دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره چهلم، بهمن و اسفند ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بعضی ویژگی‌های گراف‌های جابجایی گروه‌های n – مرکز ساز متناهی

زینب فروزان‌فر[1]، مهدی رضائی[2]*

[(۱و۲)] گروه ریاضی، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین‌زهرا، بوئین‌زهرا، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۹/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۲۷

چکیده

فرض کنید G یک گروه ناآبلی متناهی و $Z(G)$ مرکز گروه G باشد. گراف جابجایی گروه G که با Γ_G نمایش داده می‌شود، یک گراف ساده غیر جهتدار است که مجموعه رئوس آن، مجموعه $G-Z(G)$ می‌باشد و دو رأس متمایز x و y مجاور هستند اگر و تنها اگر $xy=yx$. گروه G را n-مرکزساز نامیم هرگاه تعداد مرکزسازهای متمایز اعضای آن برابر n باشد. همچنین گروه ناآبلی متناهی G یک AC-گروه نامیده می‌شود هرگاه $C_G(x)$ برای هر $x\in G-Z(G)$ آبلی باشد. طیف یک گراف، مجموعه مقادیر ویژه متمایز ماتریس مجاورت آن گراف به همراه چندگانگی آن‌ها می‌باشد. بطور مشابه طیف لاپلاسین یک گراف، مجموعه مقادیر ویژه متمایز ماتریس لاپلاسین آن گراف به همراه چندگانگی آن‌ها می‌باشد. همچنین مجموعه مقادیر ویژه متمایز ماتریس لاپلاسین بی علامت یک گراف به همراه چندگانگی آن‌ها، طیف لاپلاسین بی علامت آن گراف نامیده می‌شود. در این مقاله نشان می‌دهیم که گروه‌های ۶-مرکزساز و ۷-مرکزساز متناهی AC-گروه می‌باشند و گراف‌های جابجایی این گروه‌ها بصورت اجتماعی از گراف‌های کامل می‌باشند. همچنین طیف، طیف لاپلاسین و طیف لاپلاسین بی علامت گراف‌های جابجایی این گروه‌ها محاسبه می‌گردند.

واژه‌های کلیدی: طیف لاپلاسین، n-مرکزساز، گراف جابجایی، عنصر نامرکزی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: m_rezaei@bzte.ac.ir.

۱- مقدمه

فرض کنید G یک گروه ناآبلی متناهی و $Z(G)$ مرکز گروه G باشد. گراف جابجایی[۲] گروه G که با Γ_G نمایش داده می‌شود، گرافی ساده غیر جهتدار است که مجموعه رئوس این گراف، مجموعه $G-Z(G)$ می‌باشد و دو رأس متمایز x و y در آن مجاور هستند اگر و تنها اگر $xy=yx$. گراف جابجایی برای اولین بار در سال ۱۹۵۵ توسط *Brauer* و *Fowler* در [۶] تعریف شد. فرض کنید $A(\Gamma_G)$ و $D(\Gamma_G)$ به ترتیب ماتریس مجاورت[۳] و ماتریس درجه[۴] از گراف Γ_G باشند. بنابراین $A(\Gamma_G)$ و $D(\Gamma_G)$ ماتریس‌های مربعی از اندازه $|G|-|Z(G)|$ می‌باشند که سطرها و ستون‌های این ماتریس‌ها بوسیله عناصر مجموعه رئوس گراف Γ_G، یعنی $G-Z(G)$ برچسب گذاری می‌شوند. درایه (x,y) از ماتریس مجاورت $A(\Gamma_G)$ برابر با یک است اگر رئوس x و y مجاور باشند، در غیر اینصورت مساوی با صفر خواهد بود. همچنین درایه (x,y) از ماتریس درجه $D(\Gamma_G)$ برابر با $\deg(x)$ است اگر $x=y$ ، در غیر اینصورت مساوی صفر خواهد بود، که $\deg(x)$ برابر با تعداد یال‌های گذرنده از رأس x در گراف Γ_G می‌باشد. فرض کنید $L(\Gamma_G)$ و $Q(\Gamma_G)$ به ترتیب ماتریس لاپلاسین[۵] و ماتریس لاپلاسین بی علامت[۶] از گراف Γ_G باشند. در این صورت داریم $L(\Gamma_G)=D(\Gamma_G)-A(\Gamma_G)$ و $Q(\Gamma_G)=D(\Gamma_G)+A(\Gamma_G)$. طیف[۷] یک گراف برای اولین بار در [۵] بصورت مقادیر ویژه یک گراف در ترتیب اکیداً نزولی بهمراه چندگانگی‌های متناظر آن‌ها تعریف گردید. طیف لاپلاسین و طیف لاپلاسین بی علامت یک گراف نیز بطور مشابه به ترتیب در [۸] و [۹] تعریف گردید. در واقع، فرض کنید $Spec(\Gamma_G)$، $L-Spec(\Gamma_G)$ و $Q-Spec(\Gamma_G)$ به ترتیب طیف، طیف لاپلاسین و طیف لاپلاسین بی علامت گراف Γ_G باشند. آنگاه

$$Spec(\Gamma_G)=\left\{\lambda_1^{a_1},\lambda_2^{a_2},\ldots,\lambda_l^{a_l}\right\}،$$
$$L-Spec(\Gamma_G)=\left\{\mu_1^{b_1},\mu_2^{b_2},\ldots,\mu_m^{b_m}\right\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G)=\left\{\gamma_1^{c_1},\gamma_2^{c_2},\ldots,\gamma_n^{c_n}\right\}،$$

که $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l$ مقادیر ویژه ماتریس مجاورت $A(\Gamma_G)$ با درجه تکرار $a_1,a_2,\ldots,a_l$، $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین $L(\Gamma_G)$ با درجه تکرار $b_1,b_2,\ldots,b_m$ و $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بی علامت $Q(\Gamma_G)$ با درجه تکرار $c_1,c_2,\ldots,c_n$ می‌باشند. گروه ناآبلی متناهی G را AC-گروه نامیم هرگاه $C_G(x)$ برای هر $x\in G-Z(G)$ آبلی باشد.

فرض کنید $Cent(G)=\left\{C_G(x)\,|\,x\in G\right\}$. مجموعه همه‌ی مرکزسازهای عناصر متمایز از گروه G باشد. گروه G را n-مرکزساز[۸] نامیم هرگاه $|Cent(G)|=n$. مطالعه گروه‌های n-مرکزساز برای اولین بار در سال ۱۹۹۴ توسط *Belcastro* و *Sherman* در [۴] انجام شد. آنها نشان دادند که هیچ گروه ۲-مرکزساز و ۳-مرکزساز متناهی وجود ندارد

---

[۲] Commuting graph
[۳] Adjacency matrix
[۴] Degree matrix
[۵] Laplacian matrix
[۶] Signless Laplacian matrix
[۷] Spectrum
[۸] n-centralizer

و گروه متناهی G، ۴-مرکزساز است اگر وتنها اگر $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. همچنین نشان دادند که گروه متناهی G، ۵-مرکزساز است اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ یا S_3. در ادامه و در سال ۲۰۰۰ اشرفی در [۲] ثابت کرد که اگر گروه متناهی G، ۶-مرکزساز باشد، آنگاه $\frac{G}{Z(G)}$ با یکی از گروه‌های $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, A_4, D_8$ یا $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ یکریخت است. همچنین در [۱] نشان داده شد که گروه متناهی G، ۷-مرکزساز است اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)}$ با یکی از گروه‌های $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, D_{10}$ یا $\langle x, y \mid x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3 \rangle$ یکریخت باشد. در [۹]، بعضی ویژگی‌های گراف‌های جابجایی گروه‌های ۴-مرکزساز و ۵-مرکزساز بررسی شده‌اند. هدف این مقاله، محاسبه طیف، طیف لاپلاسین و طیف لاپلاسین بی علامت گراف‌های جابجایی گروه‌های n-مرکزساز متناهی برای $6 \le n \le 7$ می‌باشد.

۲- نتایج مقدماتی

در این بخش بعضی از نتایج مقدماتی که در اثبات قضایای اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم.
به عنوان یک نتیجه مستقیم از گزاره ۵٫۳ از [۵]، تذکر زیر را داریم:

تذکر ۱٫۲: طیف گراف کامل K_n با n رأس برابر است با $\left\{(-1)^{n-1}, (n-1)^1\right\}$.

به وضوح طیف لاپلاسین و طیف لاپلاسین بی علامت برای گراف کامل K_n با n رأس به ترتیب برابر است با $\left\{0^1, n^{(n-1)}\right\}$ و $\left\{(2n-2)^1, (n-2)^{(n-1)}\right\}$. حال با توجه به توضیحات فوق، قضیه زیر به سادگی بدست می‌آید.

قضیه ۲٫۲: فرض کنید

$\Gamma = K_{m_1} \cup K_{m_2} \cup \dots \cup K_{m_l}$، که K_{m_i} ها گراف‌های کامل با m_i رأس برای $1 \le i \le l$ می‌باشند. در این صورت

(۱) طیف گراف Γ برابر است با

$$\left\{(-1)^{\sum_{i=1}^{l} m_i - l}, (m_1-1)^1, (m_2-1)^1, \dots, (m_l-1)^1\right\}$$

(۲) طیف لاپلاسین گراف Γ برابر است با

$$\left\{0^l, m_1^{m_1-1}, \dots, m_l^{m_l-1}\right\}$$

(۳) طیف لاپلاسین بی علامت گراف Γ برابر است با

$$\left\{\begin{array}{l}(2m_1-2)^1, (2m_2-2)^1, \dots, (2m_l-2)^1, \\ (m_1-2)^{(m_1-1)}, (m_2-2)^{(m_2-1)}, \dots, (m_l-2)^{(m_l-1)}\end{array}\right\}.$$

از قضیه فوق نتیجه زیر مستقیماً حاصل می‌شود.

نتیجه ۳٫۲: فرض کنید $\Gamma = lK_m$ به صورت اجتماع l گراف کامل K_m با m رأس باشد. بنابراین

(۱) طیف گراف Γ برابر است با $\left\{(-1)^{l(m-1)}, (m-1)^l\right\}$،

(۲) طیف لاپلاسین گراف Γ برابر است با $\left\{0^l, m^{l(m-1)}\right\}$،

(۳) طیف لاپلاسین بی علامت گراف Γ برابر است با $\left\{(2m-2)^{l},(m-2)^{l(m-1)}\right\}$.

لم ۴،۲: (لم ۱،۲ از [۷]) فرض کنید G یک AC-گروه ناآبلی متناهی باشد. در اینصورت گراف جابجایی G از رابطه زیر بدست می آید:

$\Gamma_G = \bigcup_{i=1}^{n} K_{|X_i|-|Z(G)|}$ که $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مرکزسازهای متمایز از عناصر نامرکزی گروه G می‌باشند.

لم ۵،۲: (لم ۱،۲ از [۳]) فرض کنید $|G:Z(G)|=pqr$ که p, q و r اعداد اول نه لزوماً متمایز باشند. در این صورت G یک AC-گروه است.

گزاره ۶،۲: (گزاره ۲،۲ از [۳]) فرض کنید p کوچکترین عدد اولی باشد که $|G|$ را بشمارد. اگر $|G:Z(G)|=p^3$، آنگاه p^2+2 یا $|Cent(G)|=p^2+p+2$.

قضیه ۷،۲: (قضیه ۴،۳ از [۲]) اگر G یک گروه متناهی ۶-مرکزساز باشد، آنگاه $\frac{G}{Z(G)}$ با یکی از گروه‌های $D_8, A_4, \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ یا $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ یکریخت است.

قضیه ۸،۲: (قضیه A از [۱]) فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. آنگاه G ۷-مرکزساز است اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)}$ با یکی از گروه‌های $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5, D_{10}$ یا $\langle x,y \mid x^5=y^4=1, y^{-1}xy=x^3\rangle$ یکریخت باشد.

۳- نتایج اصلی

در این بخش، نتایج اصلی این مقاله ارائه می‌گردند. ابتدا در قضیه زیر، طیف، طیف لاپلاسین و طیف لاپلاسین بی علامت گراف جابجایی گروه‌های ۶-مرکزساز محاسبه می‌شوند.

قضیه ۱،۳: فرض کنید G یک گروه متناهی ۶-مرکزساز باشد. در این صورت G یک AC-گروه است و داریم:

الف) طیف گراف Γ_G برابر با یکی از مجموعه‌های زیر است:

$$\left\{(-1)^{7|Z(G)|-5},(3|Z(G)|-1)^{1},(|Z(G)|-1)^{4}\right\},$$
$$\left\{(-1)^{11|Z(G)|-5},(3|Z(G)|-1)^{1},(2|Z(G)|-1)^{4}\right\},$$
$$\left\{(-1)^{5(3|Z(G)|-1)},(3|Z(G)|-1)^{5}\right\}$$

یا

$$\left\{(-1)^{19|Z(G)|-5},(7|Z(G)|-1)^{1},(3|Z(G)|-1)^{4}\right\}.$$

ب) طیف لاپلاسین گراف Γ_G برابر با یکی از مجموعه‌های زیر است:

$$\left\{0^{5},3|Z(G)|^{(3|Z(G)|-1)},|Z(G)|^{4(|Z(G)|-1)}\right\},$$
$$\left\{0^{5},3|Z(G)|^{(3|Z(G)|-1)},2|Z(G)|^{4(2|Z(G)|-1)}\right\},$$
$$\left\{0^{5},3|Z(G)|^{5(3|Z(G)|-1)}\right\}$$

یا

$$\left\{0^{5},7|Z(G)|^{(7|Z(G)|-1)},3|Z(G)|^{4(3|Z(G)|-1)}\right\}.$$

ج) طیف لاپلاسین بی علامت گراف Γ_G برابر با یکی از مجموعه‌های زیر است:

$$\left\{\begin{array}{l}(6|Z(G)|-2)^{1}, (3|Z(G)|-2)^{(3|Z(G)|-1)}, \\ (2|Z(G)|-2)^{4}, (|Z(G)|-2)^{4(|Z(G)|-1)}\end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{l}(6|Z(G)|-2)^{1}, (3|Z(G)|-2)^{(3|Z(G)|-1)}, \\ (4|Z(G)|-2)^{4}, (2|Z(G)|-2)^{4(2|Z(G)|-1)}\end{array}\right\},$$

$$\left\{(6|Z(G)|-2)^{5}, (3|Z(G)|-2)^{5(3|Z(G)|-1)}\right\}$$

یا

$$\left\{\begin{array}{l}(14|Z(G)|-2)^{1}, (7|Z(G)|-2)^{(7|Z(G)|-1)}, \\ (6|Z(G)|-2)^{4}, (3|Z(G)|-2)^{4(3|Z(G)|-1)}\end{array}\right\}.$$

برهان: اگر G یک گروه متناهی ۶-مرکزساز باشد، آنگاه با استفاده از قضیه ۷،۲، $\frac{G}{Z(G)}$ با یکی از گروه‌های $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2, A_4, D_8$ یا $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ یکریخت است.

اگر $\frac{G}{Z(G)}$ با یکی از گروه‌های $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2, A_4, D_8$ یکریخت باشد، آنگاه با استفاده از لم ۵،۲، G یک $AC-$ گروه است.

فرض کنید $\frac{G}{Z(G)}\cong D_8$. در این صورت $\bar{G}=\frac{G}{Z(G)}=\left\langle \bar{a},\bar{b} \mid \bar{a}^4=\bar{b}^2=\bar{1}, \bar{a}\bar{b}=\bar{b}\bar{a}^3\right\rangle$ و با استفاده از گزاره ۲،۲ از [۱]، $|Cent(G)|=6$ و $Cent(G)=\left\{G, C_G(a), C_G(a^ib): 1\le i\le 4\right\}$.

همچنین داریم

$$|C_G(a)|=4|Z(G)|, |C_G(ab)|=|C_G(a^2b)|=|C_G(a^3b)|=|C_G(a^4b)|=2|Z(G)|$$

حال با استفاده از لم ۴،۲،

$$\Gamma_G=K_{|C_G(a)-Z(G)|}\cup K_{|C_G(ab)-Z(G)|}\cup K_{|C_G(a^2b)-Z(G)|}\cup K_{|C_G(a^3b)-Z(G)|}\cup$$
$$K_{|C_G(a^4b)-Z(G)|}=K_{3|Z(G)|}\cup 4K_{|Z(G)|}.$$

این نتیجه می‌دهد که

$$Spec(\Gamma_G)=\left\{(-1)^{7|Z(G)|-5}, (3|Z(G)|-1)^{1}, (|Z(G)|-1)^{4}\right\}$$
$$L-Spec(\Gamma_G)=\left\{0^{5}, 3|Z(G)|^{(3|Z(G)|-1)}, |Z(G)|^{4(|Z(G)|-1)}\right\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G)=\left\{\begin{array}{l}(6|Z(G)|-2)^{1}, (3|Z(G)|-2)^{(3|Z(G)|-1)}, \\ (2|Z(G)|-2)^{4}, (|Z(G)|-2)^{4(|Z(G)|-1)}\end{array}\right\}.$$

اگر $\frac{G}{Z(G)} \cong A_4$، آنگاه $\bar{G} = \frac{G}{Z(G)} = \left\langle \bar{a}, \bar{b} \mid \bar{a}^2 = \bar{b}^3 = (\bar{a}\bar{b})^3 = \bar{1} \right\rangle$ و مرکزسازهای متمایز عناصر نامرکزی از $\bar{G}$ عبارتند از $C_{\bar{G}}(\bar{a}) = \left\{\bar{1}, \bar{a}, \bar{b}\bar{a}\bar{b}^{2}, \bar{b}^{2}\bar{a}\bar{b}\right\}$، $C_{\bar{G}}(\bar{b}) = \left\{\bar{1}, \bar{b}, \bar{b}^{-2}\right\}$، $C_{\bar{G}}(\bar{a}\bar{b}) = \left\{\bar{1}, \bar{a}\bar{b}, \bar{b}^{2}\bar{b}\right\}$، $C_{\bar{G}}(\bar{b}\bar{a}) = \left\{\bar{1}, \bar{b}\bar{a}, \bar{a}\bar{b}^{2}\right\}$ و $C_{\bar{G}}(\bar{a}\bar{b}\bar{a}) = \left\{\bar{1}, \bar{a}\bar{b}\bar{a}, \bar{b}\bar{a}\bar{b}\right\}$.

حال از آنجایی که G گروه متناهی ۶-مرکزساز می‌باشد، داریم:

$$Cent(G) = \left\{G, C_G(a), C_G(b), C_G(ab), C_G(ba), C_G(aba)\right\}.$$

همچنین می‌توان نتیجه گرفت که

$$|C_G(a)| = 4|Z(G)|, |C_G(b)| = |C_G(ab)| = |C_G(ba)| = |C_G(aba)| = 3|Z(G)|$$

اکنون با استفاده از لم ۴،۲،

$$\Gamma_G = K_{|C_G(a)-Z(G)|} \cup K_{|C_G(b)-Z(G)|} \cup K_{|C_G(ab)-Z(G)|} \cup K_{|C_G(ba)-Z(G)|} \cup K_{|C_G(aba)-Z(G)|} = K_{3|Z(G)|} \cup 4K_{2|Z(G)|}.$$

بنابراین داریم

$$Spec(\Gamma_G) = \left\{(-1)^{11|Z(G)|-5}, (3|Z(G)|-1)^{1}, (2|Z(G)|-1)^{4}\right\}$$

$$L-Spec(\Gamma_G) = \left\{\begin{array}{l} 0^{5}, 3|Z(G)|^{(3|Z(G)|-1)}, \\ 2|Z(G)|^{4(2|Z(G)|-1)} \end{array}\right\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G) = \left\{\begin{array}{l} (6|Z(G)|-2)^{1}, (3|Z(G)|-2)^{(3|Z(G)|-1)}, \\ (4|Z(G)|-2)^{4}, (2|Z(G)|-2)^{4(2|Z(G)|-1)} \end{array}\right\}$$

حال فرض کنید $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_2^3$. با استفاده از لم ۶،۲، از آنجایی که گروه G ۶-مرکزساز است، شامل دقیقاً یک مرکزساز از اندیس ۲ و ۴ مرکزساز از اندیس ۴ می‌باشد. بنابراین به روش مشابه داریم

$$\Gamma_G = K_{3|Z(G)|} \cup 4K_{|Z(G)|}.$$

و در نتیجه

$$Spec(\Gamma_G) = \left\{(-1)^{7|Z(G)|-5}, (3|Z(G)|-1)^{1}, (|Z(G)|-1)^{4}\right\}$$

$$L-Spec(\Gamma_G) = \left\{0^{5}, 3|Z(G)|^{(3|Z(G)|-1)}, |Z(G)|^{4(|Z(G)|-1)}\right\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G) = \left\{\begin{array}{l} (6|Z(G)|-2)^{1}, (3|Z(G)|-2)^{(3|Z(G)|-1)}, \\ (2|Z(G)|-2)^{4}, (|Z(G)|-2)^{4(|Z(G)|-1)} \end{array}\right\}$$

سرانجام فرض کنید $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_2^4$ و $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$.
مجموعه عناصر دو به دو ناجابجایی با اندازه ماکسیمال[۹] باشد. فرض کنید $X_i = C_G(x_i)$ برای $1 \le i \le r$، و $|G : X_1| \le |G : X_2| \le \ldots \le |G : X_r|$. با بکارگیری لم ۴٫۲ از [۱]، $r = 5$. حال از آنجایی که $|Cent(G)| = 6 = r+1$، با استفاده از لم ۶٫۲ از [۱]، G یک AC-گروه می‌باشد و $Cent(G) = \{G, C_G(x_i) \mid 1 \le i \le 5\}$. چون $r = 5$، با استفاده از لم ۳٫۳ از [۹]، $|G : X_2| \le 4$. بنابراین $|G : X_2| = 2$ یا 4. اگر $|G : X_2| = 2$، آنگاه بوضوح به تناقض خواهیم رسید. اکنون فرض کنید $|G : X_2| = 4$. با استفاده از لم ۳٫۳ از [۱۰]، $|G : X_2| = |G : X_3| = |G : X_4| = |G : X_5| = 4$ و $|G : X_1| = 2$ یا 4. اگر $|G : X_1| = 4$، آنگاه $|C_G(x_i)| = 4|Z(G)|$ برای $1 \le i \le 5$ و $\Gamma_G = 5K_{3|Z(G)|}$.
بنابراین داریم

$$Spec(\Gamma_G) = \left\{(-1)^{5(3|Z(G)|-1)}, (3|Z(G)|-1)^5\right\},$$

$$L-Spec(\Gamma_G) = \left\{0^5, 3|Z(G)|^{5(3|Z(G)|-1)}\right\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G) = \left\{(6|Z(G)|-2)^5, (3|Z(G)|-2)^{5(3|Z(G)|-1)}\right\}$$

در حالتی که $|G : X_1| = 2$ باشد، داریم $|C_G(x_1)| = 8|Z(G)|$ و $|C_G(x_i)| = 4|Z(G)|$ برای $2 \le i \le 5$ و $\Gamma_G = K_{7|Z(G)|} \cup 4K_{3|Z(G)|}$.
این نتیجه می‌دهد که

$$Spec(\Gamma_G) = \left\{(-1)^{19|Z(G)|-5}, (7|Z(G)|-1)^1, (3|Z(G)|-1)^4\right\}$$

$$L-Spec(\Gamma_G) = \left\{\begin{array}{l}0^5, 7|Z(G)|^{(7|Z(G)|-1)}, \\ 3|Z(G)|^{4(3|Z(G)|-1)}\end{array}\right\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G) = \left\{\begin{array}{l}(14|Z(G)|-2)^1, (7|Z(G)|-2)^{(7|Z(G)|-1)}, \\ (6|Z(G)|-2)^4, (3|Z(G)|-2)^{4(3|Z(G)|-1)}\end{array}\right\}.$$

قضیه ۲٫۳: فرض کنید G یک گروه متناهی ۷-مرکزساز باشد. در این صورت G یک AC-گروه است و داریم:
الف) طیف گراف Γ_G برابر با یکی از مجموعه‌های زیر است:

$$\left\{(-1)^{6(4|Z(G)|-1)}, (4|Z(G)|-1)^6\right\},$$

$$\left\{(-1)^{9|Z(G)|-6}, (4|Z(G)|-1)^1, (|Z(G)|-1)^5\right\}$$

یا

[۹] Pairwise non-commuting elements of maximal size

$$.\left\{(-1)^{19|Z(G)|-6}, (4\,|\,Z(G)\,|\,-1)^{1}, (3\,|\,Z(G)\,|\,-1)^{5}\right\}$$

ب) طیف لاپلاسین گراف Γ_G برابر با یکی از مجموعه‌های زیر است:

$$\left\{0^{6}, 4\,|\,Z(G)\,|^{6(4|Z(G)|-1)}\right\},$$

$$\left\{0^{6}, 4\,|\,Z(G)\,|^{(4|Z(G)|-1)}, |\,Z(G)\,|^{5(|Z(G)|-1)}\right\}$$

یا

$$.\left\{0^{6}, 4\,|\,Z(G)\,|^{(4|Z(G)|-1)}, 3\,|\,Z(G)\,|^{5(3|Z(G)|-1)}\right\}$$

ج) طیف لاپلاسین بی علامت گراف Γ_G برابر با یکی از مجموعه‌های زیر است:

$$\left\{(8\,|\,Z(G)\,|\,-2)^{6}, (4\,|\,Z(G)\,|\,-2)^{6(4|Z(G)|-1)}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{l}(8\,|\,Z(G)\,|\,-2)^{1}, (4\,|\,Z(G)\,|\,-2)^{(4|Z(G)|-1)},\\ (2\,|\,Z(G)\,|\,-2)^{5}, (|\,Z(G)\,|\,-2)^{5(|Z(G)|-1)}\end{array}\right\}$$

یا

$$.\left\{\begin{array}{l}(8\,|\,Z(G)\,|\,-2)^{1}, (4\,|\,Z(G)\,|\,-2)^{(4|Z(G)|-1)},\\ (6\,|\,Z(G)\,|\,-2)^{5}, (3\,|\,Z(G)\,|\,-2)^{5(3|Z(G)|-1)}\end{array}\right\}$$

برهان: با استفاده از قضیه ۸،۲، گروه متناهی G ۷-مرکزساز است اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)}$ با یکی از گروه‌های $D_{10}, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ یا $\langle x, y \mid x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3 \rangle$ یکریخت باشد.

اگر $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$، آنگاه $\frac{G}{Z(G)} = \left\langle aZ(G), bZ(G) \mid a^5, b^5, aba^{-1}b^{-1} \in Z(G) \right\rangle$ که $a, b \in G$ و $ab \neq ba$. فرض کنید $x \in G \setminus Z(G)$ و $xZ(G)$ یک عنصر از مرتبه ۵ در $\frac{G}{Z(G)}$ باشد. از آنجایی که $\frac{C_G(x)}{Z(G)} \leq C_{\frac{G}{Z(G)}}(xZ(G))$، می توان نتیجه گرفت که $\left|\frac{C_G(x)}{Z(G)}\right| = 5$. بنابراین برای هر $x \in G \setminus Z(G)$، $C_G(x)$ یک زیرگروه سره از G شامل $Z(G)$ می باشد. اکنون با استفاده از [۴]، برای هر $x \in G \setminus Z(G)$، $C_G(x)$ یک زیرگروه نرمال آبلی از اندیس ۵ در G است. همچنین برای هر $z \in Z(G)$، $1 \leq i \leq 4$ و $1 \leq j \leq 5$ داریم:

$$C_G(a) = C_G(a^i z) = Z(G) \cup aZ(G) \cup a^2 Z(G) \cup a^3 Z(G) \cup a^4 Z(G)$$

و

$$C_G(a^j b) = C_G(a^j bz) = Z(G) \cup a^j bZ(G) \cup a^{2j} b^2 Z(G) \cup a^{3j} b^3 Z(G) \cup a^{4j} b^4 Z(G).$$

اینها مرکزسازهای عناصر نامرکزی گروه G می‌باشند.

حال با استفاده از لم ۴،۲،

$$\Gamma_G = K_{|C_G(a)-Z(G)|} \cup K_{|C_G(ab)-Z(G)|} \cup K_{|C_G(a^2b)-Z(G)|} \cup K_{|C_G(a^3b)-Z(G)|} \cup K_{|C_G(a^4b)-Z(G)|} \cup K_{|C_G(a^5b)-Z(G)|} = 6K_{4|Z(G)|}.$$

بنابراین داریم

$$Spec(\Gamma_G) = \left\{(-1)^{6(4|Z(G)|-1)}, (4|Z(G)|-1)^{6}\right\}$$

$$L-Spec(\Gamma_G) = \left\{0^{6}, 4|Z(G)|^{6(4|Z(G)|-1)}\right\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G) = \left\{(8|Z(G)|-2)^{6}, (4|Z(G)|-2)^{6(4|Z(G)|-1)}\right\}.$$

اگر $\frac{G}{Z(G)} \cong D_{10}$، آنگاه $\bar{G} = \frac{G}{Z(G)} = \left\langle \bar{a}, \bar{b} \mid \bar{a}^5 = \bar{b}^2 = \bar{1}, \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}^4 \right\rangle$. با استفاده از گزاره ۲,۲ از [۱]، $|Cent(G)| = 7$ و داریم $Cent(G) = \left\{G, C_G(a), C_G(a^i b) : 1 \le i \le 5\right\}$.

توجه داشته باشید که این مرکزسازها زیرگروه‌های آبلی از گروه G هستند. بنابراین G یک AC-گروه می‌باشد. همچنین

$$|C_G(a)| = 5|Z(G)|, |C_G(ab)| = |C_G(a^2b)| = |C_G(a^3b)| = |C_G(a^4b)| = |C_G(a^5b)| = 2|Z(G)|$$

بنابراین به روش مشابه نتیجه می‌گیریم که

$$\Gamma_G = K_{4|Z(G)|} \cup 5K_{|Z(G)|}$$

و داریم

$$Spec(\Gamma_G) = \left\{(-1)^{9|Z(G)|-6}, (4|Z(G)|-1)^{1}, (|Z(G)|-1)^{5}\right\},$$

$$L-Spec(\Gamma_G) = \left\{0^{6}, 4|Z(G)|^{(4|Z(G)|-1)}, |Z(G)|^{5(|Z(G)|-1)}\right\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G) = \left\{\begin{array}{l}(8|Z(G)|-2)^{1}, (4|Z(G)|-2)^{(4|Z(G)|-1)}, \\ (2|Z(G)|-2)^{5}, (|Z(G)|-2)^{5(|Z(G)|-1)}\end{array}\right\}$$

سرانجام فرض کنید $\frac{G}{Z(G)} \cong \langle x, y \mid x^5 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^3 \rangle$. با استفاده از لم ۵,۲، G یک AC-گروه می‌باشد. فرض کنید $Cent(G) = \left\{G, C_G(x_i) : 1 \le i \le 6\right\}$. در این صورت

$$|C_G(x_1)| = 5|Z(G)|, \quad |C_G(x_i)| = 4|Z(G)|; \quad 2 \le i \le 6$$

و

$$\Gamma_G = K_{4|Z(G)|} \cup 5K_{3|Z(G)|}.$$

بنابراین داریم:

$$Spec(\Gamma_G) = \left\{(-1)^{19|Z(G)|-6}, (4|Z(G)|-1)^{1}, (3|Z(G)|-1)^{5}\right\},$$

$$L-Spec(\Gamma_G) = \left\{0^{6}, 4|Z(G)|^{(4|Z(G)|-1)}, 3|Z(G)|^{5(3|Z(G)|-1)}\right\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G)=\begin{Bmatrix}(8|Z(G)|-2)^{1},(4|Z(G)|-2)^{(4|Z(G)|-1)}, \\ (6|Z(G)|-2)^{5},(3|Z(G)|-2)^{5(3|Z(G)|-1)}\end{Bmatrix}$$

در انتها، دو مثال از گروه‌های ۶-مرکزساز و ۷-مرکزساز ارائه می‌دهیم و طیف، طیف لاپلاسین و طیف لاپلاسین بی علامت گرافهای جابجایی آنها را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۳,۳: فرض کنید $G=A_4=\langle a,b|\, a^2=b^3=(ab)^3=1\rangle$. در این صورت $|Cent(G)|=6$ و G یک $AC-$گروه است و مرکزسازهای متمایز عناصر نامرکزی از G عبارتند از $C_G(a)=\{1,a,bab^2,b^2ab\}$، $C_G(b)=\{1,b,b^2\}$، $C_G(ab)=\{1,ab,b^2a\}$، $C_G(ba)=\{1,ba,ab^2\}$ و $C_G(aba)=\{1,aba,bab\}$. در نتیجه $\Gamma_G=K_3\cup 4K_2$. حال با استفاده از قضیه ۲,۲ و نتیجه ۳,۲ داریم

$$Spec(\Gamma_G)=\{(-1)^6,1^4,2^1\}$$

$$L-Spec(\Gamma_G)=\{0^5,2^4,3^2\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G)=\{0^4,1^2,2^4,4^1\}$$

که به ترتیب حالت‌های دوم از قسمت‌های الف)، ب) و ج) قضیه ۱,۳ می‌باشند.

مثال ۴,۳: فرض کنید $G=D_{10}=\langle a,b|\, a^5=b^2=1,\ ab=ba^4\rangle$. در این صورت $|Cent(G)|=7$ و G یک $AC-$گروه است و مرکزسازهای متمایز عناصر نامرکزی از G عبارتند از $C_G(a)=\{1,a,a^2,a^3,a^4\}$، $C_G(b)=\{1,b\}$، $C_G(ab)=\{1,ab\}$، $C_G(a^2b)=\{1,a^2b\}$، $C_G(a^3b)=\{1,a^3b\}$ و $C_G(a^4b)=\{1,a^4b\}$. در نتیجه $\Gamma_G=K_4\cup 5K_1$. حال با استفاده از قضیه ۲,۲ و نتیجه ۳,۲ داریم

$$Spec(\Gamma_G)=\{(-1)^3,0^5,3^1\}$$

$$L-Spec(\Gamma_G)=\{0^6,4^3\}$$

و

$$Q-Spec(\Gamma_G)=\{0^5,2^3,6^1\}$$

که به ترتیب حالت‌های دوم از قسمت‌های الف)، ب) و ج) قضیه ۲,۳ می‌باشند.

نتیجه گیری

در این مقاله نشان داده شد که گروه‌های متناهی ۶-مرکزساز و ۷-مرکزساز AC-گروه هستند. همچنین طیف، طیف لاپلاسین و طیف لاپلاسین بی علامت گراف‌های جابجایی این گروه‌ها محاسبه شد.

فهرست منابع

[۱] A. Abdollahi, S. M. Jafarian Amiri, A. Mohammadi Hassanabadi, “Groups with specific number of centralizers,” *Houston J. Math.*, vol. ۳۳, no. ۱, pp. ۴۳-۵۷, ۲۰۰۷.

[۲] A. Ashrafi, “Counting the centralizers of some finite groups,” *Korean J. Comput. Appl. Math.*, vol. ۷, no. ۱, pp. ۱۱۵-۱۲۴, ۲۰۰۰.

[۳] S. J. Baishya, “On finite groups with specific number of centralizers,” *Int. Electron. J. Algebra*, vol. ۱۳, pp. ۵۳-۶۲, ۲۰۱۳.

[۴] S. Belcastro, G. Sherman, “Counting centralizers in finite groups,” *Math. Mag.*, vol. ۶۷, no. ۵, pp. ۳۶۶-۳۷۴, ۱۹۹۴.

[۵] N. Biggs, “Algebraic graph theory,” New York: Cambridge University Press, ١٩٩٤.

[۶] R. Brauer, K. A. Fowler, “On groups of even order,” *Ann. Math.*, vol. ۶۲, no. ۲, pp. ۵۶۵-۵۸۳, ۱۹۵۵.

[۷] J. Dutta, R. K. Nath, “Spectrum of commuting graphs of some classes of finite groups,” *Matematika*, vol. ۳۳, no. ۱, pp. ۸۷-۹۵, ۲۰۱۷.

[۸] B. Mohar, “The Laplacian spectrum of graphs, in graph theory, combinatorics, and applications,” In *Proceedings of the Sixth Quadrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs, Western Michigan University, Kalamazoo*, ۱۹۸۸, (Edited by Y. Alavi, G. Chartrand, O. R. Oellermann and A. J. Schwenk), pp. ۸۷۱-۸۹۸, Wiley, New York, ۱۹۹۱.

[۹] R. K. Nath, “Various spectra of commuting graphs n-centralizer finite groups,” *Int. J. Eng. Sci. Tech.*, vol. ۱۰, pp. ۱۷۰-۱۷۲, ۲۰۱۸.

[۱۰] M. J. Tomkinson, “Groups covered by finitely many cosets or subgroups,” *Comm. Algebra*, vol. ۱۵, pp. ۸۴۵-۸۵۹, ۱۹۸۷.