دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل سوم، مرداد و شهریور ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تخصیص منابع در تحلیل پوششی داده‌ها بر روی ورودی‌ها و خروجی‌های فازی

عصمت نوروزی[۱*]، حمید شرفی[۲]

(۱) استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران شرق، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی کاربردی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۲۶   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۱۰

چکیده

تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده می‌شود که در زمینه‌های مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از مسائل مهم در تحلیل پوششی داده‌ها، تحلیل حساسیت است. مقالات زیادی در این زمینه ارائه شده است، در بعضی مواقع مدیران به مسایلی بر خورد می‌کنندکه تخصیص یک هزینه‌ی ثابت به واحدهای تصمیم‌گیرنده مهم می‌باشدواز آنجا که در اغلب مسایل واقعی داده‌ها و اطلاعات اولیه دقیق نیستند بلکه کیفی، بازه ای و یا ترتیبی می‌باشند لذا سعی شده است که در این مقاله این موضوع را مورد بحث قرار داده و مدلی ارائه شودکه تخصیص یک هزینه‌ی ثابت که از نوع فازی است را به واحدهای تصمیم‌گیرنده مورد بررسی قرار دهد. علاوه بر این فرض می‌شود تمامی ورودی‌ها و خروجی‌های واحدها فازی هستند و تخصیص هزینه‌ی جدید باید به گونه‌ای باشد که بیشترین تعدادواحد ناکارا کارا شود و در انتها با دو مثال عددی مورد استفاده قرار گرفته شده و نتایج ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، واحد تصمیم‌گیری، کارایی، تخصیص، نظریه فازی.

---

* عهده‌دار مکاتبات: Email:esnoroozi55@yahoo.com

۱- مقدمه

در بسیاری از مسایل واقعی که به وسیله مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فرموله می‌شوند ممکن است نوعی عدم قطعیت دربرخی پارامترهای مدل موجود باشد و این ابهام می‌تواند ازنوع احتمالی نباشد یا صریحاً پارامترهای مدل با اعداد فازی بیان شود. منطق فازی اولین بار توسط پروفسور لطفی‌زاده سال ۱۹۶۵ میلادی مطرح گردید. واژه فازی به معنای غیر دقیق و مبهم است. منطق فازی بیش از بیست سال پس از ۱۹۶۵ از درگاه دانشگاه‌ها به بیرون راه نیافت زیرا کمتر کسی معنای آنرا درک کرده بود. در اواسط دهه ۸۰ میلادی قرن گذشته صنعتگران ژاپنی معنا و ارزش صنعتی این علم را دریافته و منطق فازی را به کار گرفتند. منطق فازی تعمیمی از منطق دو ارزشی متداول است و درحالیکه در منطق دودویی جایی برای واژه هایی همچون "کم"، "زیاد"،"اندک"،"بسیار" و...که استدلال‌های معمولی انسان را تشکیل می‌دهند وجود ندارد. امروزه همه‌ی کشورهای پیشرو در علم و صنعت، پروفسور لطفی زاده را می‌شناسند .بسط و گسترش منطق فازی و تئوری مجموعه های فازی بدلیل ابهام و عدم قطعیتی بودکه در مسائل پیرامون ما وجود دارد. بدون اغراق زندگی روزمره ما آمیخته با مفهوم فازی است ، یعنی بطور ناخودآگاه از عباراتی استفاده می کنیم که برای مخاطب دقیقا مشخص نیست. تحلیل داده های مبهم و نادقیق امروزه تحت عنوان تئوری مجموعه های فازی یا منطق فازی به دنیا معرفی شده است.لطفی‌زاده پس از معرفی مجموعه فازی، مفاهیم الگوریتم فازی را در سال۱۹۶۸[۲۵]، تصمیم‌گیری فازی را در سال ۱۹۷۰ [۲۵] پس از آن ترتیب فازی را ارائه نمود. پس ازآن محققان زیادی باتوجه به شرایط عدم قطعیت، تئوری مجموعه فازی را برای حل مسائل فازی به کارگرفتند. مفهوم برنامه ریزی ریاضی فازی نخست توسط تاناکا و همکارانش[۲۱] درچارچوب تصمیم‌گیری فازی ارایه شده توسط بلمن و زاده [۳] پیشنهادشد .نخستین فرمول بندی مساله برنامه ریزی خطی فازی توسط زیمرمن[۲۹] مطرح شد. پس از آن مدل‌های مختلفی مانند کومار، [۱۵]، [۱۶] کاظمی [۱۷]، حسین زاده لطفی[۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]، جهانشاهلو[۱۱]، [۱۳]، شرفی[۱۹] تاناکا[۲۱]، زاده[۲۳]، و ... پیشنهاد شد. یکی ازمتداولترین روش‌ها برای حل این مسایل براساس مفهوم مقایسه اعداد فازی است.آنجایی که بسیاری از مسایل صنعتی و مدیریتی که منجربه حل یک مساله برنامه ریزی خطی می‌شود، تصمیم گیرنده نمی‌تواند به طور دقیق مقادیرضرایب مساله راتعیین کند و این ابهام ممکن است ازنوع احتمالی نباشد. درحقیقت در برنامه‌ریزی خطی مرسوم عموماً ضرایب مساله تصمیم‌گیری توسط افرادخبره بامقادیردقیق تعیین می‌شوند، ولی در محیط‌های فازی، فرض وجود اطلاعات دقیق توسط افرادخبره دو راز واقعیت به نظر می‌رسد. بنابراین توسعه و استفاده از مدلسازی فازی درمسایل تصمیم‌گیری واقعی بادادههای نادقیق میتواند مناسب باشد. از سوی دیگر تکنیکی که بر مبنای برنامه‌ریزی خطی استوار بود به منظور ارزیابی کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده به کارگرفته شد که تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها نام گرفت. این موضوع از سال ۱۹۷۸ با تز دکتری ادوارد رودز شروع شد. وی بر روی مقاله‌ی فارل (۱۹۵۷) که برای نخستین بار یک روش غیر پارامتری را مطرح کرده بود تحقیقات خود را شروع کرد. او نتایج بدست آمده از تحقیقاتش را با همکاری چارنزو کوپر در مقاله‌ای که به CCR معروف شد[۵] منتشر کرد. پس از آن در سال ۱۹۸۴بنکر وچارنز و روش CCR را تعمیم دادند که منجر به مدل BCC با بازده به مقیاس متغیر شد[۴]. علاوه بر مدل‌های ارائه‌شده در مقالات CCR و BCC، مدل‌های اساسی دیگری مانند مدل جمعی، مدل ضربی و .... در تحلیل

پوششی داده‌ها مطرح گردید. در بسیاری از این مسایل به هزینه‌های ثابتی برخورد می‌شود که به واحدهای تصمیم‌گیرنده تحمیل می‌شود. هزینه‌ی تحمیل شده به واحدهای تصمیم‌گیرنده را می‌توان به عنوان یک ورودی جدید در نظر گرفت که ممکن است اندازه‌ی کارایی نسبی آن‌ها را ثابت نگاه داشته و یا تغییر دهد. در هر صورت باید تخصیص هزینه‌ی جدید به واحدها به صورت منصفانه صورت بگیرد. [۸]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۴].

از آن‌جا که در اغلب مسایل واقعی داده‌ها و اطلاعات اولیه دقیق نیستند بلکه کیفی، بازه‌ای و یا ترتیبی می‌باشند در این مقاله یک هزینه‌ی ثابت که از نوع فازی می‌باشد به واحدهای تصمیم‌گیرنده مورد بررسی با ورودی‌ها و خروجی‌ها فازی بگونه‌ای تخصیص داده می‌شود که بیشترین تعدادواحدهای ناکارا، کارا شوند.از آنجایی که در مسائل واقعی داده‌های اولیه دقیق نیستند، این مقاله مدلی را برای تخصیص هزینه ثابت فازی به واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه می‌دهد با فرض اینکه تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها فازی باشند از مدل معرفی شده می‌توان برای توزیع یک منبع در بین واحدها به گونه‌ای استفاده کرد که بیشترین تعداد واحدهای ناکار به‌صورت کارا درآیند و نیز این مقدار تخصیص داده شده به هر واحد فازی خواهد بود. درادامه، در بخش دوم پیشینه پژوهش بیان شده است. در بخش سوم مدل پیشنهاد شده است و در بخش چهارم نتایج و همچنین یک مثال عددی ارائه شده است.

۲. تعاریف پایه

این بخش به ارائه مختصر در مورد برخی مفاهیم اساسی موضوع مورد بحث از جمله، تحلیل پوششی داده‌ها و تئوری فازی اختصاص یافته است.

۲.۱. تحلیل پوششی داده‌ها

n واحد تصمیم گیرنده $DMU_j\,(j=1,2,\dots,n)$ که هر کدام m ورودی $x_{ij}\ (i=1,\dots,m)$ را جهت تولید s خروجی $y_{rj}\ (r=1,\dots,s)$ مصرف می‌کنند را در نظر می‌گیریم. مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
& Max\ \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} && (1)\\
& s.t\\
& \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1 && j=1,\dots,n\\
& u_r \ge \varepsilon && r=1,\dots,s\\
& v_i \ge \varepsilon && i=1,\dots,m
\end{aligned}
$$

مسأله فوق به مسأله برنامه‌ریزی کسری معروف است که با استفاده از تبدیلات چارنز- کوپر با تغییر متغیر به همان مدل مضربی CCR بصورت زیر تبدیل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} && (2)\\
& S.t\\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1\\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 && j=1,\dots,n\\
& u_r \ge \varepsilon && r=1,\dots,s\\
& v_i \ge \varepsilon && i=1,\dots,m
\end{aligned}
$$

تعریف ۱-۲. DMU_o کارای CCR است اگر و تنها اگر جواب بهین مدل (**۲**) در دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) $\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{ro} = 1$

ب) در حداقل یکی از جواب‌های بهینه مدل فوق برای هر $u_r^* \succ 0 (r=1,\dots,s)$ و برای هر $v_i^* \succ 0 (i=1,\dots,m)$

اگر هر دو شرط برقرار باشد DMU_o را کارای قوی گویند و اگر تنها شرط الف برقرار باشد DMU_o راکارای ضعیف گویند.

تعریف۲-۲. DMU_o ناکاراست اگر و فقط اگر

$$\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{ro} < 1$$

۲.۲ تئوری فازی

یک عدد فازی مجموعه ای از زوج‌های مرتب به صورت $\tilde{A}(X) = \{(x, \mu_{\tilde{A}(X)})\}$ می‌باشد که در آن $\mu_{\tilde{A}(X)}$ تابع عضویت این عدد فازی نامیده می‌شود [۱۶]. $\tilde{A}$ رایک عدد L-R فازی می‌کویند اگرتوابع L وR واسکالرهای $\alpha \succ 0$ و $\beta \succ 0$ وجود داشته باشد بگونه‌ای

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \mathrm{L}\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & x \le m \\ \mathrm{R}\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & x \ge m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیرصعودی از $\overset{+}{R}$ به $[0,1]$ هستند واین عدد فازی به صورت نمادین با (m,α,β) نمایش داده می‌شود. عدد حقیقی m مقدار میانی $\tilde{A}$ و α و β به ترتیب گسترده راست و چپ آن نامیده می‌شوند.

اگر

$$\mathrm{L}(x) = \mathrm{R}(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

سپس $\tilde{A}$ یک عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود.

هر عدد فازی مثلثی به صورت (x^l, x^m, x^u) نمایش داده می‌شود که x^m مقدار متوسط $(\mu_{\tilde{A}}(x^m) = 1)$ و x^l مقدار بدبینانه $(\mu_{\tilde{A}}(x^L) = 0)$ و x^u مقدار خوش بینانه $(\mu_{\tilde{A}}(x^U) = 0)$ است.

اعداد فازی مثلثی مثبت $\tilde{x} = (x^l, x^m, x^u)$ و $\tilde{y} = (y^l, y^m, y^u)$ را در نظر می‌گیریم. جمع و تفریق و ضرب و تقسیم دو عدد فازی بترتیب بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$a)\tilde{x} + \tilde{y} = (x^l + y^l, x^m + y^m, x^u + y^u)$$

$$b)\tilde{x} - \tilde{y} = (x^l - y^u, x^m - y^m, x^u - y^l)$$

$$c)\tilde{x} \otimes \tilde{y} = (x^l y^l, x^m y^m, x^u y^u)$$

$$d)\tilde{x} / \tilde{y} = (x^l / y^u, x^m / y^m, x^u / y^l)$$

در تحلیل پوششی داده‌های مرسوم، مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها توسط افراد خبره با مقادیر دقیق تعیین می‌شوند ولی در محیط‌های غیردقیق فرض اطلاعات دقیق افراد خبره بسیار دور از واقعیت به نظرمی‌رسد. لذا محققین برآن شدند که DEA و مدل‌های آن را در محیط‌های فازی مورد بررسی قراردهند. [۱۵]و[۱۶]و.. nواحد تصمیم-گیرنده متجانس $DMU_j (j = 1,2,...,n)$ را با m ورودی و sخروجی در نظر بگیرید.

فرض کنید $\tilde{x}_j = (\tilde{x}_{1j},...,\tilde{x}_{mj})$ و $\tilde{y}_j = (\tilde{y}_{1j},...,\tilde{y}_{sj})$ به ترتیب ورودی‌ها و خروجی‌های DMU_j باشند. علاوه بر این فرض کنیداعداد فازی مثلثی $\tilde{x}_{ij}$ و $\tilde{y}_{rj}$ به صورت $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^U)$ و $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^U)$ که بترتیب i امین ورودی $i = 1,...,m$ و r امین خروجی $r = 1,...,s$ برای واحد DMU_j $j = 1,...,n$ - باشد.

کاظمی وهمکاران [۱۷] روشی برای حل مدل مضربی فازی زیر که برای ارزیابی کارایی DMU_p با داده‌های فازی می‌باشد ارائه کردند.

$$Max \sum_{r=1}^{s} \tilde{u}_r^p \otimes \tilde{y}_{rp} \qquad (3)$$

$s.t$

$$\sum_{r=1}^{s}\tilde{v}_i^{p}\otimes\tilde{x}_{ip}\le(1,1,1)\qquad i=1,\ldots,m$$
$$\sum_{r=1}^{s}\tilde{u}_r^{p}\tilde{y}_{rj}-\sum_{i=1}^{m}\tilde{v}_i^{p}\tilde{x}_{ij}\le(0,0,0)\qquad j=1,\ldots,n$$
$$\tilde{v}_i^{p}\ge\varepsilon\qquad i=1,\ldots,m$$
$$\tilde{u}_r^{p}\ge\varepsilon\qquad r=1,\ldots,s$$

که در آن ضرایب ورودی و خروجی بترتیب اعداد فازی مثلثی

$$\tilde{v}_i^{p}=\left(v_i^{Lp},v_i^{Mp},v_i^{Up}\right),$$
$$\tilde{u}_r^{p}=\left(u_r^{Lp},u_r^{Mp},u_r^{Up}\right)$$

می‌باشد. شرفی و همکاران[۱۹] مدل مضربی فازی (۳) را به مدل زیر تغییر دادند.

$$E_{pp}=Max\ \left(\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Lp}y_{rp}^{L},\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Mp}y_{rp}^{M},\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Up}y_{rp}^{U}\right)\quad(4)$$
$$s.t$$
$$\sum_{i=1}^{m}v_i^{Lp}x_{ip}^{L}\le 1$$
$$\sum_{i=1}^{m}v_i^{Mp}x_{ip}^{M}\le 1$$
$$\sum_{i=1}^{m}v_i^{Up}x_{ip}^{U}\le 1$$
$$\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Lp}y_{rj}^{L}-\sum_{i=1}^{m}v_i^{Up}x_{ij}^{U}\le 0\qquad j=1,\ldots,n$$
$$\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Mp}y_{rj}^{M}-\sum_{i=1}^{m}v_i^{Mp}x_{ij}^{M}\le 0\qquad j=1,\ldots,n$$
$$\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Up}y_{rj}^{U}-\sum_{i=1}^{m}v_i^{Lp}x_{ij}^{L}\le 0\qquad j=1,\ldots,n$$
$$v_i^{Up}\ge v_i^{Mp}\ge v_i^{Lp}\ge\varepsilon\qquad i=1,\ldots,m$$
$$u_r^{Up}\ge u_r^{Mp}\ge u_r^{Lp}\ge\varepsilon\qquad r=1,\ldots,s$$

ε یک عدد غیر ارشمیدسی است. رتبه کارایی که از مدل فوق بدست می‌آید یک عدد فازی مثلثی است. یکی از روش‌های حل مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه فوق روش مجموع وزندار شده [۲۰] می‌باشد. پس از اعمال روش مجموع وزن‌دار شده مدل فوق به مدل زیر تبدیل می‌گردد.

$$E_{pp}=Max\ \sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Lp}y_{rp}^{L}+\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Mp}y_{rp}^{M}+\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Up}y_{rp}^{U}\quad(5)$$
$$s.t$$
$$\sum_{i=1}^{m}v_i^{Lp}x_{ip}^{L}\le 1$$
$$\sum_{i=1}^{m}v_i^{Mp}x_{ip}^{M}\le 1$$
$$\sum_{i=1}^{m}v_i^{Up}x_{ip}^{U}\le 1$$
$$\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Lp}y_{rj}^{L}-\sum_{i=1}^{m}v_i^{Up}x_{ij}^{U}\le 0\ j=1,\ldots,n$$
$$\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Mp}y_{rj}^{M}-\sum_{i=1}^{m}v_i^{Mp}x_{ij}^{M}\le 0\ j=1,\ldots,n$$
$$\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Up}y_{rj}^{U}-\sum_{i=1}^{m}v_i^{Lp}x_{ij}^{L}\le 0\ j=1,\ldots,n$$
$$v_i^{Up}\ge v_i^{Mp}\ge v_i^{Lp}\ge\varepsilon\qquad i=1,\ldots,m$$
$$u_r^{Up}\ge u_r^{Mp}\ge u_r^{Lp}\ge\varepsilon\qquad r=1,\ldots,s$$

فرض کنید

$$(v_i^{Lp*},v_i^{Mp*},v_i^{Up*},u_r^{Lp*},u_r^{Mp*},u_r^{Up*})$$

و E_{pp} بترتیب جواب بهینه و مقدار بهینه تابع هدف مدل فوق برای ارزیابی $DMU_p(p=1,2,\ldots,n)$ می‌باشد.کارایی فازی مثلثی DMU_p بصورت زیر است.

$$\tilde{E}_p=\left(E_p^{L*},E_p^{M*},E_p^{U*}\right)=$$
$$\left(\frac{\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Lp*}y_{rp}^{l}}{\sum_{i=1}^{m}v_i^{Up*}x_{ip}^{U}},\frac{\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Mp*}y_{rp}^{m}}{\sum_{i=1}^{m}v_i^{Mp*}x_{ip}^{M}},\frac{\sum_{r=1}^{r=s}u_r^{Up*}y_{rp}^{u}}{\sum_{i=1}^{m}v_i^{Lp*}x_{ip}^{L}}\right)$$

تعریف۳ -۲ (واحد کارا و واحد ناکارا)

می توان واحدها را بر طبق روابط زیر دسته بندی کرد و کارایی فازی و ناکارایی فازی را تعریف نمود.

$$E^{++}=\left\{\mathrm{j}\in\{1,\ldots,n\},E_j^{L*}=1\right\}$$
$$E^{+}=\left\{\mathrm{j}\in\{1,\ldots,n\},E_j^{L*}<1,E_j^{M*}=E_j^{U*}=1\right\}$$
$$E=\left\{\mathrm{j}\in\{1,\ldots,n\},E_j^{L*}<1,E_j^{M*}<1,E_j^{U*}=1\right\}$$
$$E^{-}=\left\{\mathrm{j}\in\{1,\ldots,n\},E_j^{U*}<1\right\}$$

مجموعه E^{++} شامل تمام واحدهای تصمیم گیرنده‌ای است که کارا هستند و مجموعه E^{+} شامل واحدهایی است که فقط در کران بالا و وسط کارا هستند و مجموعه E شامل واحدهایی است که فقط در کران بالا کارا است و بلاخره مجموعه E^{-} شامل واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای است که ناکارا هستند.

۳. بدست آوردن بیشترین تعداد واحدهای تصمیم گیرنده کارا با تخصیص یک منبع جدید

یک منبع جدید که از آن به میزان $\tilde{k}$ احد موجود است به گونه‌ای بین DMU تخصیص می‌یابد که بیشترین تعداد DMUناکارا، کارا شود. از آنجاییکه در مدل CCR کلاسیک اضافه شدن یک شاخص به تعداد شاخص‌های قبلی، در مدل مضربی معادل اضافه شدن یک متغییر جدید و در مدل پوششی معادل اضافه شدن یک قید جدید خواهد بود.لذا در هردو مساله این موضوع معادل با این است که کارایی واحد تحت ارزیابی با اضافه شدن یک شاخص جدید (ورودی ویا خروجی) بدتر نخواهد شد.پس اگر یک DMU کارا باشد با اضافه شدن یک شاخص جدید همچنان کارا باقی خواهد ماند. اما DMUهای ناکارا ممکن است به کارا تبدیل شوند. پس توجه خود را به DMUهای ناکارا معطوف می‌کنیم. فرض کنید سهم DMU_j از این منبع به اندازه $\tilde{a}_j$ برای $(j=1,\dots,n)$ می‌باشد. به این منظور مدل زیر ارایه می‌شود.

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{p \in N.E} \gamma_p \qquad (۶) \\
& \frac{\sum_{r=1}^{S} u_r^p \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^p \tilde{x}_{ij} + v_{m+1}^p \tilde{a}_j} \le \tilde{1} \qquad p \in N.E j=1,\dots,n \\
& \frac{\sum_{r=1}^{S} u_r^p \tilde{y}_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^p \tilde{x}_{ip} + v_{m+1}^p \tilde{a}_p} - \tilde{1} \ge -M\left(1-\gamma_p\right) \qquad p \in N.E \\
& \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j = \tilde{k} \\
& u_r^p \ge \varepsilon \qquad p \in N.E ; r=1,\dots,s \\
& v_i^p \ge \varepsilon \qquad p \in N.E ; i=1,\dots,m+1 \\
& \gamma_p \in \{0,1\} \qquad p \ N.E \\
& \tilde{a}_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,n
\end{aligned}
$$

در مدل فوق $N.E$ مجموعه اندیس DMUهای ناکارا است، و u_r^p و v_i^p وزن‌های مربوط به iامین ورودی و r امین خروجی در ارزیابی DMU_p و v_{m+1}^p نیزوزن متناظر با منبع جدید در ارزیابی DMU_p می‌باشد و نیز M یک عدد بسیار بزرگ است.

قضیه ۱-۳ مدل(۶) شدنی است.

برهان: اثبات واضح است.

قضیه ۲-۳ تخصیص بدست آمده از مدل (۶)، بیشترین تعداد DMU هارا کارا می‌کند.

برهان: با توجه به اینکه $\gamma_p(p \in N.E)$ یک متغیر باینری است دو حالت زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اگر $\gamma_p = 1$ آنگاه

$$
\begin{aligned}
& \frac{\sum_{r=1}^{S} u_r^p \tilde{y}_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^p \tilde{x}_{ip} + v_{m+1}^p \tilde{a}_p} - \tilde{1} \ge 0 \\
& \Rightarrow \frac{\sum_{r=1}^{S} u_r^p \tilde{y}_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^p \tilde{x}_{ip} + v_{m+1}^p \tilde{a}_p} \ge \tilde{1} \qquad (۷)
\end{aligned}
$$

از طرفی چون DMU_p یک DMUی ناکاراست پس

$$
\frac{\sum_{r=1}^{S} u_r^p \tilde{y}_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^p \tilde{x}_{ip} + v_{m+1}^p \tilde{a}_p} \le \tilde{1} \qquad (۸)
$$

با توجه به روابط (۷) و (۸) می‌توان نتیجه گرفت.

$$
\frac{\sum_{r=1}^{S} u_r^p \tilde{y}_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^p \tilde{x}_{ip} + v_{m+1}^p \tilde{a}_p} = \tilde{1}
$$

اگر $\gamma_p = 0$ آنگاه در این حالت قید

$$
\frac{\sum_{r=1}^{S} u_r^p \tilde{y}_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^p \tilde{x}_{ip} + v_{m+1}^p \tilde{a}_p} - \tilde{1} \ge -M
$$

زائد خواهد بود. یعنی DMU_p همچنان ناکارا باقی مانده است.

با توجه به این نکته که مدل (۶) یک مدل بیشینه سازی است ترجیحاً γ_p برابر یک انتخاب می‌شود. بنابراین ماکزیمم کردن $\sum_{p\in N.E}\gamma_p$ معادل با حداکثر رساندن تعداد DMUهای کارا می‌باشد.

قضیه ۳-۳ با تغییر مدل (۶) می‌توان مدل برنامه ریزی خطی صحیح فازی زیررا بدست آورد.

برهان:

$$Max \sum_{p\in N.E}\gamma_p \qquad (9)$$

S.t.

$$\sum_{r=1}^{s}u_r^p\tilde{y}_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i^p\tilde{x}_{ij}-\tilde{a}_j\le \tilde{0} \qquad p\in N.E;\ j=1,\dots,n$$

$$\sum_{r=1}^{s}u_r^p\tilde{y}_{rp}-\sum_{i=1}^{m}v_i^p\tilde{x}_{ip}-\tilde{a}_p\ge -M\left(1-\gamma_p\right) \qquad p\in N.E$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_j=\tilde{k}$$

$$u_r^p\ge\varepsilon \qquad p\in N.E;r=1,\dots,s$$

$$v_i^p\ge\varepsilon \qquad p\in N.E;i=1,\dots,m+1$$

$$\gamma_p\in\{0,1\} \qquad p\in N.E$$

$$\tilde{a}_j\ge 0 \qquad j=1,\dots,n$$

برهان: با توجه به اینکه $v_{m+1}^p\ne 0 \quad p\in N.E$ می‌توان مدل غیر خطی مدل (۶) را با در نظر گرفتن تغییر متغییر $\frac{u_r^p}{v_{m+1}^p}=u_r^p\ ,\ \frac{v_i^p}{v_{m+1}^p}=v_i^p$ می‌توان به صورت خطی زیر نوشت.

$$Max \sum_{p\in N.E}\gamma_p (10)$$

S.t.

$$\sum_{r=1}^{s}u_r^p\tilde{y}_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i^p\tilde{x}_{ij}-\tilde{a}_j\le \tilde{0} \qquad p\in N.E\ j=1,\dots,n$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{S}u_r^p\tilde{y}_{rp}-\sum_{i=1}^{m}v_i^p\tilde{x}_{ip}-\tilde{a}_p}{\sum_{i=1}^{m}v_i^p\tilde{x}_{ip}+\tilde{a}_p}\ge -M\left(1-\gamma_p\right) \qquad p\in N.E$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_j=\tilde{k}$$

$$u_r^p\ge\varepsilon \qquad p\in N.E;r=1,\dots,s$$

$$v_i^p\ge\varepsilon \qquad p\in N.E;i=1,\dots,m+1$$

$$\gamma_p\in\{0,1\} \qquad p\in N.E$$

$$\tilde{a}_j\ge 0 \qquad j=1,\dots,n$$

اگر اعداد فازی مثلثی در نظر بگیریم آنگاه با توجه به مدل (۹) و (۱۰) تنها قید دوم را باید مورد بررسی قرار دهیم. مابقی قیود دقیقا یکی هستند قید دوم را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{\sum_{r=1}^{S}u_r^p\left(y_{rp}^L,y_{rp}^M,y_{rp}^U\right)-\sum_{i=1}^{m}v_i^p\left(x_{ip}^L,x_{ip}^M,x_{ip}^U\right)-\left(a_p^L,a_p^M,a_p^U\right)}{\sum_{i=1}^{m}v_i^p\left(x_{ip}^L,x_{ip}^M,x_{ip}^U\right)+\left(a_p^L,a_p^M,a_p^U\right)}\ge -M\left(1-\gamma_p\right)$$

بعبارت دیگر

$$\frac{\sum_{r=1}^{S}u_r^p y_{rp}^L-\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^U-a_p^U}{\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^U+a_p^U}\ge -M\left(1-\gamma_p\right)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{S}u_r^p y_{rp}^M-\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^M-a_p^M}{\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^M+a_p^M}\ge -M\left(1-\gamma_p\right)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{S}u_r^p y_{rp}^U-\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^L-a_p^L}{\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^L+a_p^L}\ge -M\left(1-\gamma_p\right)$$

از آنجاکه، $\gamma_p\left(p\in N.E\right)$ یک متغیر باینری می‌باشد دو حالت زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حالت اول $\left(\gamma_p=1\right)$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^U+a_p^U\right)\left(-M\left(1-\gamma_p\right)\right)=0$$

بنابراین، قید

$$\frac{\sum_{r=1}^{S}u_r^p y_{rp}^L-\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^U-a_p^U}{\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^U+a_p^U}\ge -M\left(1-\gamma_p\right)$$

به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\sum_{r=1}^{S}u_r^p y_{rp}^L-\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^U-a_p^U\ge 0=-M\left(1-\gamma_p\right)$$

پس محدودیت فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{r=1}^{S}u_r^p y_{rp}^L-\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^U-a_p^U\ge -M\left(1-\gamma_p\right)(11)$$

بطور مشابه می‌توان گفت:

$$\sum_{r=1}^{S}u_r^p y_{rp}^M-\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^M-a_p^M\ge -M\left(1-\gamma_p\right)(12)$$

$$\sum_{r=1}^{S}u_r^p y_{rp}^U-\sum_{i=1}^{m}v_i^p x_{ip}^L-a_p^L\ge -M\left(1-\gamma_p\right)(13)$$

حالت دوم $(\gamma_p = 0)$ در این وضعیت با توجه به $\sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ip}^U + a_p^U > 0$ خواهیم داشت:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ip}^U + a_p^U\right)\left(-M\left(1-\gamma_p\right)\right) = -M$$

در نتیجه، قید

$$\frac{\sum_{r=1}^{S} u_r^p y_{rp}^L - \sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ip}^U - a_p^U}{\sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ip}^U + a_p^U} \geq -M\left(1-\gamma_p\right)$$

به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\sum_{r=1}^{S} u_r^p y_{rp}^L - \sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ip}^U - a_p^U \geq -M = -M\left(1-\gamma_p\right) \quad (۱۴)$$

بطور مشابه می‌توان گفت:

$$\sum_{r=1}^{S} u_r^p y_{rp}^M - \sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ip}^M - a_p^M \geq -M = -M\left(1-\gamma_p\right) \quad (۱۵)$$

$$\sum_{r=1}^{S} u_r^p y_{rp}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ip}^L - a_p^L \geq -M = -M\left(1-\gamma_p\right) \quad (۱۶)$$

از روابط (۶) و...و (۱۱) می‌توان گفت که در هر دو مورد مدل (۶) به مدل (۱۰) تبدیل می‌شود.

با توجه به آنچه در بالا گفته شد، مدل (۱۰) را می‌توان به مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح زیر تبدیل کرد.

$$Max \sum_{p \in N.E} \gamma_p \quad (۱۷)$$

S.t

$$\begin{array}{ll}
\sum_{r=1}^{s} u_r^p y_{rj}^L - \sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ij}^U - a_j^U \leq 0 & p \in N.E\, j=1,\dots,n \\
\sum_{r=1}^{s} u_r^p y_{rj}^M - \sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ij}^M - a_j^M \leq 0 & p \in N.E\, j=1,\dots,n \\
\sum_{r=1}^{s} u_r^p y_{rj}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ij}^L - a_j^L \leq 0 & p \in N.E\, j=1,\dots,n \\
\sum_{r=1}^{s} u_r^p y_{rp}^L - \sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ip}^U - a_p^U \geq -M\left(1-\gamma_p\right) & \\
\sum_{r=1}^{s} u_r^p y_{rp}^M - \sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ip}^M - a_p^M \geq -M\left(1-\gamma_p\right) & \\
\sum_{r=1}^{s} u_r^p y_{rp}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i^p x_{ip}^L - a_p^L \geq -M\left(1-\gamma_p\right) & \\
\sum_{j=1}^{n} a_j^L = k^L & \\
\sum_{j=1}^{n} a_j^M = k^M & \\
\sum_{j=1}^{n} a_j^U = k^U & \\
a_j^L \leq a_j^M \leq a_j^U & \\
u_r^p \geq \varepsilon & p \in N.E\,; r=1,\dots,s \\
v_i^p \geq \varepsilon & p \in N.E\,; i=1,\dots,m+1 \\
\gamma_p \in \{0,1\} & p \in N.E \\
a_j^L \geq 0 & j=1,\dots,n \\
a_j^M \geq 0 & j=1,\dots,n \\
a_j^U \geq 0 & j=1,\dots,n
\end{array}$$

در مدل فوق، هر قید با پارامترهای فازی در مدل (۹) را به سه قید با پارامترهای قطعی تبدیل کرده است.

قضیه ۴-۳ مدل (۱۷) شدنی است.

برهان: جواب زیر یک جواب شدنی برای مدل (۱۷) است .

$$\begin{array}{ll}
\gamma_p = 0 & p \in N.E \\
u_r^p = \varepsilon & p \in N.E\,; r=1,\dots,s \\
v_i^p = \varepsilon & p \in N.E\,; i=1,\dots,m \\
a_j^L = \dfrac{k^L}{n} & j=1,\dots,n \\
a_j^M = \dfrac{k^M}{n} & j=1,\dots,n \\
a_j^U = \dfrac{k^U}{n} & j=1,\dots,n
\end{array}$$

۴. مثال‌ها

در این بخش، دو مثال عددی برای نشان دادن مدل DEAفازی ارائه شده است.

۴.۱. مثال عددی ۱

مدل خطی فازی ارائه شده در این مقاله را برای تخصیص منابع با یک مثال عددی با داده‌های جدول ۱، که از [۱۹] گرفته شده است، نشان می‌دهیم. داده‌های جدول ۱ مربوط به شش DMU با دو ورودی و خروجی فازی مثلثی است. نتایج ارزیابی این DMUها از طریق مدل (۴) نشان داده است که DMUهای ۵ و ۶ ناکارا و ملبقی کارا هستند. نتایج مرتبط در جدول ۲ نشان داده شده است.

باتوجه به تعریف کارایی فازی واحدهای ۵ و ۶ ناکارا ارزیابی می شوند واحدهای ۱و۲و۳و۴ واحدهای کارای متعلق به مجموعه E هستند. فرض کنید هدف تخصیص یک منبع جدید فازی بین این شش DMU می‌باشد به گونه‌ای که بیشترین تعداد واحد ناکارا،کارا شود.

غلاوه براین فرض کنید به میزان $\tilde{k} = (k^L, k^M, k^U) = (۵,۴.۲,۸)$ واحد از این منبع در اختیار داریم.به این منظور مدل(۱۷) را حل کرده و تخصیص مربوطه که هر دو واحد ناکارای ۵ و ۶ راکارا می‌کند به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\tilde{a}_{۱} = \left(a_{۱}^{L}, a_{۱}^{M}, a_{۱}^{U}\right) = (۰/۸۳۳۳۴۳,۰/۶۹۹۹۹,۱/۳۳۳۸۰۰)$$
$$\tilde{a}_{۲} = \left(a_{۲}^{L}, a_{۲}^{M}, a_{۲}^{U}\right) = (۰/۸۳۳۳۵۲,۰/۶۹۹۹۹,۱/۳۳۳۸۰۰)$$
$$\tilde{a}_{۳} = \left(a_{۳}^{L}, a_{۳}^{M}, a_{۳}^{U}\right) == (۰/۸۳۳۴۴۰,۰/۶۹۹۹۹,۱/۳۳۳۸۷۰)$$
$$\tilde{a}_{۴} = \left(a_{۴}^{L}, a_{۴}^{M}, a_{۴}^{U}\right) = (۰/۸۳۳۴۱۳,۰/۶۹۹۹۹,۱/۳۳۲۸۴۰)$$
$$\tilde{a}_{۵} = \left(a_{۵}^{L}, a_{۵}^{M}, a_{۵}^{U}\right) == (۰/۸۳۳۲۲۱,۰/۶۹۹۸۹,۱/۳۳۲۷۳۰)$$
$$\tilde{a}_{۶} = \left(a_{۶}^{L}, a_{۶}^{M}, a_{۶}^{U}\right) = (۰/۸۳۳۲۳۰,۰/۶۹۹۸۸,۱/۳۳۲۸۸۰)$$

اندازه کارایی واحدها پس ازتخصیص ورودی سوم با حل مدل (۴) در جدول۳ ارائه شده است.

با توجه به جدول ۳ مشاهده می‌شود که واحدهای ناکارای ۵ و ۶ که متعلق به دسته E^- بودند، اکنون در دسته E قرار گرفته و کارا شده‌اند و واحدهای که در قرارداشتند همچنان درE باقی می‌مانند چرا که شرط تعلق داشتن به E آن است که $E^u = 1$. پس E^m و E^l می‌توانند تغییر کنند زیاد ,کم ویا ثابت بمانند هرکدام اتفاق بیفتد درتعلق داشتن به E تغییری ایجاد نمی‌کند.

۴.۲. مثال عددی ۲

مدل خطی فازی ارائه شده را بار دگر برای داده های جدول۴ که از [۲۲] گرفته شده است بکار می‌بریم. داده‌های جدول۴ مربوط به پنج DMU با دو ورودی و دو خروجی فازی مثلثی است.

جدول ۵ نتایج ارزیابی DMUها با α - برشهای متفاوت بر اساس مدل Wen را نشان می‌دهد. همانطور که مشهود است که $DMU_۱$ و $DMU_۳$ ناکارا و مابقی کارا هستند.

جدول ۱- داده های DMU استخراج شده از [۱۹]

DMU	Input1	Input2	Output1	Output2
1	(1.8,2,4)	(11,12,16)	(4,6,8)	(20,26,31)
2	(1.9,2,4)	(7,8,9)	(3,5,6)	(21,24,37)
3	(4.3,5,8)	(4,5,5.5)	(2,3,7)	(29,35,36)
4	(7,10,13)	(3.2,4,6)	(2,2.8,4.2)	(28,38,38.9)
5	(8,10,11)	(4.9,6,7.5)	(1,2.2 ,5.3)	(21,22,23.9)
6	(3.5,4,6)	(6,7,9)	(1,2,2.9)	(22,24,26)

جدول ۲- کارایی فازی مثلثی DMU ها [۱۹]

DMU	(E^L, E^M, E^U)
1	(.30.68,1)
2	(.46,.80,1)
3	(.52,.79,1)
4	(.38,.72,1)
5	(.27,.34,.46)
6	(.38,.59,.73)

جدول ۳- کارایی فازی مثلثی DMU ها پس از تخصیص

DMU	(E^L, E^M, E^U)
1	(.30,.72,1)
2	(.51,.80,1)
3	(.52,.79,1)
4	(.38,.78,1)
5	(.47,.70,1)
6	(.68,.80,1)

جدول ۴. DMU های دو ورودی و دو خروجی فازی (استخراج از [۲۲])

DMU_i	1	2	3
Input1	(3.5, 4.0, 4.5)	(2.9, 2.9, 2.9)	(4.4, 4.9, 5.4)
Input2	(1.9, 2.1, 2.3)	(1.4, 1.5, 1.6)	(2.2, 2.6, 3.0)
Output1	(2.4, 2.6, 2.8)	(2.2, 2.2, 2.2)	(2.7, 3.2, 3.7)
Output2	(3.8, 4.1, 4.4)	(3.3, 3.5, 3.7)	(4.3, 5.1, 5.9)

جدول ۴. DMU های دو ورودی و دو خروجی فازی (استخراج از [۲۲])

DMU_i	4	5
Input1	(3.4, 4.1, 4.8)	(5.9, 6.5, 7.1)
Input2	(2.1, 2.3, 2.5)	(3.6,4.1,4.6)
Output1	(2.5, 2.9, 3.3)	(4.4, 5.1, 5.8)
Output2	(5.5, 5.7, 5.9)	(6.5,7.4,8.3)

جدول ۵. نتایج ارزیابی DMU ها با α های متفاوت

Credibility	DMU_1	DMU_2
$\alpha = 0.5$	Inefficiency	Efficiency
$\alpha = 0.4$	Inefficiency	Efficiency
$\alpha = 0.3$	Inefficiency	Efficiency
$\alpha = 0.2$	Inefficiency	Efficiency

جدول ۵. نتایج ارزیابی DMU ها با α های متفاوت

Credibility	DMU_3	DMU_4	DMU_5
$\alpha = 0.5$	Inefficiency	Efficiency	Efficiency
$\alpha = 0.4$	Inefficiency	Efficiency	Efficiency
$\alpha = 0.3$	Inefficiency	Efficiency	Efficiency
$\alpha = 0.2$	Inefficiency	Efficiency	Efficiency

با توجه به اینکه DMU_1 و DMU_3 واحدهای ناکاراو متعلق به دسته E^- هستند. فرض کنید هدف اختصاص یک منبع فازی جدید در بین پنج DMU باشد، به طوری که حداکثر تعداد واحدهای ناکاراآ کاراا شود. همچنین، فرض کنید $\tilde{k}=(k^L,k^M,k^U)=(۳،۲،۵،۸)$ به عنوان منبع جدیدی برای تخصیص بین DMUها در نظر گرفته شده است. اگر مجدداً مدل (۱۷) حل کنیم و تخصیص مربوطه که هر دو واحد ناکارای ۱ و ۳ راکارا می‌کند به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\tilde{a}_1 = \left(a_1^L, a_1^M, a_1^U\right) = (۰/۴۹,۰/۴۹,۰/۴۹)$$

$$\tilde{a}_2 = \left(a_2^L, a_2^M, a_2^U\right) = (۰/۳۹,۰/۴۸,۳/۴۸)$$

$$\tilde{a}_3 = \left(a_3^L, a_3^M, a_3^U\right) = (۰/۶۶,۰/۶۶,۰/۶۶)$$

$$\tilde{a}_4 = \left(a_4^L, a_4^M, a_4^U\right) = (۰/۶۴,۲/۳۵,۲/۳۵)$$

$$\tilde{a}_5 = \left(a_5^L, a_5^M, a_5^U\right) = (۱/۰۳,۱/۰۳,۱/۰۳)$$

اندازه کارایی واحدها پس از تخصیص ورودی سوم در جدول ۶ با حل مدل (۴) ارائه شده است.
همچنین با توجه به جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که واحدهای ناکارای ۱ و ۳ که متعلق به دسته E^- بودند، اکنون در رده E قرار گرفته و کارا شده‌اند.

نتیجه‌گیری

کارایی نسبی DMUها با یک برنامه‌ریزی خطی محاسبه می‌شود که به آن تحلیل پوششی داده می‌گویند. این تکنیک به دلیل کارایی بیش از حد در بسیاری از سازمان‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. این تکنیک با تئوری‌های مدل‌های کلاسیک توسعه یافته‌اند. در اکثر مشکلات واقعی، داده‌های اولیه دقیق نیستند. آنها اغلب بازه‌ای، ترتیبی ویا کیفی هستند. این مقاله مدلی را برای به دست آوردن کارایی فازی DMU ها بدون اطلاع از شکل دقیق توابع عضویت معرفی می‌کند. همچنین در اکثر مقالات اگر هزینه ثابتی بین واحدها به عنوان ورودی جدید تخصیص داده شود، کارایی آنها تغییر نمی‌کند. اما در این تحقیق یک هزینه ثابت فازی بین واحدها به گونه ای توزیع می‌شود که بیشترین تعداد واحدهای ناکارا، کارا شده و این مقدار که به هر واحد نسبت داده می شود فازی می‌باشد. به عبارت دیگر، این ورودی جدید را به گونه‌ای توزیع می‌کنیم که کارایی واحدهای تصمیم گیری با درصد خاصی افزایش یابد. علاوه بر این، فرض بر این است که تمام ورودی ها و خروجی‌های DMU ها فازی هستند. همچنین بدیهی است که می توان آن را در یک محیط مطلق انجام داد. در نهایت با دو مثال عددی نشان داده شده است که کارایی DMUهای مدل پیشنهادی بهبود یافته است.

جدول ۶. کارایی فازی مثلثی DMU ها پس از تخصیص

DMU	(E^L, E^M, E^U)
1	(.83,.92,1)
2	(.12,.82,1)
3	(.69,.84,1)
4	(.52,.54,1)
5	(.73,.86,1)

فهرست منابع

[1] Allahviranloo. T, HosseinzadehLotfi. F, Firozja. AM,"Fuzzy Efficiency Measure with Fuzzy Production Possibility Set". *Applications and Applied Mathematics*; 2(2): (2007), 152–66.

[2] Allahviranloo. T, Hosseinzadeh Lotfi.F,. Kiasary. M. Kh,. Kiani. N. A, Alizadeh L,"Solvingfully fuzzy linear programming problem by ranking function"; *Applied MathematicalSciences*, Vol. 2, ,(2008), pp. 19-32.

[3] Bellman.R.E, Zadeh. L.A; "Decision making in a fuzzy environment", *Management Science*, Vol. 17, (1970), pp. 141-164.

[4] Banker. R D, Charnes.A, and Cooper. W W, "Some model for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis", *Manage. Sci.*30, (1984), 1078-1092.

[5] Charnes.A, Cooper .W W, Rhodes .E, "Measuring the efficiency of decision making units". *European Journal of Operational Research* 2 (6), (1978), 429–444.

[6] Dehghan. M, Hashemi. B, Ghatee. M, "Computational methods for solving fully fuzzylinear ystems"; *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 179, (2006), pp. 328-343.

[7] HosseinzadehLotfi.F,Jahanshahloo. GR, Alimardani. M, A New approach forefficiency measures by fuzzy linear programming and application in insurance, *.Applied Mathematics and Computation*160 ,(2006), 719–724.

[8] HosseinzadehLotfi.F,Jahanshahloo. GR, Allahviranloo. T, Noroozi. E, Hosseinzadeh Lotfi. A. AEquitable Allocation of Shared Costs on Fuzzy Environment, *International Mathematical Forum*, 2, no. 65, (2007), 3199 – 3210.

[9] HosseinzadehLotfi. F, Allahviranloo .T, Jondabeh. M.A, Alizadeh, L,"Solving a full fuzzylinear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution"; *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33,(2009), pp. 3151-3156.

[10] HosseinzadehLotfi. F, Noora. A.A, Jahanshahloo. GR, Gerami. J, Mozaffari. M.R, Centralized resource allocation for enhanced Russell models. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235, (2010), 1-10.

[11] Jahanshahloo. GR, Amirteimoori. A.R , Kordrostami. S, Detarmining an equitable allocation of new inputs and new output in DEA, *Journal of the Operations Research Society of Japan* 46 (1) , (2003), 66–73.

[12] Jahanshahloo. GR, Shoja. N , Sanei, .M , An alternative approach for equitable allocation of shared costs by using DEA. Applied Mathematics and Computation, 153, (2004), 267–274.

[13] Jahanshahloo. GR, Hosseinzadeh Lotfi.F , Shoja. N , Tohidi. G , Razavyan. S, A one-model approach to classification and sensitivity analysis in DEA. *Applied Mathematics and Computation*, 169, (2005), 887-896.

[14] HosseinzadehLotfi.F,Jahanshahloo. GR, Moradi. M, A DEA approach for fair allocation of common revenue. *Applied Mathematics and Computation* 160 (2005), 719–724.

[15] Kumar. A, Kaur. J ,Singh. P ,"Fuzzy optimal solution of fully fuzzy linearprogramming problems with

inequality constraints"; *International Journal ofMathematical and Computer Sciences*, 61 ,(2010), pp. 37-41.

[16] Kumar. A, Kaur. J, Singh. P ,"A new method for solving fully fuzzy linear programming problems"; *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35 ,(2011), pp. 817-823.

[17].Kazemi. A, Alimi. A, "A fully fuzzy approach to data envelopment analysis", Journal of mathematics and computer science 11,(2014), 238-245.

[18] Momeni. M. .Hosseinzadeh .M, "A new method for solving fully fuzzy linearprogramming problems using fuzzy ranking concept", *Journal of Management Research in Iran*, Vol. 16, (2013), pp. 171-188.

[19] Sharafi. H, Hosseinzadeh Lotfi. F, Jahanshahloo. G.R, Rostamy-Malkhalifeh. M, Soltanifar. M, Razipour-Ghalehjough. S," Ranking Decision Making Units in the Presence of Fuzzy Data Using Cross Efficiency Method", *Iranian Data Envelopment Analysis Society*, May, (2018), 9-11.

[20] Steuer. R. E,"Multiple criteria optimization: Theory, *computation, and application*", New York: Wiley, (1986).

[21]Tanaka. H, Okuda. T, Asai. K,"On fuzzy mathematical programming", *J.Cybernet*,3, (1963), 37-46.

[22] Wen. M, Li H., Fuzzy data envelopment analysis (DEA): Model and ranking method, Journal of Computational and Applied Mathematics, 223 (2009) 872-878.

[23] Zadeh. L.A," Optimality and non-scalar valued performance criteria", *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-8, (1963), 59–60

[24] Zadeh. L.A,"Fuzzy sets".*Information and Control* 8, (1965), 338–353.

[25] Zadeh. L.A," Fuzzy algorithms". *Info.andCtl*. 12, (1968), 94–102.

[26] Zadeh. L.A, RE Bellman" Decision-making in a fuzzy environment" Management science 17 (4), B-141-B-164, (1970). 10935.

[27] Zadeh. L.A," The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning". Part I *Information Sciences*, vol. 8, ,(1975), pp. 199–249; Part II Information *Sciences*, vol. 8, pp. 301–357; Part III *Information Sciences*, vol. 9,(1975) pp. 43–80.

[28] Zadeh. L.A," Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy Sets and Systems*, 1,(1978), 3-28.

[29] Zimmermann H.G,"Description and optimization of fuzzy system", *Internet J. general system*, 2, (1967), 209-215.