

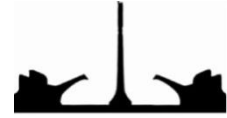
دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال نهم، شماره چهل و یکم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۲

شماره شاپا: X۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

رویکردی نوین در بکارگیری روش تحلیل هموتوپی

مجتبی قنبری*

گروه ریاضی، واحد علی آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی آباد کتول، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۰۱

چکیده

یکی از روش‌های بسیار مهم در حل مسائل خطی و غیرخطی، روش تحلیل هموتوپی است که توسط لیائو در سال ۱۹۹۲ مطرح گردید. هدف اصلی این مقاله، بهبود روش تحلیل هموتوپی است که این نوع بهبود یافته را روش تحلیل هموتوپی متوالی نامگذاری نموده‌ایم. جهت مقایسه نتایج به دست آمده توسط روش تحلیل هموتوپی و نوع متوالی آن، چندین مثال عددی ارائه شده است که نتایج نشان می‌دهند، حجم محاسبات در روش تحلیل هموتوپی متوالی نسبت به نوع معمولی آن کمتر است. همچنین، برخلاف روش تحلیل هموتوپی، جواب‌های عددی به دست آمده توسط روش تحلیل هموتوپی متوالی در یک محدوده نسبتاً وسیعی رضایت‌بخش هستند. بنابراین، با توجه به روش تحلیل هموتوپی متوالی، می‌توان انواع مختلف معادلات ریاضی خطی و غیرخطی و همچنین معادلاتی غیرخطی که در سایر رشته‌های علمی مانند فیزیک و مکانیک به وجود می‌آیند را به صورت عددی حل نمود.

واژه‌های کلیدی: سری جواب، روش تحلیل هموتوپی، مسائل مقدار اولیه ی غیرخطی، جواب تقریبی.

۱- مقدمه

یکی از روش‌هایی که در چند سال گذشته کارهای پژوهشی بسیاری بر روی آن صورت گرفته است، روش تحلیل هموتویی (HAM)^۲ می‌باشد. این روش که در سال ۱۹۹۲ توسط پروفیسور لیائو مطرح گردید [۱] به عنوان یکی از روش‌های مؤثر در حل انواع مختلف معادلات غیرخطی شناخته می‌شود [۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷]. به عنوان نمونه، برخی از تازه‌ترین کارهای پژوهشی صورت گرفته در مورد این روش را در ادامه معرفی می‌نماییم.

در سال ۲۰۱۸، چوانگ یو و همکاران، از روش تحلیل هموتویی برای حل نیمه تحلیلی نوع خاصی از معادله حمل و نقل استفاده نمودند [۸]. همچنین در همان سال شیرخانی و همکاران، کاربردی از روش تحلیل هموتویی و چند روش دیگر را در مبحث جریان سیال نیوتنی بین دو صفحه موازی ارائه دادند [۹]. در سال ۲۰۱۹، حسین و همکاران، یک جواب تحلیلی تقریبی را برای معادله آلن-کان که معادله‌ای است برای توصیف پدیده‌های فیزیکی طبیعی، براساس روش تحلیلی هموتویی ارائه دادند [۱۰]. همچنین احمد نایک و همکاران، با استفاده از روش تحلیل هموتویی، توانستند یک جواب تحلیلی تقریبی برای مدل دینامیکی ویروس HIV ارائه دهند [۱۱]. ضمناً برای اطلاعات بیشتر در خصوص جدیدترین مقالات چاپ شده در رابطه با روش تحلیل هموتویی، می‌توان به منابع [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ و ۱۶] مراجعه نمود.

هدف اصلی این مقاله آن است که روش تحلیل هموتویی را به گونه‌ای جدید روی مسائل مقدار اولیه اجرا کند، به طوری که نتایج عددی به دست آمده نسبت به اجرای معمولی روش تحلیل هموتویی، در یک بازه بزرگتر، به جواب همگرا باشد. در این مقاله این نوع بهبود از روش تحلیل هموتویی

را روش تحلیل هموتویی متوالی^۳ یا به صورت مختصر SHAM می‌نامیم.

۲- روش تحلیل هموتویی

برای معرفی این روش، معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$N[u(t)] = g(t) \quad (۱)$$

که در آن N یک عملگر دیفرانسیل کلی که شامل قسمت‌های خطی و غیرخطی است، می‌باشد. همچنین در معادله (۱) تابع $g(t)$ یک تابع معلوم، t متغیر مستقل و $u(t)$ یک تابع مجهول می‌باشد. در این قسمت، برای سادگی کار، از شرایط اولیه و مرزی که بر مسأله مورد بحث حاکم است، صرف نظر می‌کنیم. با استفاده از مفهوم هموتویی، لیائو معادله‌ای به نام "معادله تغییر شکل مرتبه صفر ام"^۴ به صورت

$$\begin{aligned} \hbar (1-p)L[\varphi(t;p) - u_0(t)] &= p \\ H(t)\{N[\varphi(t;p)] - g(t)\} & \end{aligned} \quad (۲)$$

معرفی نمود [۱]. در معادله (۲)، پارامتر p را "پارامتر نشانده^۵" می‌نامند که عددی است بین صفر تا یک، یا به عبارتی دیگر $p \in [0,1]$. همچنین پارامتر ناصفر \hbar را "پارامتر کنترل همگرایی" می‌نامند و تابع ناصفر $H(t)$ یک تابع کمکی، L یک عملگر خطی کمکی، $u_0(t)$ یک حدس اولیه از تابع مجهول $u(t)$ و $\varphi(t;p)$ تابعی مجهول می‌باشد. نکته مهم در این روش آن است که آزادی عمل زیادی برای انتخاب پارامترها و توابع کمکی برای رسیدن به همگرایی، وجود دارد. واضح است هرگاه قرار دهیم $p = 0$ ، آنگاه با استفاده از معادله (۲) داریم $\varphi(t;0) = u_0(t)$ و

³ Successive homotopy analysis method

⁴ Zero-order deformation equation

⁵ Embedding parameter

² Homotopy Analysis method

$$R_m(\overline{u_{m-1}}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\varphi(t; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0}$$

و

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m = 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

بعد از محاسبه $u_m(t)$ ها، می‌توان جواب تقریبی مرتبه N ام را با نماد $U_N(t)$ و به صورت زیر ارائه داد:

$$U_N(t) = \sum_{m=0}^N u_m(t) \quad (۶)$$

که در این صورت نتیجه خواهیم گرفت:

$$u(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} U_N(t)$$

در سال ۲۰۰۳، لیائو قضیه ذیل را در خصوص سری جواب به دست آمده $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)$ ارائه داد [۱۷].

قضیه ۱-۲: هرگاه سری به دست آمده $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)$ و همچنین سری $\sum_{m=0}^{\infty} L[u_m(t)]$ همگرا باشند، آنگاه سری $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)$ ، جوابی برای معادله ی دیفرانسیل غیرخطی $N[u(t)] = g(t)$ است.

همچنین در سال ۲۰۰۹، ونگورد و همکارانش، چندین شرط لازم و کافی برای همگرایی سری جواب $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)$ ارائه دادند [۷]. نکته‌ای که در اجرای این روش می‌بایستی به آن توجه شود، تاثیر انتخاب مقدار پارامتر \hbar روی همگرایی سری جواب $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)$ است. یک روش برای انتخاب مقدار مناسب \hbar ، رسم منحنی جواب تقریبی یا مشتقات آن بر اساس پارامتر \hbar ، به ازای نقطه یا نقاط ابتدایی است. براساس این منحنی که به \hbar -منحنی^۶ معروف است، ناحیه‌ای که در آن منحنی

نیز هرگاه $p = 1$ ، آنگاه $\varphi(t; 1) = u(t)$. بنابراین هرگاه پارامتر p از صفر به یک افزایش یابد، آنگاه $\varphi(t; p)$ ، از حدس اولیه $u_0(t)$ به جواب $u(t)$ تغییر می‌یابد. همچنین، با محاسبه بسط مک لورن تابع $\varphi(t; p)$ نسبت به پارامتر p ، خواهیم داشت

$$\varphi(t; p) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) p^m \quad (۳)$$

که در آن

$$u_m(t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(t; p)}{\partial p^m} \Big|_{p=0} \quad (۴)$$

هرگاه عملگر خطی L ، حدس اولیه $u_0(t)$ ، پارامتر کنترل همگرایی \hbar و تابع کمکی $H(t)$ ، به طور مناسب انتخاب شوند، آنگاه سری (۳) به ازای $p = 1$ همگرا خواهد بود. در این صورت خواهیم داشت

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)$$

یعنی سری فوق، یک جواب برای معادله دیفرانسیل غیرخطی (۱) خواهد بود [۱]. حال برای تعیین روابطی جهت به دست آوردن $u_m(t)$ ها، بردار \vec{u}_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{u}_n = \{u_0(t), u_1(t), \dots, u_n(t)\}$$

در این صورت، هرگاه از معادله ی (۲) نسبت به پارامتر p ، m بار مشتق گرفته و بعد از آن قرار دهیم $p = 0$ و در نهایت بر $m!$ تقسیم نماییم، آنگاه معادله زیر که به معادله‌ی تغییر شکل مرتبه m ام معروف است، به دست خواهد آمد:

$$L[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] = \hbar H(t) \left\{ R_m(\overline{u_{m-1}}) - (1 - \chi_m) g(t) \right\} \quad (۵)$$

که در آن

^۶ \hbar -curve

۱، ناحیه مناسب \hbar تقریباً برابر $[-1.6, -0.4]$ است. برای مقایسه نتایج به دست آمده با جواب دقیق، نمودار تقریب مرتبه 20ام جواب یعنی $U_{20}(t) = \sum_{m=0}^{20} u_m(t)$ را به همراه نمودار جواب دقیق به ازای $\hbar = -1.4, -1, -0.7, -0.4$ در شکل ۲ رسم شده‌اند. از روی شکل ۲ مشخص است که برای تقریب 20ام به ازای $\hbar = -0.4$ نتایج بهتری به دست می‌آید.

از طرفی همانطور که از شکل ۲ نتیجه می‌شود، بعد از انجام محاسبات بسیار و به دست آوردن تقریب مرتبه 20ام، در بهترین حالت، از $t = 0$ الی $t = 2.5$ توانستیم نتایج خوبی کسب نماییم. بدیهی است هر گاه بخواهیم در بازه بزرگتری نتایج مناسبی به دست آوریم، می‌بایستی تعداد تکرار را افزایش داده که این امر مستلزم صرف زمان بسیاری است. بنابراین در این مثال، همگرایی روش تحلیل هموتویی بسیار کند است. برای درک بهتر مطالب ذکر شده، خطای نسبی تقریب مرتبه 80ام، به ازای \hbar ها و t های مختلف در جدول ۱ ارائه شده است. واضح است که حصول چنین نتایجی مستلزم انجام محاسبات طولانی و صرف زمان بسیار است. طبق جدول ۱ و در بهترین حالت که همان حالت $\hbar = -0.4$ است، خطای نسبی به دست آمده تا اندکی بیش از $t = 2.5$ عدد کوچکی است. اما به ازای t های بزرگتر، خطای نسبی به سرعت افزایش می‌یابد. این وضع، به ازای مابقی \hbar ها شرایط بدتری به خود می‌گیرد. لذا برای این مثال بسیار ساده، سرعت همگرایی روش تحلیل هموتویی بسیار کند است.

تقریباً موازی محور افقی است، به عنوان ناحیه معتبر برای \hbar شناخته می‌شود. همچنین در سرتاسر این مقاله، براساس قضیه ۱-۶ مرجع [۷] و بدون از دست دادن کلیت، قرار می‌دهیم $H(t) = 1$. در ادامه، روش تحلیل هموتویی را بروی یک معادله دیفرانسیل معمولی به کار می‌بریم و نتایج حاصل از آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

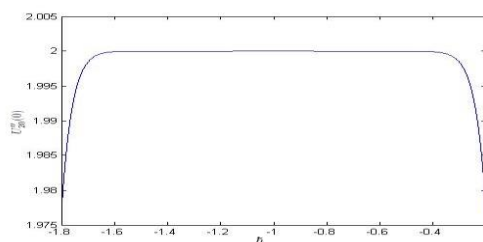
مثال ۱-۲: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی $u''(t) + u'(t).u(t) = 2 + 2t^3$ را با شرایط اولیه $u(0) = 0$ و $u'(0) = 0$ و با تابع جواب $u(t) = t^2$ در نظر بگیرید. با استفاده از روش تحلیل هموتویی می‌توان دستور تکراری زیر را به دست آورد.

$$u_1(t) = \hbar \int_0^t \int_0^s \{u_0''(r) + u_0'(r).u_0(r) - 2 - 2r^3\} dr ds$$

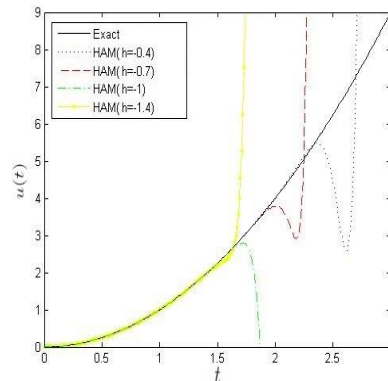
$$u_m(t) = u_{m-1}(t) + \hbar \int_0^t \int_0^s \left\{ u_{m-1}''(r) + \sum_{i=0}^{m-1} u_i'(r).u_{m-1-i}(r) \right\} dr ds$$

$$m \geq 0$$

در دستور تکراری فوق تابع شروع را $u_0(t) = 0$ در نظر می‌گیریم. جهت به دست آوردن ناحیه مناسب \hbar ، برای همگرایی سری جواب، نمودار $-\hbar$ منحنی را برای مشتق دوم تقریب 20ام تابع جواب، یعنی تابع $U_{20}''(t) = \sum_{m=0}^{20} u_m''(t)$ به ازای $t = 0$ در شکل ۱ رسم نموده‌ایم. براساس شکل



شکل ۱: نمودار $-\hbar$ - منحنی حاصل از تقریب 20ام، برای مثال ۱-۲.



شکل ۲: مقایسه جواب تقریبی مرتبه ۱۲۰ام با جواب دقیق و به ازای \hbar های مختلف، برای مثال ۱-۲.

جدول ۱: خطای نسبی جواب تقریبی مرتبه ۸۰ام به دست آمده با استفاده از روش تحلیل هموتویی برای مقادیر مختلف \hbar ، برای مثال ۱-۲.

t	$\hbar = -0.4$	$\hbar = -1$	$\hbar = -1.4$
0.5	1.469e-18	1.201e-72	3.726e-30
1	1.169e-17	6.260e-36	6.794e-16
1.4	6.520e-16	2.966e-17	3.250e-02
1.5	2.028e-15	2.929e-13	8.107e+01
1.9	1.712e-11	7.355e+01	8.468e+14
2.	2.427e-10	1.509e+05	4.382e+17
2.1	2.905e-09	2.541e+08	1.275e+21
2.2	5.459e-09	3.592e+11	4.477e+23
2.5	9.680e-03	4.168e+20	6.987e+32
2.6	6.792e-01	3.378e+23	8.320e+35
2.7	5.423e+01	2.435e+26	3.417e+38
3	3.634e+07	4.711e+34	1.035e+47
5	7.227e+49	2.419e+80	1.106e+93
7	1.489e+83	3.451e+113	3.333e+126
10	5.404e+119	4.644e+149	4.913e+162

N بار از معادله (۵) استفاده نموده تا مؤلفه‌های $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$ به دست آید. در این صورت همان طور که در مثال ۱-۲ ملاحظه شد، ممکن است خطای نسبی جواب‌های به دست آمده تنها به ازای بازه کوچکی از t ، اعداد نزدیک به صفر، باشند.

حال در این قسمت می‌خواهیم روش تحلیل هموتویی را به گونه‌ای دیگر روی معادله (۱) اجرا نماییم، به طوری که با همان N بار استفاده از معادله (۵)، بتوان جواب‌هایی به دست آورد که در بازه بزرگتری از t ، خطای نسبی کمتری نسبت

۳- روش پیشنهادی

معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید که $u_0(t)$ به عنوان جواب شروع مسأله باشد که از روی شرایط اولیه و یا مرزی حاکم بر مسأله به دست می‌آید. با توجه به مطالب بیان شده در قسمت قبل، هرگاه روش تحلیل هموتویی را روی این معادله اجرا کنیم و تقریب N ام را به دست آوریم، آنگاه این تقریب به صورت معادله (۶) است که در آن مؤلفه‌های $u_m(t)$ به ازای $m = 1, 2, \dots, N$ ، از روی معادله (۵) به دست می‌آیند. بنابراین برای به دست آوردن تقریب N ام می‌بایستی

به اجرای معمولی این روش داشته باشد.

برای توصیف این نحوه اجرای جدید، ابتدا فرض کنید که بخواهیم معادله دیفرانسیل (۱) را در بازه $[a, b]$ حل نماییم. همچنین فرض کنید که n عددی باشد که بر عدد N بخش پذیر باشد، که در این صورت قرار می‌دهیم:

$$k = \frac{N}{n}$$

به طور مثال، در ساده‌ترین حالت ممکن، می‌توان قرار داد $n = N$ و $k = 1$ حال بازه $[a, b]$ را به n قسمت مساوی به طول گام d تقسیم می‌کنیم و نقاط t_0, t_1, \dots, t_n را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} t_0 &= a, \\ t_1 &= a + d, \\ &\vdots \\ t_n &= a + nd = b. \end{aligned}$$

حال مسأله (۱) را در بازه $[t_0, t_1]$ به روش تحلیل هموتویی و با جواب شروعی که از روی شرایط اولیه و یا مرزی به دست آید، حل می‌کنیم و جواب تقریبی مرتبه $k = \frac{N}{n}$ ام را به دست می‌آوریم. این جواب را به دلیل آن که مربوط به اولین زیر بازه است با نماد زیر نشان می‌دهیم:

$$U_k^1(t) = \sum_{m=0}^k u_m^1(t)$$

که در آن همان جواب شروع است و $u_m^1(t)$ به ازای $m = 1, 2, \dots, k$ از روی معادله (۵) به دست می‌آیند. واضح است که در این مرحله، k بار از معادله (۵) جهت به دست آوردن مؤلفه‌های جواب استفاده می‌شود.

در مرحله بعدی اجرا، معادله (۱) را در بازه $[t_1, t_2]$ به روش تحلیل هموتویی حل می‌کنیم و

در این بازه هم، جواب تقریبی مرتبه k ام را به دست می‌آوریم. نکته مهم در این بخش آن است که برای انتخاب جواب شروع در این مرحله، از مقادیر تابع $U_k^1(t)$ و مشتقات آن در نقطه $t = t_1$ استفاده می‌کنیم. جواب به دست آمده در این مرحله که مربوط به زیربازه دوم است را با نماد

$$U_k^2(t) = \sum_{m=0}^k u_m^2(t)$$

روند فوق را در بقیه زیر بازه‌های ادامه می‌دهیم و جواب‌های $U_k^3(t), U_k^4(t), \dots, U_k^n(t)$ را که به ترتیب مربوط به زیر بازه‌های سوم، چهارم الی n ام است را به دست می‌آوریم.

همان طور که واضح است، در این نوع نحوه اجرا، روش تحلیل هموتویی را به صورت متوالی روی تمام زیر بازه‌ها اجرا می‌کنیم و از نتیجه به دست آمده در هر زیر بازه برای انتخاب جواب شروع در زیربازه بعدی استفاده می‌نماییم. بدین جهت در این مقاله، این نوع نحوه اجرای روش تحلیل هموتویی، با نام "روش تحلیل هموتویی متوالی" نامگذاری شده است.

نکاتی در خصوص این نوع بهبود از روش تحلیل هموتویی وجود دارد که در ادامه به آنها اشاره می‌کنیم:

(۱) برای به دست آوردن جواب در هر زیر بازه، k بار از معادله (۵) استفاده می‌شود. بنابراین در مجموع، برای به دست آوردن جواب در کل بازه $[a, b]$ ، در مجموع $N = nk$ بار از معادله (۵) استفاده می‌کنیم که برابر همان تعداد بار استفاده‌ای است که برای به دست آوردن جواب تقریبی مرتبه N ام بوسیله روش تحلیل هموتویی معمولی انجام شده است. بنابراین، می‌توان یک مقایسه منصفانه‌ای بین این دو روش انجام داد.

(۲) جواب تقریبی که براساس روش تحلیل هموتویی متوالی به دست می‌آید، در واقع، فرم یک تابع چندضابطه‌ای به صورت زیر را دارد:

افزایش m از $m = 1$ به $m = k$ سیر صعودی می‌گیرد. این روند آنقدر ادامه دارد تا به زیربازه آخر برسد.

بنابراین با توجه به آنکه $k = \frac{N}{n}$ ، افزایش حجم محاسبات در این روش نسبت به روش معمولی آن، کنترل شده است. به این معنی که حل یک مسأله با حجم محاسبات بالا را به حل چند مسأله با حجم محاسبات نسبتاً کمتر، تبدیل می‌کند.

(۴) برای بهتر نشان دادن مزیت‌های روش تحلیل هموتویی متوالی نسبت به نوع معمولی آن، می‌بایستی بازه‌ای که مسأله مورد نظر روی آن حل می‌شود، و همچنین مرتبه جواب تقریبی، نسبتاً بزرگ انتخاب شود. در این صورت خواهیم دید که اگرچه ممکن است در نقاط نزدیک به ابتدای بازه، روش تحلیل هموتویی معمولی جواب‌های بهتری نسبت به روش تحلیل هموتویی متوالی دهد، اما هر چه به انتهای بازه نزدیک‌تر شویم، این موضوع به صورت شدیدتری حالت عکس پیدا می‌کند.

در بخش بعدی مقاله، جهت بررسی نکات فوق‌الذکر، معادلات دیفرانسیل ارائه شده در مثال ۲-۱ را این بار به وسیله روش تحلیل هموتویی متوالی حل کرده و سپس جواب‌های به دست آمده را با جواب دقیق ارائه شده در مثال ۲-۱ مقایسه می‌کنیم.

۴- مثال‌های عددی

مثال ۴-۱: معادله دیفرانسیل غیرخطی ارائه شده در مثال ۲-۱، یعنی

$$u''(t) + u'(t).u(t) = 2 + 2t^3,$$

را با شرایط اولیه $u(0) = 0$ و $u'(0) = 0$ در نظر بگیرید. فرض کنید که می‌خواهیم جواب را در بازه $[0, 7]$ بیابیم. با توجه به اینکه در مثال ۲-۱ براساس روش تحلیل هموتویی معمولی، خطای نسبی جواب تقریبی مرتبه ۸۰ام را به دست آورده-ایم، لذا برای داشتن یک مقایسه منصفانه، در این

$$U_N(t) = \begin{cases} U_k^1(t), & t \in [t_0, t_1], \\ U_k^2(t), & t \in [t_1, t_2], \\ \vdots \\ U_k^n(t), & t \in [t_{n-1}, t_n], \end{cases}$$

که در آن n عدد دلخواهی است که بر N بخش پذیر می‌باشد و $k = \frac{N}{n}$ و همچنین

$$U_k^i(t) = \sum_{m=0}^k u_m^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

(۳) همان طور که پیش‌تر بیان شد، هرگاه بخواهیم با استفاده از روش تحلیل هموتویی معمولی، جواب

تقریبی مرتبه N ام، $U_N(t) = \sum_{m=0}^N u_m(t)$ را برای

معادله (۱) بیابیم، ابتدا می‌بایستی با استفاده از معادله (۵)، $u_m(t)$ ها را به ازای $m = 1, 2, \dots, N$ به دست آوریم. در این قسمت، عموماً با افزایش m از $m = 1$ به $m = N$ ، ضابطه $u_m(t)$ در هر مرحله نسبت به مرحله قبل طولانی‌تر می‌شود، که این امر، به ازای N های بزرگ، موجب افزایش حجم محاسبات و در نتیجه صرف زمان زیادی برای اجرای روش و به دست آوردن جواب تقریبی مرتبه N ام است.

در حالی که هرگاه بخواهیم $U_N(t)$ را با استفاده از روش تحلیل هموتویی متوالی به دست آوریم می-

بایستی $u_m^i(t)$ را به ازای $m = 1, 2, \dots, k$ و $i = 1, 2, \dots, n$ که تعداد کل آنها برابر $nk = N$

است، را تعیین کنیم. در این روش به دلیل آنکه در هر زیربازه، روش را به طور مستقل اجرا می-

کنیم و فقط از جواب به دست آمده در هر زیربازه برای انتخاب جواب شروع در زیربازه بعدی استفاده

می‌کنیم، لذا افزایش حجم محاسبات در یک زیربازه ارتباطی با افزایش آن در زیربازه بعدی ندارد. به

همین دلیل در این حالت، با ازای هر i ، با افزایش m از $m = 1$ به $m = k$ حجم محاسبات

افزایش می‌یابد و سپس با تغییر i به $i + 1$ ، حجم محاسبات به حالت اولیه و شروع برگشته و دوباره با

$$\forall t \in [t_1, t_2] \Rightarrow U_1^2(t) = u_0^2(t) + u_1^2(t).$$

این امر به صورت متوالی در زیربازه‌های سوم تا ۸۰ام ادامه می‌یابد. یعنی در زیربازه ۸۰ام داریم:

$$\forall t \in [t_{79}, t_{80}]:$$

$$u_1^{80}(t) = u_0^{80}(t) + \hbar \int_{t_1}^{t_2} \left\{ u_0^{80''}(s) + u_0^{80'}(s) u_0^{80}(s) - 2 - 2s^3 \right\} ds,$$

که در آن $u_0^{80}(t) = U_1^{79'}(t_0) \cdot (t - t_0) + U_1^{79}(t_0)$. و در نهایت جواب تقریبی مرتبه اول در بازه ۸۰ام به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\forall t \in [t_{79}, t_{80}] \Rightarrow U_1^{80}(t) = u_0^{80}(t) + u_1^{80}(t).$$

لذا جواب تقریبی مرتبه ۸۰ام معادله دیفرانسیل ارائه شده در مثال ۴-۱ به فرم یک تابع چندضابطه-ای به صورت زیر می‌باشد.

$$U_{80}(t) = \begin{cases} U_1^1(t), & t \in [t_0, t_1], \\ U_1^2(t), & t \in [t_1, t_2], \\ \vdots \\ U_1^{80}(t), & t \in [t_{79}, t_{80}], \end{cases}$$

خطای نسبی جواب به دست آمده فوق به ازای $\hbar = -0.4, -0.7, -1, -1.4,$

و برای بعضی از t_i ها، در جدول ۲ ارائه شده است. همچنین در شکل ۳، جواب دقیق و جواب تقریبی به دست آمده به وسیله مقادیر مختلفی از \hbar رسم شده است. همان طور که از فرآیند اجرای روش و نیز مقایسه جدول ۲ و شکل ۳ با جدول ۱ و شکل ۲ مشخص است، در یک مدت زمان کمتر، با استفاده از روش تحلیل هموتوپی متوالی نتایج مناسب‌تری نسبت به نوع معمولی آن، به جز نقاط ابتدایی بازه به دست می‌آوریم.

مثال بازه $[0, 7]$ را به ۸۰ قسمت مساوی تقسیم نموده و در هر زیربازه تنها یک بار از دستور بازگشتی معادله (۵) استفاده می‌کنیم. بنابراین در این مثال نیز مشابه مثال ۲-۱، در مجموع ۸۰ مرتبه از معادله (۵) استفاده می‌شود. برای حل معادله، همان طور که بیان شد، ابتدا بازه $[0, 7]$ را به ۸۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و نقاط t_0, t_1, \dots, t_{80} را به دست می‌آوریم. حال در زیربازه اول داریم:

$$\forall t \in [t_0, t_1]:$$

$$u_1^1(t) = u_0^1(t) + \hbar \left\{ u_0^{1''}(s) + u_0^{1'}(s) u_0^1(s) - 2 - 2s^3 \right\} ds,$$

که در آن

$$u_0^1(t) = u'(t_0) \cdot (t - t_0) + u(t_0) = 0$$

حال جواب تقریبی مرتبه اول در زیربازه اول به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \Rightarrow U_1^1(t) = u_0^1(t) + u_1^1(t).$$

به صورت مشابه، در زیربازه دوم داریم:

$$\forall t \in [t_1, t_2]:$$

$$u_1^2(t) = u_0^2(t) + \hbar \int_{t_1}^{t_2} \left\{ u_0^{2''}(s) + u_0^{2'}(s) u_0^2(s) - 2 - 2s^3 \right\} ds,$$

که در آن

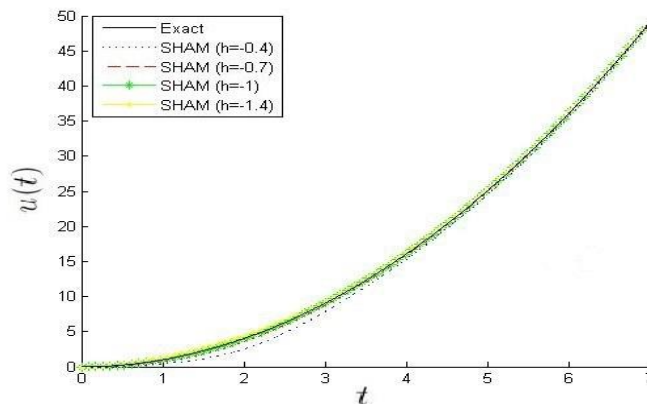
$$u_0^2(t) = U_1^1'(t_0) \cdot (t - t_0) + U_1^1(t_0).$$

این یعنی آن که جواب شروع در زیربازه بعدی از روی جواب به دست آمده در زیربازه قبلی به دست می‌آید. بنابراین همانطور که واضح است زمان اجرای برنامه در زیربازه‌ها تفاوت چندانی با هم ندارند. حال جواب تقریبی مرتبه اول را در زیربازه دوم به صورت زیر به دست می‌آوریم:

جدول ۲: خطای نسبی جواب به دست آمده به وسیله SHAM به ازای $a = 0$, $b = 7$, $n = 80$ و $k = 1$ برای مقادیر

مختلف \hbar و برخی مقادیر t , مربوط به مثال ۴-۱.

t	$\hbar = -0.4$	$\hbar = -0.7$	$\hbar = -1$	$h = -1.4$
0.3544	5.9844e-01	2.9804e-01	1.0850e-03	3.9702e-01
0.7089	5.8783e-01	2.8609e-01	3.9887e-03	3.6564e-01
1.0633	5.5986e-01	2.5678e-01	7.8012e-03	2.9040e-01
1.4177	5.0828e-01	2.0845e-01	1.1039e-02	1.9535e-01
1.7722	4.3165e-01	1.4903e-01	1.2449e-02	1.1914e-01
2.1266	3.3682e-01	9.3852e-02	1.2064e-02	7.3847e-02
2.4810	2.3976e-01	5.4820e-02	1.0855e-02	4.9262e-02
2.8354	1.5881e-01	3.2267e-02	9.5674e-03	3.5060e-02
3.1899	1.0310e-01	1.9935e-02	8.4295e-03	2.6166e-02
3.5443	6.9162e-02	1.2774e-02	7.4553e-03	2.0234e-02
3.8987	4.8722e-02	8.3222e-03	6.6202e-03	1.6075e-02
4.2532	3.5657e-02	5.4302e-03	5.8982e-03	1.3037e-02
4.6076	2.6788e-02	3.4958e-03	5.2673e-03	1.0740e-02
4.9620	2.0516e-02	2.1760e-03	4.7104e-03	8.9499e-03
5.3165	1.5951e-02	1.2645e-03	4.2137e-03	7.5190e-03
5.6709	1.2554e-02	6.3184e-04	3.7666e-03	6.3488e-03
6.0253	9.9808e-03	1.9392e-04	3.3608e-03	5.3726e-03
6.3797	8.0020e-03	1.0541e-04	2.9897e-03	4.5435e-03
6.7342	6.4614e-03	3.0450e-04	2.6479e-03	3.8198e-03
7.0000	5.5263e-03	4.0446e-04	2.4082e-03	4.3701e-03



شکل ۳: مقایسه جواب تقریبی مرتبه ۸۰م به دست آمده بوسیله روش تحلیل هموتوبی متوال (SHAM) با جواب دقیق در بازه $t \in [0, 7]$ ، به ازای \hbar های مختلف، مربوط به مثال ۴-۱.

$$u'(t) + u^2 = 1 + \cos(t) - \cos^2(t),$$

را با شرط اولیه $u(0) = 0$ در نظر بگیرید. جواب دقیق معادله فوق به صورت $u(t) = \sin(t)$ می-باشد.

فرض کنید که می‌خواهیم جواب را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابیم. ابتدا مسأله فوق را به روش تحلیل هموتوبی

در ادامه، روش تحلیل هموتوبی معمولی (HAM) و نوع متوالی آن (SHAM) را برای دو معادله دیفرانسیل غیرخطی دیگر نیز مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

مثال ۴-۲: معادله دیفرانسیل غیرخطی

مثال ۴-۳: مسأله مقدار اولیه غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u''(t) + u'(t) \cdot u(t) = \\ 3t^5 - 5t^4 + 2t^3 + 6t - 2, \\ u(2) = 4, \quad u'(2) = 8, \quad 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

جواب دقیق مسأله فوق به صورت $u(t) = t^3 - t^2$ می‌باشد. براساس روش تحلیل هموتویی (HAM)، ابتدا با استفاده از نمودار \hbar -منحنی، یک ناحیه مناسب برای پارامتر \hbar جهت همگرایی سری جواب، به دست می‌آوریم. بدین منظور، نمودار \hbar -منحنی را برای مشتق دوم تقریب 10ام تابع جواب، یعنی تابع $U_{10}''(t) = \sum_{m=0}^{10} u_m''(t)$ ، به ازای $t = 2$ در شکل ۷ رسم نموده‌ایم. براساس شکل ۷، نتیجه می‌گیریم که هرگاه تقریباً

$$\hbar \in [-1.3, -0.7],$$

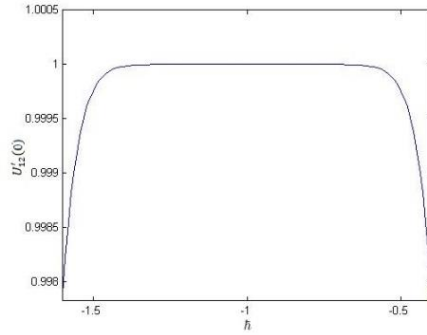
آنگاه سری جواب به دست آمده توسط این روش به جواب مسأله همگرا خواهد بود. همچنین نمودار تقریب 40ام جواب یعنی $U_{40}(t) = \sum_{m=0}^{40} u_m(t)$ به همراه نمودار جواب دقیق، به ازای $t \in [2, 4]$ و مقدار $\hbar = -1$ ، در شکل ۸ رسم شده است. از روی شکل ۸ واضح است که به ازای تقریب 40ام، به جز در اوایل بازه، در مابقی بازه نتایج خوبی به دست نمی‌آید.

حال با حل مسأله ارائه شده در مثال ۴-۳ به روش تحلیل هموتویی متوالی (SHAM)، نتایج به دست آمده به ازای مقادیر مختلفی از n (تعداد تقسیمات) و k (تعداد تکرار در هر زیربازه)، با جواب دقیق در شکل ۹ رسم شده است. همان طور که از مقایسه شکل‌های ۸ و ۹ واضح است، با استفاده از نوع متوالی روش تحلیل هموتویی، نتایج بسیار بهتری نسبت به نوع معمولی روش تحلیل هموتویی به دست می‌آوریم.

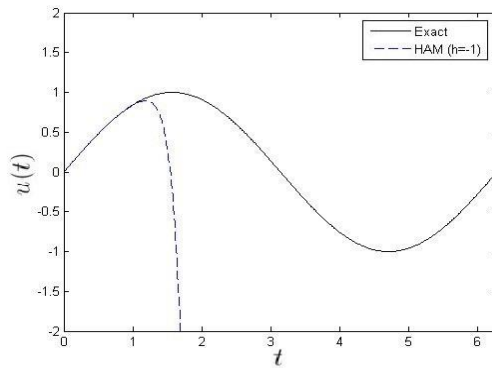
(HAM) حل می‌کنیم. براساس این روش، ابتدا با استفاده از نمودار \hbar -منحنی، یک ناحیه مناسب برای پارامتر \hbar جهت همگرایی سری جواب، به دست می‌آوریم. بدین منظور، نمودار \hbar -منحنی را برای مشتق اول تقریب 12ام تابع جواب، یعنی تابع

$$U_{12}'(t_0) = \sum_{m=0}^{12} u_m'(t),$$

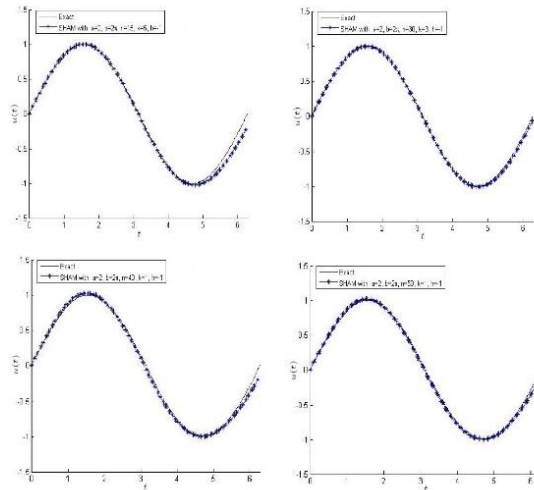
رسم نموده‌ایم. براساس شکل ۴، نتیجه می‌گیریم که هرگاه تقریباً $\hbar \in [-1.4, -0.6]$ ، آنگاه سری جواب به دست آمده توسط این روش به جواب مسأله همگرا خواهد بود. همچنین نمودار تقریب 12ام جواب یعنی $U_{12}(t) = \sum_{m=0}^{12} u_m(t)$ به همراه نمودار جواب دقیق به ازای $t \in [0, 2\pi]$ و مقدار $\hbar = -1$ ، در شکل ۵ رسم شده است. از روی شکل ۵ واضح است که برای تقریب 12ام، تنها در اوایل بازه نتایج رضایت‌بخشی به دست می‌آید. ضمناً ذکر این نکته ضروری است که به دست آوردن همین تقریب 12ام $U_{12}(t)$ ، به دلیل سنگین بودن محاسبات، مستلزم صرف زمان بسیار زیادی است. حال با حل مسأله ارائه شده در مثال ۴-۳ به روش تحلیل هموتویی متوالی (SHAM)، نتایج به دست آمده به ازای مقادیر مختلفی از n (تعداد تقسیمات) و k (تعداد تکرار در هر زیربازه)، با جواب دقیق در شکل ۶ رسم شده است. نکته قابل توجه در این قسمت آن است که هر چند در روش تحلیل هموتویی متوالی به نسبت روش تحلیل هموتویی معمولی از معادله (۵) استفاده بیشتری شده است، اما به دلیل حجم پایین محاسبات در نوع متوالی، زمان صرف شده برای رسیدن به جواب بسیار کمتر از نوع معمولی آن بوده است. همان طور که از مقایسه شکل‌های ۵ و ۶ واضح است، با استفاده از نوع متوالی روش تحلیل هموتویی، نتایج بسیار بهتری نسبت به نوع معمولی روش تحلیل هموتویی به دست می‌آوریم.



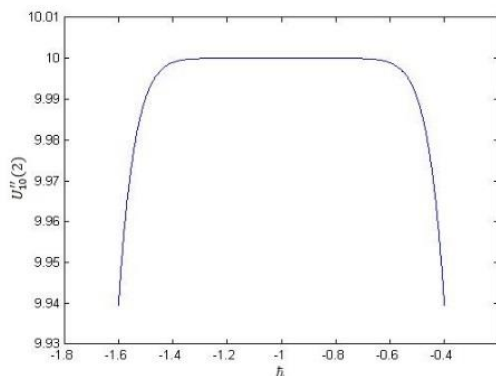
شکل ۴: نمودار \tilde{h} -منحنی حاصل از تقریب 12ام، برای مثال ۴-۲.



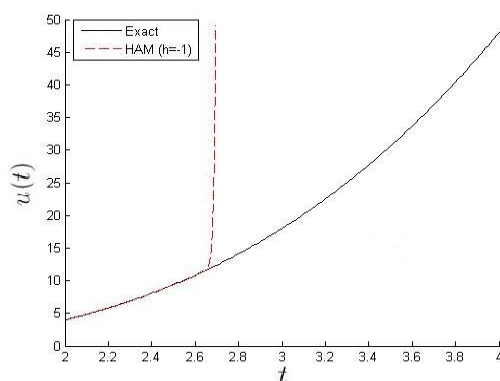
شکل ۵: مقایسه جواب تقریبی مرتبه 12ام با جواب دقیق، به ازای $\tilde{h} = -1$ ، برای مثال ۴-۲.



شکل ۶: مقایسه نتایج به دست آمده بوسیله روش تحلیل هموتوبی متوالی (SHAM) با جواب دقیق، به ازای $a = 0$ ، $b =$ مقادیر مختلفی از n و k ، مربوط به مثال ۴-۲ و $\tilde{h} = -1$ و 2π .

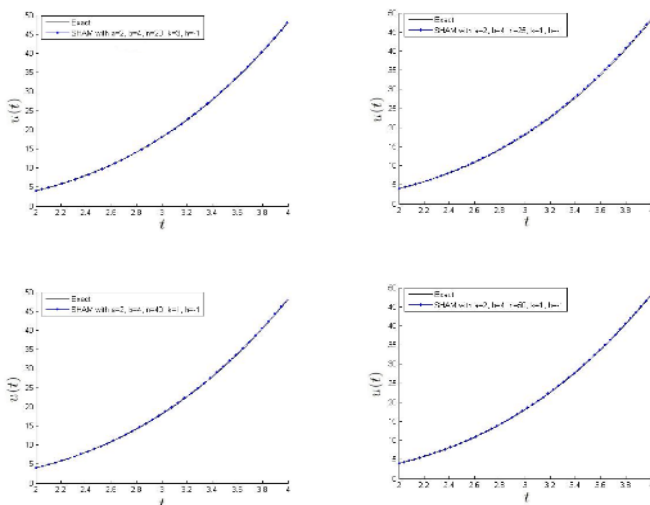


شکل ۷: نمودار \bar{h} -منحنی حاصل از تقریب 10ام، برای مثال ۳-۴.



شکل ۸: مقایسه جواب تقریبی مرتبه 40ام به وسیله روش تحلیل هموتوپی معمولی (HAM) با جواب دقیق، به ازای $\bar{h} = -1$

۳-۴، برای مثال ۱-،



شکل ۹: مقایسه نتایج به دست آمده بوسیله روش تحلیل هموتوپی متوالی (SHAM) با جواب دقیق، به ازای $a = 2, b = 4$

و $\bar{h} = -1$ و مقادیر مختلفی از k و n ، مربوط به مثال ۳-۴.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله بهبودی از روش معروف تحلیل هموتویی (HAM)، که با عنوان "روش تحلیل هموتویی متوالی (SHAM)" نامگذاری شده است، مطرح شده است. برای مقایسه بهتر میان روش‌های HAM و SHAM، مثال‌های عددی مختلفی ارائه شده‌اند. نتایج عددی نشان داده‌اند که با استفاده از روش SHAM جواب‌های عددی به دست آمده، در یک بازه بزرگتری نسبت به روش HAM، رضایت بخشی لازم را دارند. همچنین براساس مثال‌های ارائه شده، واضح است که حجم محاسبات انجام شده در روش SHAM به مراتب کمتر از روش HAM است.

در این مقاله، همواره جواب‌های تقریبی با جواب دقیق مسأله مورد مقایسه قرار می‌گرفت تا درستی و دقت جواب‌های تقریبی مورد سنجش قرار گیرد. حال اگر برای یک مسأله جواب دقیق در دسترس نباشد آن‌گاه برای سنجش درستی جواب‌های تقریبی به دست آمده می‌توان از دو راه زیر استفاده نمود:

اول آنکه می‌توان در هر تکرار با جایگذاری جواب تقریبی در خود مسأله، تابع باقی‌مانده را به دست آوریم. هرگاه با افزایش تعداد تکرار، قدر مطلق مقادیر تابع باقی‌مانده در بازه مورد بحث مسأله، به عدد صفر نزدیک شود این امر نشان دهنده آن است که روش روی معادله همگراست و لذا جواب‌های تقریبی به دست آمده مناسب هستند.

دوم آنکه برای تخمین مقدار تابع جواب در یک نقطه خاص مانند $t = t^*$ ، می‌بایستی با افزایش تکرار، قدر مطلق تفاضل مقادیر به دست آمده در $t = t^*$ برای دو تقریب متوالی به سمت صفر میل کند. در صورت تحقق چنین شرطی نتیجه می‌گیریم که جواب‌های تقریبی به دست آمده مناسب می‌باشند و به جواب دقیق همگرا هستند.

لازم به ذکر است که رویکرد ارائه شده در این مقاله قابل تعمیم به سایر روش‌های نیمه-تحلیلی همانند روش تجزیه آدومیان (ADM)، روش اختلال (آشفستگی) هموتویی (HPM)، روش تکرار تغییراتی (VIM) و ... مشابه می‌باشد. بنابراین تمامی معادلاتی که با استفاده از این روش‌ها قابل حل می‌باشند و این روش‌ها روی آنها همگرا هستند، مانند انواع معادلات دیفرانسیل کسری و غیرکسری، انواع معادلات انتگرال کسری و غیرکسری و ... را می‌توان با این رویکرد نیز حل نمود که این خود می‌تواند موضوع کارهای پژوهشی آینده باشد.

[8] Chuang Yu, Hui Wang, Dongfang Fang, Jianjun Ma, Xiaoqing Cai, Xiaoni Yu, Semi-analytical solution to one-dimensional advective-dispersive-reactive transport equation using homotopy analysis method. *Journal of Hydrology* 565:422–428(2018)

[9] M.R. Shirkhani, H.A. Hoshyar, I. Rahimipetroudi, H.Akhavan, D.D.Ganji, Unsteady time-dependent incompressible Newtonian fluid flow between two parallel plates by homotopy analysis method (HAM), homotopy perturbation method (HPM) and collocation method (CM). *Propulsion and Power Research* 7:247-256(2018)

[10] S. Hussain, A. Shah, S. Ayub, A. Ullah, An approximate analytical solution of the Allen-Cahn equation using homotopy perturbation method and homotopy analysis method. *Heliyon* 5(12):1-9(2019)

[11] P.A. Naik, J. Zu and M. Ghoreishi, Estimating the approximate analytical solution of HIV viral dynamic model by using homotopy analysis method. *Chaos, Solitons and Fractals*, 131:1-21(2020)

[12] G. Zhang, Z. Wu, Homotopy analysis method for approximations of Duffing oscillator with dual frequency excitations. *Chaos, Solitons and Fractals* 127:342–353(2019)

[13] Y. Zhang, Y. Li, Nonlinear dynamic analysis of a double curvature honeycomb sandwich shell with simply supported boundaries by the homotopy analysis method. *Composite Structures* 221:1-12(2019).

[14] A. Jafarimoghaddam, On the Homotopy Analysis Method (HAM) and Homotopy Perturbation Method (HPM) for a nonlinearly stretching sheet flow of Eyring-Powell Fluids. *Engineering Science and Technology, an International Journal* 22:439-451(2019)

فهرست منابع

[1] S. J. Liao, The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. Ph.D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University (1992)

[2] J. X. Li, Y. Yan, W. Q. Wang, Time-delay feedback control of a cantilever beam with concentrated mass based on the homotopy analysis method, *Applied Mathematical Modelling* 108:629-645(2022)

[3] P. Khaneh Masjedi, P. M. Weaver, Analytical solution for arbitrary large deflection of geometrically exact beams using the homotopy analysis method, *Applied Mathematical Modelling* 103: 516-542(2022)

[4] E. Botton, J.B. Greenberg, A. Arad, D. Katoshevski, V. Vaikuntanathan, M. Ibach, B. Weigand, An investigation of grouping of two falling dissimilar droplets using the homotopy analysis method, *Applied Mathematical Modelling* 104:486-498(2022)

[5] S. Abbasbandy, T. Hayat, On series solution for unsteady boundary layer equations in a special third grade fluid. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16:3140-3146(2011)

[6] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Predictor homotopy analysis method and its application to some nonlinear problems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16:2456-2468(2011)

[7] R. A. Van Gorder, K. Vajravelu, On the selection of auxiliary functions, operators, and convergence control parameters in the application of the Homotopy Analysis Method to nonlinear differential equations: A general approach. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14:4078-4089(2009)

-
- [15] Z. Odibat, On the optimal selection of the linear operator and the initial approximation in the application of the homotopy analysis method to nonlinear fractional differential equations. *Applied Numerical Mathematics* 137:203–212(2019)
- [16] J. Rana, S. Liao, On time independent Schrödinger equations in quantum mechanics by the homotopy analysis method. *Theoretical & Applied Mechanics Letters* 9:376-381(2019)
- [17] S.J. Liao, *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton (2003)

