دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

طیف رده‌ای از گراف‌های به دست آمده از گراف‌های گرسمن

سید مرتضی میرافضل[1*]، رویا کوگانی مقدم[2]

[۱و۲] گروه ریاضی محض (جبر)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۵/۰۲

چکیده

فرض کنید n و k اعداد صحیح مثبتی باشند به طوری که $n \geq ۳$ و $k < \frac{n}{۲}$، همچنین q توانی از عدد اولی مانند p و F_q یک میدان متناهی از مرتبه q باشد. $V(q,n)$ را یک فضای برداری با بعد n روی F_q در نظر بگیرید، گراف $S(q,n,k)$ را گرافی با مجموعه رئوس $V = V_k \cup V_{k+۱}$ که V_k و $V_{k+۱}$ به ترتیب خانواده همه زیرفضاهای با بعد k و $k+۱$ از $V(q,n)$ می‌باشند، تعریف می‌کنیم که در آن هر دو رأس مانند v و w مجاورند هرگاه v زیرفضایی از w یا w زیرفضایی از v باشد. واضح است که گراف $S(q,n,k)$ یک گراف دوبخشی است. در این مقاله به بررسی برخی از ویژگی‌های این گراف می‌پردازیم، به ویژه طیف گراف $S(q,n,k)$ را مشخص می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فضای برداری، گراف همبند، ماتریس مجاورت، مقادیر ویژه.

* عهده‌دار مکاتبات : Email: smortezamirafzal@yahoo.com

۱- مقدمه

در سراسر مقاله، گراف $\Gamma=(V,E)$ را به عنوان یک گراف ساده بدون جهت که در آن $V=V(\Gamma)$ مجموعه رئوس و $E=E(\Gamma)$ مجموعه یال هاست، در نظر می گیریم. برای تمامی مفاهیم و نمادهایی که در این مقاله تعریف نشده است، خواننده را به مراجع [۲،۳،۴،۵،۶] ارجاع می‌دهیم. یک گراف فاصله-انتقالی است هرگاه برای هر دو جفت رأس انتخاب شده دلخواه در یک فاصله یکسان، خودریختی از گراف موجود باشد به طوری که جفت اول را به دومی ببرد. گراف‌های فاصله-انتقالی ویژگی‌های متفاوت خوبی دارند که توسط بسیاری از محققان در نظریه گراف محض و کاربردی بررسی شده‌اند. شناخته شده‌ترین مثال‌ها از رده‌های گراف‌های فاصله-انتقالی عبارتند از دورها، ابرمکعب‌ها، گراف‌های جانسون، گراف‌های همینگ و گراف‌های گرسمن[۴]. گراف‌های همینگ، که ابرمکعب‌ها زیررده‌ای از آن‌ها هستند، در نظریه کدگذاری و کاربرد آن نیز اهمیت دارند[۱]. درنظریه جبری گراف، هنگامی که بر خانواده‌ای از گراف‌ها کار می‌کنیم با دو مسئله عمده مواجه می‌شویم. مسئله اول، تعیین گروه‌های خود ریختی و مسئله دوم تعیین طیف آن‌ها می‌باشد. اخیرا، گروه‌های خودریختی گراف‌های همینگ با یک اثبات جدید و کوتاه تعیین شده است[۹]. برای یک گراف داده شده، می‌توانیم گراف‌های دیگری بسازیم که ممکن است ویژگی‌های بهتر موردنظری داشته باشند. در این مقاله قصد داریم طیف رده‌ای از گراف‌ها که از گراف‌های گرسمن ساخته شده‌اند را به دست آوریم.

فرض کنید p یک عدد اول صحیح باشد و $q=p^m$ که در آن m یک عدد صحیح مثبت است و n، k را اعداد صحیح مثبتی در نظر بگیرید به طوری که $k<n$ و $V(q,n)$ یک فضای برداری با بعد n روی میدان متناهی F_q می‌باشد. فرض کنید V_k خانواده همه زیرفضاهای $V(q,n)$ با بعد k باشد. همچنین هر عضو مجموعه V_k را یک k-زیرفضا (k-فضا) می‌نامند. گراف گرسمن $G(q,n,k)$ گرافی با مجموعه رئوس V_k است که در آن هر دو رأس مانند u و w مجاورند اگروفقط اگر $\dim(u\cap w)=k-۱$.
در نظر داشته باشید که اگر $k=۱$ آنگاه گراف گرسمن یک گراف کامل است بنابراین فرض می‌کنیم $k>۱$. بدیهی است که تعداد رئوس این گراف یعنی $|V_k|$ برابر با ضریب دوجمله ای گاؤسی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\frac{(q^n-۱)(q^n-q)\dots(q^n-q^{k-۱})}{(q^k-۱)(q^k-q)\dots(q^k-q^{k-۱})}$$
$$=\frac{(q^n-۱)\dots(q^{n-k+۱}-۱)}{(q^k-۱)\dots(q-۱)}.$$

با توجه به تعریف بالا داریم

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$$

و در نتیجه $|V_k|=|V_{n-k}|$. به راحتی نشان داده می‌شود که اگر $۱\le i<j\le\frac{n}{۲}$ آنگاه $|V_i|<|V_j|$ و همچنین می‌توان نشان داد که $G(q,n,k)\cong G(q,n,n-k)$[۳]. بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم $k<\frac{n}{۲}$.
به راحتی می توان دید که فاصله بین هر دو رأس مانند v و w در گراف $G(q,n,n-k)$ برابر با $k-\dim(v\cap w)$ است. همچنین این گراف یک گراف فاصله-منظم با قطر k می‌باشد[۴].

۲- پیش نیازها

با در نظر گرفتن گراف گرسمن $G(q,n,k)$ قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲-۱([۴]): فرض کنید $V=V(q,n)$ همانند آنچه در قبل تعریف شده، باشد و فرض کنیم $0\le i,j\le n$. در این صورت:

۱. تعداد k-فضاهای V برابر با $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ است.

۲. اگر X یک j-فضا از V باشد، آنگاه دقیقا $q^{ij}\begin{bmatrix} n-j \\ i \end{bmatrix}$، i-فضا مانند Y در V موجود است به طوری که $X\cap Y=0$.

۳. اگر X یک j-فضا از V باشد، آنگاه دقیقا $q^{(i-m)(j-m)}\begin{bmatrix} n-j \\ i-m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ m \end{bmatrix}$، i-فضا مانند Y در V موجود است به طوری که $X\cap Y$ یک m-فضا است.

اکنون با استفاده از قسمت سوم قضیه بالا می‌توانیم نتیجه زیر را ثابت کنیم.

نتیجه ۲-۱ اگر X یک k-فضا از V باشد، آنگاه دقیقا

$$q^{(k+1-k)(k-k)}\begin{bmatrix} n-k \\ k+1-k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n-k \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(k+1)$-فضا مانند Y در V وجود دارد به طوری که $X\le Y$.

اثبات: می‌دانیم که یک $(k+1)$-فضا مانند Y شامل k-فضای X است اگروفقط اگر $X\cap Y$ یک k-فضا از X باشد. حال با استفاده از قسمت سوم قضیه ۲-۱ نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. □

تعریف ۲-۱ فرض کنید nو k اعداد صحیح مثبتی باشند به طوری که $n\ge 3$ و $k<n$، همچنین q توانی از عدد اولی مانند p و F_q یک میدان متناهی از مرتبه q باشد. $V(q,n)$ را یک فضای برداری با بعد n روی F_q در نظر بگیرید. گراف $S(q,n,k)$ را یک گراف با مجموعه رئوس $V=V_k\cup V_{k+1}$ که V_k و V_{k+1} به ترتیب خانواده همه زیرفضاهای با بعد k و $k+1$ از $V(q,n)$ می‌باشند، تعریف می‌کنیم که در آن هر دو رأس مانند v و w مجاورند هرگاه v زیرفضایی از w یا w زیرفضایی از v باشد. بدیهی است که گراف $S(q,n,k)$ یک گراف دوبخشی با بخش‌های

$$V_k=\{v\subset V(q,n)\mid \dim(v)=k\}$$

و

$$V_{k+1}=\{v\subset V(q,n)\mid \dim(v)=k+1\}$$

است. اگر $n=2k+1$ باشد، آن‌گاه گراف $S(q,n,k)$ را گراف گرسمن دوتایی می‌نامیم و برخی از ویژگی‌های این گراف در مراجع [۴،۷] بررسی شده است.

گروه خودریختی این گراف اخیرا در مرجع [۸] به دست آمده است. می‌دانیم که تعداد k-زیرفضاها از فضای برداری $V(q,n)$ ضریب دوجمله‌ای گاؤسی $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ است، بنابراین $|V_k|=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ و $|V_{k+1}|=\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$ و در نتیجه مرتبه گراف $S(q,n,k)$ برابر $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$ می‌باشد. اگر $v\in V_k$ باشد، آن‌گاه با استفاده از نتیجه ۲-۱ داریم

$$\deg(v)=\begin{bmatrix} n-k \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{q^{n-k}-1}{q-1}$$
$$=q^{n-k-1}+q^{n-k-2}+\ldots+q+1.$$

همچنین می‌دانیم که تعداد k-زیرفضاهای از یک فضای $k+1$بعدی برابر با ضریب دوجمله‌ای گاؤسی $\begin{bmatrix} k+1 \\ k \end{bmatrix}$ می‌باشد، بنابراین اگر $v\in V_{k+1}$ باشد، آن‌گاه

$$\deg(v)=\begin{bmatrix}k+1\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+1\\1\end{bmatrix}=\frac{q^{k+1}-1}{q-1}.$$

اگر $G=(P,E)$ یک گراف دوبخشی با $P=P_1\cup P_2$ و $P_1\cap P_2=\varnothing$ باشد که در آن $|P_1|=n_1$ ، $|P_2|=n_2$ و همچنین هر رأس در P_1 از مرتبه r_1 و هر رأس در P_2 از مرتبه r_2 است، آن‌گاه گراف G را یک گراف دوبخشی دو-منظم با پارامترهای (n_1,n_2,r_1,r_2) می‌نامیم. بنابراین گراف $S(q,n,k)$ یک گراف دوبخشی دو-منظم با پارامترهای

$$(\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix},\begin{bmatrix}n\\k+1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}n-k\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}k+1\\1\end{bmatrix})$$

می‌باشد. می‌توان نشان داد که این گراف همبند است(گزاره ۳-۱). همچنین به آسانی می‌توان دید که اگر $n=3$ و $k=1$باشد، آن‌گاه این گراف یک گراف منظم است زیرا $r_1=r_2=q+1$و در این حالت

$$|V_1|=|V_2|=q^2+q+1.$$

توجه کنیم که $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix}$، به آسانی می‌توان نشان داد که

$$S(q,n,k)\cong S(q,n,n-k-1)$$

بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم $k<\frac{n}{2}$.

فرض کنید Γ یک گراف با مجموعه رئوس $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ و مجموعه یال $E(\Gamma)$ باشد. ماتریس مجاورت $A=A(\Gamma)=[a_{ij}]$ از گراف Γ یک ماتریس متقارن $n\times n$ با درایه‌های ۰ و ۱ است که $a_{ij}=1$ اگروفقط اگر v_i مجاور v_j باشد. چندجمله‌ای مشخصه گراف Γبرابر با چندجمله‌ای

$$P(G)=P(G,x)=\det(xI_n-A)$$

می‌باشد که در آن I_n نشان دهنده ماتریس همانی $n\times n$است، همچنین طیف $A(\Gamma)$ را طیف گراف Γ گوئیم. اگر مقادیر ویژه Γ به صورت $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_n$ به ترتیب با تکرارهای m_1، m_2،...، m_r مرتب شوند آن‌گاه می‌نویسیم

$$Spec(\Gamma)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_r\\ m_1 & m_2 & \ldots & m_r\end{pmatrix}$$

یا

$$Spec(\Gamma)=\{\lambda_1^{m_1},\lambda_2^{m_2},\ldots,\lambda_r^{m_r}\}.$$

فرض کنید F_q یک میدان متناهی از مرتبه q و $V(q,n)$ یک فضای برداری n-بعدی روی میدان F_q باشد. گراف گرسمن $G(q,n,k)$ گرافی است که مجموعه رئوس آن خانواده همه k-زیرفضاهای $V(q,n)$ است و دو رأس مانند v و w دراین گراف مجاورند اگروفقط اگر $\dim(v\cap w)=k-1$. طیف این گراف در قضیه زیر مشخص شده است.

قضیه ۲-۲([3]) فرض کنیم Γگراف گرسمن $G(q,n,k)$ باشد، در این صورت قطر Γ برابر $d=\min(k,n-k)$ است. به‌علاوه Γ دارای مقادیر ویژه

$$\theta_j=q^{j+1}\begin{bmatrix}k-j\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-k-j\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}j\\1\end{bmatrix}$$

با تکرار

$$f_j=\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}n\\j-1\end{bmatrix}$$

می‌باشد که در آن $0 \le j \le d$.

در این مقاله، طیف گراف $S(q,n,k)$ که پیش‌تر معرفی شد، را تعیین می‌کنیم.

۳- نتایج اصلی

این بخش را با نشان دادن همبند بودن گراف $S(q,n,k)$ شروع می‌کنیم.

گزاره۳-۱: گراف $\Gamma = S(q,n,k)$ یک گراف همبند است.

اثبات. واضح است که گراف $\Gamma = S(q,n,k)$ یک گراف دوبخشی با بخش‌های V_k و V_{k+1} است. اکنون نشان می‌دهیم که گراف فوق یک گراف همبند است بدین منظور کافی است نشان دهیم که اگر v_1 و v_2 دو رأس دلخواه در V_k باشند، آن‌گاه راهی در Γ بین v_1 و v_2 وجود دارد. فرض کنیم $\dim(v_1 \cap v_2) = k - j$ که $1 \le j \le k$. ادعای خود را با استقرا بر j ثابت می‌کنیم. اگر $j = 1$ باشد آن‌گاه $u = v_1 + v_2$ زیرفضایی از $V(q,n)$ با بعد $k + k - (k-1) = k + 1$، شامل هر دو زیرفضای v_1 و v_2 است. بنابراین اگر $j = 1$ باشد، آن‌گاه راهی بین v_1 و v_2 در گراف Γ وجود دارد. حال فرض کنید اگر $j = i$ و $0 < i < k$ باشد، آن‌گاه راهی بین v_1 و v_2 در Γ موجود باشد. اکنون $j = i + 1$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $v_1 \cap v_2 = w$ و $B = \{b_1, b_2, ..., b_{k-i-1}\}$ پایه‌ای برای زیرفضای w در فضای $V(q,n)$ باشد. حال B را به پایه‌های B_1 و B_2 به ترتیب برای زیرفضاهای v_1 و v_2 بسط می‌دهیم. فرض کنید $B_1 = \{b_1, b_2, ..., b_{k-i-1}, c_1, ..., c_{i+1}\}$ پایه‌ای برای v_1 و $B_2 = \{b_1, b_2, ..., b_{k-i-1}, d_1, ..., d_{i+1}\}$ پایه‌ای برای v_2 باشند. زیرفضای $S = \langle b_1, b_2, ..., b_{k-i-1}, c_1, d_2, ..., d_{i+1} \rangle$ یک k-زیرفضا از فضای $V(q,n)$ است به طوری که $\dim(s \cap v_1) = k - i$ و $\dim(s \cap v_2) = k - 1$ بنابراین با استفاده از فرض استقرا، راهی مانند P_1 بین رئوس v_1 و s و راهی مانند P_2 بین رئوس v_2 و s وجود دارد، اکنون نتیجه می‌شود که راهی در گراف Γ بین رئوس v_1 و v_2 موجود است. □

در این قسمت به دنبال یافتن طیف گراف $S(q,n,k)$ هستیم.

قضیه۳-۱: فرض کنید $V(q,n)$ یک فضای برداری با بعد n روی میدان F_q باشد که q توانی از عدد اولی مانند p است، همچنین $k < \frac{n}{2}$ و $\Gamma = S(q,n,k)$، در این صورت گراف Γ دارای مقادیر ویژه مجزای $\pm \frac{1}{(q-1)} \sqrt{\theta_j}$ که در آن

$$\theta_j = q^{n-j+1} - q^{n-k} + q^j - q^{k+1}$$

است، با تکرار

$$f_j = 2\left(\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix}\right)$$

به طوری که $0 \le j \le k$ و $\theta_{k+1} = 0$ با تکرار

$$f_{k+1} = \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

می‌باشد.

اثبات. فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف Γ باشد. در گام اول طیف ماتریس A^2 را تعیین می‌کنیم. فرض کنید $(A^2)_{v,w}$ درایه واقع در سطر vام و ستون wام ماتریس A^2 باشد. توجه کنید که $(A^2)_{v,w}$ تعداد ۲-راه‌های بین دو رأس v و w می‌باشد. حالت‌های زیر را دنبال می‌کنیم.

i. اگر $v = w$ باشد، آن‌گاه $(A^2)_{v,w}$ تعداد همسایه‌های v است، بنابراین داریم:

$$(A^{2})_{v,v}=\begin{cases}\begin{bmatrix}n-k\\1\end{bmatrix}, v\in V_k\\ \begin{bmatrix}k+1\\k\end{bmatrix}, v\in V_{k+1}\end{cases}$$

ii. فرض کنید $v\neq w$، $v\in V_k$ و $w\in V_{k+1}$ (یا بالعکس) باشد، در این صورت هیچ ۲-راهی بین v و w وجود ندارد زیرا گراف Γ یک گراف دوبخشی است. در نتیجه در این حالت داریم $(A^{2})_{v,w}=0$.

iii. فرض کنید $v\neq w$، $v,w\in V_k$ و $P: vuw$ یک ۲-راه در گراف Γ باشد. بنابراین $u\in V_{k+1}$ یک $(k+1)$-زیرفضا از $V(q,n)$ است به طوری که شامل هر دو k-زیرفضای v و w می‌باشد. بنابراین u بایستی شامل زیرفضای $v+w$ باشد. با توجه به این مطلب که

$$\dim(v+w)=\dim(v)+\dim(w)-\dim(v\cap w)$$

نتیجه می‌شود که $\dim(v\cap w)=k-1$ و $u=v+w$. به عبارت دیگر، دقیقا یک راه به طول ۲ بین v و w وجود دارد اگروفقط اگر $\dim(v\cap w)=k-1$. حال رئوس $v,w\in V_k$ را به عنوان رئوسی از گراف گرسمن $G(q,n,k)$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید G_k ماتریس مجاورت گراف $G(q,n,k)$ باشد، در این صورت $(A^{2})_{v,w}=1$ اگروفقط اگر $(G_k)_{v,w}=1$ و $(A^{2})_{v,w}=0$ اگروفقط اگر $(G_k)_{v,w}=0$ برای $v,w\in V_k$ و $v\neq w$.

iv. در این حالت $v,w\in V_{k+1}$ را به عنوان رئوسی از گراف گرسمن $G(q,n,k+1)$ با مجموعه رئوس V_{k+1} در نظر می‌گیریم. با استدلالی مشابه آن‌چه در iii دیدیم به این نتیجه می‌رسیم که یک راه به طول۲ در گراف بین دو رأس $v,w\in V_{k+1}$ موجود است اگروفقط اگر $\dim(v\cap w)=k$. بنابراین یک ۲-راه بین $v,w\in V_{k+1}$ به عنوان رئوس گراف Γ وجود دارد اگروفقط اگر v و w به عنوان رئوس گراف $G(q,n,k+1)$ مجاور باشند. فرض کنید G_{k+1} ماتریس مجاورت گراف گرسمن $G(q,n,k+1)$ باشد، در این صورت $(A^{2})_{v,w}=1$ اگروفقط اگر $(G_{k+1})_{v,w}=1$ و $(A^{2})_{v,w}=0$ اگروفقط اگر $(G_{k+1})_{v,w}=0$ برای $v,w\in V_{k+1}$ و $v\neq w$.

با استفاده از مباحث بالا نتیجه می‌گیریم که

$$A^{2}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}n-k\\1\end{bmatrix}I_r+G_k & 0\\ 0 & \begin{bmatrix}k+1\\k\end{bmatrix}I_s+G_{k+1}\end{bmatrix}$$

که $r=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ و $s=\begin{bmatrix}n\\k+1\end{bmatrix}$. حال چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A^2 را تعیین می‌کنیم:

$$P(A^{2})=\det(\lambda I-A^{2})=$$
$$\det(\lambda I_r-\begin{bmatrix}n-k\\1\end{bmatrix}I_r-G_k)\det(\lambda I_s-\begin{bmatrix}k+1\\k\end{bmatrix}I_s-G_{k+1}).$$

از قضیه ۲-۲ طیف گراف گرسمن $G(q,n,k)$ را می‌دانیم. با استفاده از طیف گراف گرسمن مقادیر ویژه A^{2} به صورت زیر هستند.

$$\theta_j=q^{j+1}\begin{bmatrix}k-j\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-k-j\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}j\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n-k\\1\end{bmatrix}$$

با تکرار

$$f_j=\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}n\\j-1\end{bmatrix}, 0\leq j\leq k$$

و

$$\gamma_i=q^{i+1}\begin{bmatrix}k+1-i\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-k-1-i\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k+1\\k\end{bmatrix}$$

با تکرار

$$e_i=\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix}, 0\le i\le k+1.$$

به عبارت دیگر داریم

$$\theta_j=q^{j+1}\begin{bmatrix} k-j \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-k-j \\ 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-k \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$=q^{j+1}(\frac{q^{k-j}-1}{q-1}\times\frac{q^{n-k-j}-1}{q-1})-\frac{q^j-1}{q-1}+\frac{q^{n-k}-1}{q-1}$$
$$=\frac{1}{(q-1)^2}(q^{j+1}(q^{n-2j}-q^{k-j}-q^{n-k-j}+1)-q^{j+1}+q^j$$
$$+q-1+q^{n-k+1}-q^{n-k}-q+1)$$
$$\frac{1}{(q-1)^2}(q^{n-j+1}-q^{k+1}-q^{n-k+1}+q^{j+1}-q^{j+1}+q^j$$
$$+q-1+q^{n-k+1}-q^{n-k}-q+1)$$
$$=\frac{1}{(q-1)^2}(q^{n-j+1}-q^{k+1}+q^j-q^{n-k})$$

همچنین داریم

$$\gamma_i=q^{i+1}\begin{bmatrix} k+1-i \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-k-1-i \\ 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k+1 \\ k \end{bmatrix}$$
$$=q^{i+1}(\frac{q^{k+1-i}-1}{q-1}\times\frac{q^{n-k-1-i}-1}{q-1})-\frac{q^i-1}{q-1}+\frac{q^{k+1}-1}{q-1}$$
$$=\frac{1}{(q-1)^2}(q^{i+1}(q^{n-2i}-q^{k+1-i}-q^{n-k-1-i}+1)-q^{i+1}+q^i$$
$$+q-1+q^{k+2}-q^{k+1}-q+1)$$
$$\frac{1}{(q-1)^2}(q^{n-i+1}-q^{k+2}-q^{n-k}+q^{i+1}-q^{i+1}+q^i$$
$$+q-1+q^{k+2}-q^{k+1}-q+1)$$
$$=\frac{1}{(q-1)^2}(q^{n-i+1}-q^{n-k}+q^i-q^{k+1}).$$

اکنون، به سادگی می‌توان بررسی کرد که برای $0\le i,j\le k$ داریم $\theta_j=\gamma_i$ اگروفقط اگر $i=j$. همچنین اگر $i=k+1$ باشد، آن‌گاه

$$\gamma_i=\frac{1}{(q-1)^2}(q^{n-k-1+1}-q^{n-k}+q^{k+1}-q^{k+1})=0.$$

چون مقادیر ویژه A^2 مربع مقادیر ویژه A هستند و به این دلیل که گراف $S(q,n,k)$ یک گراف دوبخشی است، پس هر مقدار ویژه $\Gamma=S(q,n,k)$ به صورت $\pm\frac{1}{(q-1)}\sqrt{\theta_j}$ با تکرار

$$e_i=\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix}, 0\le i\le k+1$$

و $\theta_{k+1}=0$ با تکرار $f_{k+1}=\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ می‌باشد. □

فهرست منابع

[1] Argyriadis, J. A., He, Y. H., Jejjala, V., & Minic, D. (2021). Dynamics of genetic code evolution: The emergence of universality. *Physical Review E*, *103*(5), 052409.

[2] Biggs, N., Biggs, N. L., & Norman, B. (1993). *Algebraic graph theory* (No. 67). Cambridge university press.

[3] Bondy, J. A., Murty, U. S. (2008). Graph theory. [Phần G]. Springer.

[4] Brouwer, A. E., & Haemers, W. H. (2012). Graph spectrum. In *Spectra of graphs* (pp. 1-20). Springer, New York, NY.

[5] Cvetkovic, D. M., Rowlinson, P., & Simic, S. (2010). *An introduction to the theory of graph spectra* (pp. 230-231). Cambridge: Cambridge University Press.

[6] Godsil, C., & Royle, G. F. (2001). *Algebraic graph theory* (Vol. 207). Springer Science & Business Media.

[7] Hiraki, A. (2003). A characterization of the doubled Grassmann graphs, the doubled Odd graphs, and the Odd graphs by strongly closed subgraphs. *European Journal of Combinatorics*, *24*(2), 161-171.

[8] Mirafzal, S. M. (2020). On the automorphism groups of connected bipartite irreducible graphs. *Proceedings-athematical Sciences*, *130*(1), 1-15.

[9] Mirafzal, S. M., & Ziaee, M. (2019). A note on the automorphism group of the Hamming graph, Transactions on Combinatorics, Vol. 10 No. 2 (2021), pp. 129-136.