫۰۷۸۸
روش حل منگسرین در [۱۰]	۱٫۱۱۸۱	۰٫۰۷۵۱۴
روش حل خاکسار در [۵]	۱٫۰۰۲۷	۰٫۱۷۶۶
روش حل کلاس جدید (۱)	۱٫۹۷۹۱	۰٫۴۳۱۲

نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش نیوتن تعمیم‌یافته برای حل کلاس جدیدی از معادلات مقدار قدرمطلقی را به کار گرفتیم که نه تنها دارای پایداری عددی بلکه دارای همگرایی موضعی مرتبه‌ی دوم نیز می‌باشد. از مزایای این روش، این است که دامنه‌ی انتخابمان برای حل معادلات قدر مطلقی بیشتر شده است. چون تا قبل از این کار، فقط انتخابمان روی معادلات در حالت $B = I$ بوده است. برای کارهای عادی پیشنهاد می‌شود از روش‌هایی بدون مشتقی مانند وتری یا استیفنسن برای حل این معادلات همراه با تحلیل خطا انجام شود. همچنین، تعمیم و توسعه روش‌ها بالاتر بدون مشتق هم می‌تواند ایده جالبی باشد زیرا بیشتر روش‌ها همگرایی خطی دارند و حجم محاسباتی بالای را هم در بر می‌گیرند. استفاده از تحلیل دینامیکی ناحیه جذب هم می‌تواند ایده مناسب دیگری برای مطالعه این معادلات باشد.

تشکر و قدردانی: نویسندگان مقاله بر خود لازم می‌دانند از داوران محترم که به ارتقا کیفیت مقاله کمک نموده‌اند مراتب تشکر و قدردانی خود را صمیمانه ابراز دارند.

فهرست منابع

[۱] L. Caccetta, B. Qu, and G. Zhou. A globally and quadratically convergent method for absolute value equations. Computational Optimization and Applications, ۴۸(۱):۴۵–۵۸, ۲۰۱۱.

[۲] A. Cordero, J. L. Hueso, E. Martinez, and J. R. Torregrosa. A modified Newton-Jarratts composition. Numerical Algorithms, ۵۵(۱):۸۷–۹۹, ۲۰۱۰.

[۳] A. Cordero, T. Lotfi, K. Mahdiani, and J. R. Torregrosa. A stable family with high order of convergence for solving nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, ۲۵۴:۲۴۰–۲۵۱, ۲۰۱۵.

[۴] R. Farhadsefat, T. Lotfi, and J. Rohn. A note on regularity and positive definiteness of interval matrices. Open Mathematics, ۱۰(۱):۳۲۲–۳۲۸, ۲۰۱۲.

[۵] F. K. Haghani. On generalized Traubs method for absolute value equations. Journal of Optimization Theory and Applications, ۱۶۶(۲):۶۱۹–۶۲۵, ۲۰۱۵.

[۶] N. J. Higham. Accuracy and stability of numerical algorithms. SIAM, ۱۹۹۶.

[۷] J. L. Hueso, E. Martinez, and J. R. Torregrosa. Modified Newtons method for systems of nonlinear equations with singular Jacobian. Journal of Computational and Applied Mathematics, ۲۲۴(۱):۷۷–۸۳, ۲۰۰۹.

[۸] T. Lotfi, P. Bakhtiari, A. Cordero, K. Mahdiani, and J. R. Torregrosa. Some new efficient multipoint iterative methods for solving nonlinear systems of equations. International Journal of Computer Mathematics, ۹۲(۹):۱۹۲۱–۱۹۳۴, ۲۰۱۵.

[۹] T. Lotfi, K. Mahdiani, P. Bakhtiari, and F. Soleymani. Constructing two-step iterative methods with and without memory. Computational Mathematics and Mathematical Physics, ۵۵(۲):۱۸۳–۱۹۳, ۲۰۱۵.

[۱۰] O. Mangasarian. A generalized newton method for absolute value equations. Optimization Letters, ۳(۱):۱۰۱–۱۰۸, ۲۰۰۹.

[۱۱] O. Mangasarian and R. Meyer. Absolute value equations. Linear Algebra and Its Applications, ۴۱۹(۲-۳):۳۵۹–۳۶۷, ۲۰۰۶.

[۱۲] O. L. Mangasarian. Absolute value equation solution via concave minimization. Optimization Letters, ۱(۱):۳–۸, ۲۰۰۷.

[۱۳] O. L. Mangasarian. A hybrid algorithm for solving the absolute value equation. Optimization Letters, ۹(۷):۱۴۶۹–۱۴۷۴, ۲۰۱۵.

[۱۴] O. Prokopyev. On equivalent reformulations for absolute value equations. Computational Optimization and Applications, ۴۴(۳):۳۶۳, ۲۰۰۹.

[۱۵] J. Rohn. On unique solvability of the absolute value equation. Optimization Letters, ۳(۴):۶۰۳–۶۰۶, ۲۰۰۹.

[۱۶] J. Rohn, V. Hooshyarbakhsh, and R. Farhadsefat. An iterative method for solving absolute value equations and sufficient conditions for unique solvability. Optimization Letters, ۸(۱):۳۵–۴۴, ۲۰۱۴.

[۱۷] F. Soleymani, T. Lotfi, and P. Bakhtiari. A multi-step class of iterative methods for nonlinear systems. Optimization Letters, ۸(۳):۱۰۰۱–۱۰۱۵, ۲۰۱۴.

[۱۸] J. Stoer and R. Bulirsch. Introduction to numerical analysis, volume ۱۲. Springer Science & Business Media, ۲۰۱۳.

[۱۹] J. F. Traub. Iterative methods for the solution of equations, volume ۳۱۲. American Mathematical Soc., ۱۹۸۲.

[۲۰] H. Wozniakowski. Numerical stability for solving nonlinear equations. Numerische Mathematik, ۲۷(۴):۳۷۳–۳۹۰, ۱۹۷۶.

[۲۱] N. Zainali and T. Lotfi. On developing a stable and quadratic convergent method for solving absolute value equation. Journal of Computational and Applied Mathematics, ۳۳۰:۷۴۲–۷۴۷, ۲۰۱۸.

[۲۲] T. Lotfi; Y. Seif, An improved generalized Newton generalized method for absolute value equation, New Researches in Mathematics, ۲۹ (۷) ۱۰۳-۱۱۰, ۲۰۲۱

[۲۳] Wang, A., Cao, Y., Chen, J.-X., Modified Newton-Type iteration methods for generalized absolute value equations, J. Optimization Theory and Applications, ۱۸۱(۱), ۲۱۶-۲۳۰, ۲۰۱۹

[۲۴] L. Zheng, L. The Picard-HSS-SOR iteration method for absolute value equations. J Inequal Appl ۲۰۲۰, ۲۵۸ ۲۰۲۰.

[۲۵] Y. Cao, Q. Shi, S. Zhu, A relaxed generaized Newton iteration method for generalized absolute value equation, AIMS Mathematics, ۶(۲), ۱۲۵۸-۱۲۷۵, ۲۰۲۱