دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند 1400
شماره شاپا: 588-2588X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پیوند مدول‌های G_K−کامل و رفتار درجه کاهشی

فاطمه دهقانی‌زاده*

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد یزد، یزد، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: 1398/11/13 تاریخ پذیرش مقاله: 1399/04/24

چکیده:
فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی و نوتری و $\mathbf{K}$ یک R- مدول شبه دوگانی است. ما مدول‌های پیوند نسبت به مدول‌های $\mathbf{G_K}$- کامل را مطالعه می‌کنیم. همچنین خاصیت‌هایی را از مدول‌هایی که به طور افقی پیوند دارند به مدول‌هایی که نسبت به مدول‌های $\mathbf{G_K}$- کامل پیوند دارند، تعمیم می‌دهیم.

واژه‌ی کلیدی: پیوند مدول‌ها، مدول شبه دوگانی،عمق مدول، G_K -بعد.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:fdzadeh@gmail.com

1- مقدمه

رده‌بندی یکی از اهداف در تمام شاخه‌های ریاضیات است. نظریه پیوند در هندسه جبری و جبر جابه‌جایی یکی از ابزارهای پیشرفته در این زمینه است. اوّلین بار در سال 1870 هافمن و در سال 1882 نوتر برای رده‌بندی خم‌ها نظریه پیوند را به کار گرفته‌اند. در سال 1974 پسکین و اسپیرو [1] این نظریه را به زبان جبری بیان کرده‌اند. گفته می‌شود که دو ایده‌آل I و J در حلقه موضعی و کوهن-مکالی R با هم پیوند دارند، هرگاه رشته دقیق چون α دراشتراک آن‌ها موجود باشد که $I = \alpha{:}J$ و $J = \alpha{:}I$.

در سال 2000، یوشینو و ایساگاوا [2] پیوند مدول‌های کوهن-مکالی را روی حلقه‌های گرنشتاین تعریف و بررسی کردند. این افراد گفتند: دو مدول کوهن-مکالی M و N با هم پیوند دارند اگر ایده‌آل تقاطع کامل[2] C در $AnnM \cap AnnN$ وجود داشته باشد که، $Hom_{\frac{R}{C}}\left(M,\frac{R}{C}\right) \cong \Omega_{\frac{R}{C}}N$ در سال 2004، مارتسینکوفسکی و استروکر [3] مفهوم پیوند مدول‌ها را معرفی کردند و به منظور تعریف پیوند مدول‌ها، ترکیب دو عملگر سی زی جی و ترانهاده $\lambda = \Omega Tr$ را معرفی کردند و ایشان نشان دادند که مدول M و N با هم پیوند دارند اگر و فقط اگر $\lambda N = M$ و $\lambda M = N$ باشد. در این راستا خصوصیات مدول‌های پیوند با فرض گرنشتاین بودن حلقه بررسی شد.

در سال 2005 ناگل [4] پیوند دو مدول M و N را نسبت به مدول شبه گرنشتاین C در حلقه گرنشتاین R معرفی کرد و این مفهوم همه مفاهیم گذشته را در بر می گرفت[9، تبصره 3-20]. در سال‌های اخیرافراد زیادی پیوند مدول‌ها را از جنبه‌های مختلف مورد مطالعه قرارداده‌اند، از جمله می‌توان به مراجع [6 و 5 و 7 و8] اشاره کرد.

کار روی پیوند مدول‌ها با دو هدف مورد توجه بوده است، اولا این که کلاس مدول‌هایی که باهم پیوند دارند وسیع‌تر شود و ثانیا خصوصیات بیشتری از مدول‌ها تحت پیوند حفظ شود.

نویسندگان در مقاله [9] با الهام از مقاله ناگل پیوند دو مدول را براساس مورفیسم‌های n- انعکاسی تعریف کردند. این افراد شرط گرنشتاین بودن حلقه را حذف کردند و در بررسی بعضی از خواص در صورت نیاز حلقه های کوهن-مکالی را جایگزین کردند. به علاوه به جای مدول‌های شبه گرنشتاین در مقاله ناگل، مدول‌های n- ا نعکاسی را قرار دادند.

بدیهی است این مفهوم جدید از پیوند مدول‌ها مفاهیم پیوند مدول‌های ناگل، مارتسینکوفسکی و استروکر را می‌پوشاند.

هدف از این مقاله تعمیم خواص مدول‌هایی است که به طور افقی پیوند دارند به مدول‌هایی که توسط مدول‌های n - انعکاسی پیوند دارند.

مقاله حاضر به سه بخش تقسیم می‌شود. در بخش دوم ، برخی از مفاهیم و تعاریف و همچنین برخی از نتایج که در این مقاله مورد نیاز است را بیان می‌کنیم. در بخش سوم، به مطالعه و بررسی مدول‌هایی که توسط R- مدول‌های G_K- کامل پیوند دارند می‌پردازیم.

به ویژه، برای R- مدول متناهی مولد M درجه کاهشی r_M را تعریف و ارتباط آن را باعمق مدول پیوند داده شده، N، بررسی می‌کنیم. بعضی از نتایج این بخش قضایای زیر است:

قضیه 1-1. فرض کنید $\mathcal{X}_n$ کاتگوری مدول‌های G_K- کامل ازدرجه n است. اگر مدول‌های M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ پیوند داشته باشند. آنگاه

$$Ass_R Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K) = \left\{ \begin{matrix} P \in Spec(R) | depthN_P = \\ r_M - n, G_{K_P} - dimM_P > n \end{matrix} \right\}$$

$$AttH_m^{cd_m(M)}(M) =$$

[2] Complete Intersection

$$\left\{\begin{array}{c} P \in spec(R) | depthN_P = \\ dimM - cd_m(M), G_{K_P} - dimM_P > n \end{array}\right\}$$

قضیه 1-2. فرض کنیم $\mathcal{X}_n$ کاتگوری مدول‌های G_K- کامل ازدرجه n است. اگر مدول‌های M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ پیوند داشته باشند و M یک R- مدول G_K- کامل کاهشی باشد در آن صورت

$$r_M - n + (G_K - dimN) = G_K - dimExt^{r_M}_R(M, K)$$

در سراسر این مقاله R نشاندهنده یک حلقه جابه جایی و نوتری با عضو همانی ناصفر و M و N مدول‌هایی با تولید متناهی‌اند. $C(R)$ کاتگوری R-مدول‌ها با تولید متناهی و K یک R- مدول شبه دوگانی است. علائم و مفاهیم تعریف نشده در این مقاله از کتاب [10] و مقاله‌های [4، 9، 11] است.

2- پیش نیازها

در این بخش مفاهیم و اصطلاحات و نتایجی که در سراسر مقاله مورد نیاز است را بیان می‌کنیم. فرض کنیم $\cdots \longrightarrow P_i \overset{\delta_i}{\to} \cdots \overset{\delta_2}{\to} P_1 \overset{\delta_1}{\to} P_0 \overset{\delta_0}{\to} M \longrightarrow 0$ تحلیل پروژکتیو از R- مدول M باشد. تصویر δ_i (برای هر $i > 0$) را i- امین سی زی جی مدول M می‌گوئیم و آن را به $\Omega^i M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف 2-1 یک R- مدول K را شبه دوگانی می‌گوییم، اگر $R \cong Hom_R(K, K)$ و برای هر $i > 0$، $Ext^i_R(K, K) = 0$. این مدول‌ها توسط فاکسبی و گلد [12و13] مطالعه شده اند. بدیهی است، حلقه R یک R – مدول شبه دوگانی است.اگر حلقه R کوهن- مکالی با مدول دوگانی ω_R باشد آنگاه ω_R یک R – مدول شبه دوگانی است.

تعریف 2-2. مدول M را انعکاسی کامل نسبت به K می‌گوییم اگر:

$$M \cong Hom_R(Hom_R(M, K), K)$$

برای هر $i > 0$،

$$Ext^i_R(Hom_R(M, K), K) = 0 = Ext^i_R(M, K)$$

مجموعه مدول‌های انعکاس کامل نسبت به K را به شکل $G_K(R)$ نشان می‌دهیم. یک G_K- تحلیل از R- مدول متناهی مولد M، عبارت است از یک همبافت از مدول‌های متعلق به $G_K(R)$ ، $\cdots \longrightarrow G_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow 0$ به طوری که این همبافت برای هر $i > 0$ ، در G_i دقیق و صفرامین همولوژی این همبافت برابر M می‌باشد. تحلیل فوق از طول n نامیده می‌شود، هرگاه $G_n \neq 0$ و برای هر $i > n$، $G_i = 0$. گوییم R- مدول M، بعد G_K- گرنشتاین متناهی دارد و می‌نویسیم $G_K - dimM < \infty$، هرگاه یک G_K- تحلیل با طول متناهی داشته باشد.

یک مدول شبه دوگانی K روی حلقه موضعی R، دوگانی است اگر و فقط اگر هر R- مدول متناهی مولد دارای G_K– بعد متناهی باشد[14، گزاره 1-3].

تبصره2-3. فرض کنیم K یک R- مدول شبه دوگانی باشد. اگر $\cdots \longrightarrow P_1 \overset{\delta_1}{\to} P_0 \overset{\delta_0}{\to} M \longrightarrow 0$ یک تحلیل پروژکتیو از R- مدول M باشد. آنگاه ترانهاده M نسبت به K، $Tr_K M$، برابر ${coker\delta_1}^{\nabla}$ تعریف می‌شود، که درآن $(-)^{\nabla} = Hom_R(-, K)$. ترانهاده M نسبت به K در رشته دقیق زیر صدق می‌کند. (2-3-1)

$$0 \longrightarrow M^{\nabla} \longrightarrow P_0^{\nabla} \longrightarrow P_1^{\nabla} \longrightarrow Tr_K M \longrightarrow 0$$

و برای هر R- مدول M، رشته قیق(2-3-2)

$$0 \to Ext^1_R(Tr_K M, K) \to M \to M^{\nabla\nabla} \to Ext^2_R(Tr_K M, K) \to 0$$

وجود دارد [12، گزاره 3- 1]. قضیه زیر که از آن استفاده خواهیم کرد در مرجع [13] ثابت شده است.

قضیه2-4. اگر M یک R- مدول و K یک R - مدول شبه دوگانی باشد. گزاره‌های زیر برقرار هستند.

الف) $G_K - dimM = 0$ اگر و فقط اگر
$G_K - dimTr_K M = 0$

ب) اگر $G_K - dimM < \infty$ در این صورت
$G_K - dimM = \sup\{i | Ext_R^i(M,K) \neq 0\}$

ت) اگر R موضعی باشد و $G_K - dimM$ متناهی باشد در این صورت
$G_K - dimM + depthM = depthR.$

گزاره 2-5. اگر رشته $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ دقیق باشد و $depthZ < depthY$ آنگاه
$depthX = depthZ + 1.$

برهان: با استفاده از [15، گزاره1-2-9] ثابت می‌شود.

قضیه2-6. [5، گزاره2-4]: فرض کنیم، n یک عدد صحیح مثبت باشد، $G_K - dimM < \infty$ آنگاه گزاره های زیر هم ارزند:

الف- به ازای هر
$Ext_R^i(Tr_K M,\ K) = 0, \quad 1 \le i \le n$

ب- به ازای هر ایده‌آل اول P در حلقه R،
$depth_{R_P} M_P \geq min\{n, depthR_P\}$

برای اثبات ب $\longrightarrow$ الف شرط $G_K - dimM < \infty$ لازم نیست.

تعریف2-7: یک R- مدول M خالص درجه[3] نامیده می‌شود اگر برای هر $P \in Ass(M)$، $grade(M) = depth(R_P)$.

گزاره 2-8: فرض کنیم M یک R- مدول از درجه n باشد، آنگاه $Ext_R^n(M,K)$ یک R- مدول خالص درجه از درجه n است [4، لم 2- 7].

تعریف و تبصره2- 9. فرض کنیم K یک R- مدول شبه دوگانی و M یک R- مدول از درجه n باشد. مدول M، مدول n– انعکاسی نسبت به K نامیده می‌شود، هرگاه همریختی طبیعی

$$M \xrightarrow{\eta_K^R(M)} Ext_R^n(Ext_R^n(M,K),K)$$

یکریختی باشد. مجموعه چنین مدول‌هایی را به $ref_n(K)$ نشان می‌دهیم.

زیر کاتگوری $ref_n(K) \supseteq \mathcal{X}_n$ را یک زیر کاتگوری n- انعکاسی نسبت به K می‌نامیم هرگاه به ازای هر $M \in \mathcal{X}_n$، $Ext_R^n(M,K) \in \mathcal{X}_n$.

مجموعه همه R- هومورفیسم پوشا $\phi: X \to M$، به طوری که $X \in \mathcal{X}_n$ و $M \in C(R)$ و $grade(M) = grade(X)$ را به $Epi(\mathcal{X}_n)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت اگر $X \in \mathcal{X}_n$ و $\varphi \in Epi(\mathcal{X}_n)$ را در نظر بگیریم. با توجه به این که $ker\varphi$ از درجه n است، رشته دقیق

$$0 \to ker\varphi \xrightarrow{\alpha} X \to im\varphi \longrightarrow 0 \qquad (2\text{-}9\text{-}1)$$

رشته دقیق طولانی (2-9-2)

$$0 \longrightarrow Ext_R^n(im\varphi,K) \to Ext_R^n(X,K) \xrightarrow{\psi} Ext_R^n(ker\varphi,K) \to Ext_R^{n+1}(im\varphi,K) \to Ext_R^{n+1}(X,K) \to Ext_R^{n+1}(ker\varphi,K)$$

را نتیجه می‌دهد. بنابراین قضیه زیر را داریم،

قضیه2-10: [9، قضیه 3-5]. فرض کنیم χ یک زیر کاتگوری n-انعکاسی نسبت به K است و $\varphi \in Epi(\chi)$ به طوری که $ker\varphi \neq 0$. به علاوه فرض می‌کنیم $\psi = L_K^n(\varphi)$. آنگاه گزاره‌های زیر برقرار هستند:

---
[3] Grade Unmixed

الف- $L_K^n(\varphi) \in Epi(\chi)$ ،

ب- $imL_K^n(\varphi)$ خالص درجه از درجه n است،

ت- اگر $\eta_K^R(im\,\varphi)$ یک به یک باشد، آنگاه $\ker\varphi \cong Ext_R^n(imL_K^n(\varphi), K)$ ،

پ- $im\,\eta_K^R(im\,\varphi) \cong imL_K^n(L_K^n(\varphi))$

تعریف 2-11 [9، تعریف 3- 8]. فرض کنیم $\mathcal{X}_n$ یک زیر کاتگوری n–انعکاسی نسبت به K و $\varphi,\psi \in Epi(\chi_n)$ است.

الف- گوییم همریختی‌های پوشا φ,ψ هم ارزند و می‌نویسیم $\varphi \equiv \psi$، هرگاه یکریختی‌های α و β موجود باشند به‌طوری که نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow\beta & & \downarrow\alpha \\ Y & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

ب) گوییم دو R- مدول M, N نسبت به χ_n توسط φ,ψ پیوند دارند هرگاه درشرایط زیر صدق کنند:

$$M \cong im\varphi, \qquad N \cong im\psi$$
$$\psi \equiv L_K^n(\varphi), \qquad \varphi \equiv L_K^n(\psi)$$

به عبارت دیگر، گوییم M توسط φ پیوند دارد هرگاه $M \cong im\varphi$ و $M \cong imL_K^n(L_K^n(\varphi))$.

لم 2-12 [9، نتیجه 3-9]. فرض کنیم χ یک زیر کاتگوری **n**-انعکاسی نسبت به K و M یک R-مدول باشد. هرگاه همو مورفیسم غیر یک به یک $\varphi \in Epi(\chi)$ در شرط $M \cong im\varphi$ صدق کند، آنگاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

الف- M توسط φ پیوند دارد.

ب- $\eta_K^R(M)$ یک به یک است.

ت- $Ext_R^{n+1}(Tr_K\Omega^n M, K) = 0$.

تبصره و قرارداد2-13.

فرض کنیم K یک R- مدول شبه دوگانی و χ_n یک زیرکاتگوری n-انعکاسی نسبت به K است. به علاوه فرض کنیم R- مدول M و N نسبت به χ_n پیوند دارند.

با توجه به تعریف و تبصره 2-9 و قضیه 2-10، $grade\,(M) = grade\,(N) = n$. بنابراین فرض کنیم $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک $K-$ رشته منظم در $Ann\,(M) \cap Ann(N)$ است. قرار می‌دهیم $S = \frac{R}{I}$ و $I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $\overline{K} = K\otimes_R R/I$. با توجه به [13، گزاره 2-5]، $\overline{K}$ یک S- مدول شبه دوگانی است.

3- درجه کاهشی و پیوند مدول‌ها

همه قراردادهای بخش 1 و 2 را می‌پذیریم و برای تأکید تعاریف زیر را می‌آوریم:

$$grade_K M = inf\{i \ge 0 | Ext_R^i(M,K) \neq 0\} = n$$

بدیهی است، با توجه به شبه دوگانی بودن K، $grade_R M$ با $grade_K M$ برابر است. و

$$G_K - dimM = sup\{i \ge 0 | Ext_R^i(M,K) \neq 0\}$$

هرگاه $grade(M) = G_K - dim(M)$ مدول M را G_K-کامل می‌نامیم. اگر حلقه R، کوهن-مکالی باشد هر R ـ مدول G_K- کامل یک R- مدول کوهن-مکالی است.

تعریف3-1. درجه کاهشی مدول M نسبت به K به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$r_M = inf\{i | i > grade_K M, Ext_R^i(M,K) \neq 0\}$$

طبق تعریف اگر M یک R- مدول G- کامل باشد $r_M = +\infty$ و با مقایسه این تعاریف، اگر M یک R- مدول G_K- کامل نباشد همواره نامساوی زیر برقرار است:

$$grade_K M < r_M \le G_K - dimM$$

به‌علاوه مدول M را یک R- مدول G_K- کامل کاهشی گوییم هرگاه $r_M = G_K - dimM$. بدیهی است با توجه به تعریف یک R- مدول G_K- کامل کاهشی، G_Kـ بعد متناهی دارد.

لم3-2 [13]. فرض کنیم M یک R- مدول G_K- کامل از درجه n باشد. آنگاه بیان‌های زیر صادق است:

الف- $Ext_R^n(M,K)$ یک R- مدول G_K- کامل است،

ب- $Ext_R^n(Ext_R^n(M,K),K) \cong M$،

ت- $Ann_R M = Ann_R Ext_R^n(M,K)$.

تبصره3-3: فرض کنیم M یک R- مدول و $grade\ (M) = n > 0$، به علاوه فرض کنیم

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

یک تحلیل پروژکتیو می‌نیمال از M است. همواره از این تحلیل، رشته‌های دقیق (3-3-1)

$$0 \longrightarrow\ Ext_R^i(M,K) \longrightarrow r_K\Omega^{i-1}M \longrightarrow X_i \to 0$$
$$0 \to X_i \to Hom(P_{i+1},K) \to Tr_K\Omega^i M \to 0$$

برای هر عدد صحیح و مثبت i، بر قرار است به‌علاوه با توجه به $grade\ M = n > 0$، به ازای $1 \le i \le n$ نامساوی

$$G_K - dimTr_K\Omega^{i-1}M \le i \qquad (3\text{-}3\text{-}2)$$

و با در نظر گرفتن تعریف درجه کاهشی یکریختی

$$Tr_K\Omega^n M \cong \Omega^{r_M-1-n}Tr_K\Omega^{r_M-1}M \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

صادق است.

قرارداد: با توجه به لم 3-2 مدول‌های G_K- کامل از درجه n مدول‌های n- انعکاسی نسبت به K هستند. در سراسر این بخش، $\mathcal{X}_n$ یک زیرکاتگوری $C(R)$ شامل همه R- مدول‌های G_K- کامل از درجه n است و به آن یک زیر کاتگوری G_K- کامل از درجه n می‌گوییم. مجموعه همه همریختی پوشا $\phi: X \to M$، به‌طوری که $X \in \mathcal{X}_n$ و $M \in C(R)$ و $grade(M) = grade(X)$، را به $Epi(\mathcal{X}_n)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین اعضای مجموعه $Epi(\mathcal{X}_n)$ همریختی G_K- کامل از درجه n هستند. در این بخش $grade\ (M) = n > 0$ فرض می‌کنیم.

تبصره3-4. فرض کنیم $\mathcal{X}_n$ کاتگوری همه R- مدول‌های G_K- کامل از درجه n و $X \in \mathcal{X}_n$ و $\varphi \in Epi(\mathcal{X}_n)$ باشد. بنابراین رشته دقیق کوتاه

$$0 \to ker\varphi \xrightarrow{\alpha} X \to im\varphi \longrightarrow\ 0$$

رشته دقیق (3-4- 1)

$$0 \to Ext_R^n(im\varphi,K) \to Ext_R^n(X,K) \xrightarrow{\psi} Ext_R^n(ker\varphi,K) \to Ext_R^{n+1}(im\varphi,K) \longrightarrow 0$$

به ازای $i > n$، یکریختی $Ext_R^{i+1}(im\varphi,K) \cong Ext_R^i(ker\varphi,K)$ را نتیجه می‌دهد. با در نظر گرفتن لم 3-2، $Ext_R^n(X,K) \in \mathcal{X}_n$. بنابراین با قراردادن $\psi = L_K^n(\varphi)$، رشته (3-4-1) به رشته‌های دقیق کوتاه زیر شکافته می‌شوند.

$$Ext_R^n(im\varphi,K) \to Ext_R^n(X,K) \longrightarrow imL_K^n(\varphi) \longrightarrow 0 \qquad (3\text{-}4\text{-}2)$$

$$0 \to imL_K^n(\varphi) \longrightarrow Ext_R^n(ker\varphi,K) \to Ext_R^{n+1}(im\varphi,K)\ \to 0 \qquad (3\text{-}4\text{-}3)$$

با توجه به این که هر R- مدول G_K- کامل از درجه n یک R- مدول n- انعکاسی نسبت به K است. بنابراین با استفاده از تبصره، 3-4 و قضیه 2-10 پیوند دو مدول توسط مدول‌های G_K- کامل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف 3-5. فرض کنیم $\mathcal{X}_n$ یک زیرکاتگوری R- مدول‌های G_K- کامل از درجه n و $\varphi,\psi \in Epi(\chi_n)$. گوییم دو R-مدول M,N نسبت به χ_n توسط φ,ψ پیوند دارند هر گاه در شرایط زیر صدق کنند:

$$M\ \cong im\varphi, \qquad N \cong im\psi$$

$$\psi \equiv L_K^n(\varphi),\ \varphi \equiv L_K^n(\psi)$$

و می‌نویسیم $M \sim N$.
به عبارت دیگر، M توسط φ پیوند دارد هرگاه $M \cong im\varphi$ و $M \cong imL_K^n\ (L_K^n(\varphi))$ است
باتوجه به تعریف و لم 3-2 و قضیه 2-10 نتیجه می‌شود که، پیوند دو مدول نسبت به χ_n، خاصیت تقارنی دارد.
در لم زیر بعضی از رشته‌های دقیق کوتاه و یکریختی‌هایی که در قضایای اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان و دسته‌بندی می‌کنیم.

لم 3-6. فرض کنیم دو R- مدول M, N نسبت به χ_n توسط φ, ψ پیوند دارند. آنگاه
الف) رشته‌های زیر دقیق هستند.

$$0 \longrightarrow Ext_R^n(M,\ K) \longrightarrow Y \longrightarrow N \longrightarrow 0,\ Y \in \chi_n \quad (3\text{-}6\text{-}1)$$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Ext_R^n(ker\varphi, K) \rightarrow Ext_R^{n+1}(M, K) \longrightarrow 0 \quad (3\text{-}6\text{-}2)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow Ext_R^n(Ext_R^n(N,\ K), K) \rightarrow Ext_R^{n+1}(M, K) \longrightarrow 0 \quad (3\text{-}6\text{-}3)$$

ب- یکریختی‌های زیر صادق هستند. به ازای

$$Ext_R^{i+1}(M, K) \cong Ext_R^i(ker\varphi, K)\quad i > n، \quad (3\text{-}6\text{-}4)$$

$$Ext_R^n(N, K) \cong \ker\varphi \quad (3\text{-}6\text{-}5)$$

و به ازای

$$Ext_R^{i+n}(M, K) \cong Ext_R^{i+n-1}(Ext_R^n(N, K), K),\ i > 1 \quad (3\text{-}6\text{-}6)$$

ت- $R -$ مدول‌های $M,\ N, \ker\varphi$ مدول‌های خالص درجه از درجه n هستند.

برهان. تعریف 3- 5 و تبصره 3-4رشته‌های دقیق 3-6-1 و 3-6-2 ویکریختی 3-6-4را نتیجه می‌دهند و رشته3-6-3 با استفاده از [9، نتیجه3-4] به دست می‌آید.
با در نظر گرفتن لم 3-2، هر R - مدول G_K- کامل از درجه n یک $R -$ مدول n- انعکاسی است، بنابراین یکریختی 3-6- 5 و خالص درجه بودن $M,\ N, \ker\varphi$ نتیجه قضایای 2-10 و 2-8 می‌باشد.
یکریختی 3-6-6 با مقایسه رشته 3-6-3 و یکریختی‌های 3-6-4 و 3-6-5 به دست می‌آید.
قضیه زیر یکی از قضایای اصلی این مقاله است که اکنون مقدمات اثبات آن فراهم شده است.

قضیه 3-7. فرض کنیم حلقه R موضعی و G_K-بعد M متناهی باشد. اگر M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ پیوند داشته باشند، آنگاه

$$Ass_R Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M, K) = \left\{P \in Spec(R) \middle| \begin{matrix} depthN_P = r_M - n, \\ G_{K_P} - dimM_P > n \end{matrix}\right\}$$

برهان. قرار می‌دهیم،

$$A = \left\{P \in Spec(R) \middle| \begin{matrix} depthN_P = r_M - n, \\ G_{K_P} - dimM_P > n \end{matrix}\right\}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم $Ass_R Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M, K) \subseteq A$. برای این هدف، فرض کنیم

$$P \in Ass_R Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M, K)$$

در نتیجه $(Ext_R^{r_M}(M,\ K))_P \neq 0$. بنابراین $G_{K_P} - dimM_P \geq r_M > n$. این نامساوی همراه با خالص درجه[4] بودن $R -$ مدول M نتیجه می‌دهدکه $P \notin Ass(M)$ و $depth_{R_P} M_P > 0$. با استفاده از قضیه 2-4، $depthR_P > r_M$.
در ادامه اثبات قضیه، دو حالت را برای r_M در نظر می‌گیریم. $r_M > n + 1$ یا $r_M = n + 1$.
اول حالت $r_M = n + 1$ را بررسی می‌کنیم.
چون $P \in AssExt_{\mathrm{R}}^{r_M}(M, K)$

[4] Grade Unmixed

$depth_{R_P}(Ext^{n+1}_{\mathrm{R}}(M,K))_P = 0$، ازطرف دیگر با در نظر گرفتن لم 3- 6 و گزاره 2-8، $Ext^n_{\mathrm{R}}(ker\varphi, K)$ یک R- مدول خالص درجه از درجه n است. به علاوه $depthR_P > r_M > n$ پس $P \notin AssExt^n_{\mathrm{R}}(ker\varphi,K)$ در نتیجه $depth_{R_P}(Ext^n_{\mathrm{R}}(ker\varphi,K))_P > 0$.

از رشته 3-6-2 و گزاره 2- 5 نتیجه می‌شود که

$$depthN_P = depth_{R_P}(Ext^{n+1}_{\mathrm{R}}(M,K))_P + 1 = 0 + 1 = 1 = (n+1) - n = r_M - n$$

بنابراین با شرط $r_M = n+1$، $P \in A$.

حال فرض کنیم $r_M > n+1$، با توجه به تعریف $n < i < r_M$ وجود دارد به طوری که $Ext^i_{\mathrm{R}}(M,K) = 0$. بنابراین از رشته 3-3- 1 رشته دقیق کوتاه

$$0\to Ext^{r_M}_{\mathrm{R}}(M,K) \to Tr_K\Omega^{r_M-1}M \to \Omega Tr_K \Omega^{r_M} M \to 0 \qquad (3\text{-}7\text{-}1)$$

به دست می‌آید و در نتیجه $M \in AssTr_K\Omega^{r_M-1}$ و $depth_{R_P}(Tr_K\Omega^{r_M-1}M)_P = 0$. حال با توجه به یکریختی 3-3-3،

$$depth_{R_P}(Tr_K\Omega^n M)_P = r_M - 1 - n + depth_{R_P}(Tr_K\Omega^{r_M-1}M)_P = r_M-1-n$$

بنابراین تساوی

$$depth_{R_P}(\Omega Tr_K\Omega^n M)_P = r_M - n \qquad (3\text{-}7\text{-}2)$$

حاصل می‌شود. ازطرف دیگر طبق نامساوی3-3-2، $G_K - dimTr_K\Omega^{n-1}M \le n$ و در نتیجه $(G_K - dimTr_K\Omega^{n-1}M)_P \le n$. حال از قضیه 2-4 نامساوی

$$depth_{R_P}(Tr_K\Omega^{n-1}M)_P = depthR_P - (G_K - dimTr_K\Omega^{n-1}M)_P \ge depthR_P - n > r_M - n \qquad (3\text{-}7\text{-}3)$$

نتیجه می‌شود. دوباره با استفاده از رشته 3-3-1 و تعریف $gradeM = n > 0$ رشته‌های دقیق

$$0\to Ext^n_{\mathrm{R}}(M,K) \to Tr_K\Omega^{n-1}_K M \to \Omega Tr_K\Omega^n_K M \to 0 \qquad (3\text{-}7\text{-}4)$$

و

$$0 \to \Omega Tr_K \Omega^n_K M \to Hom(P_n, K) \to Tr_K\Omega^n_K M \to 0 \qquad (3\text{-}7\text{-}5)$$

به‌دست می‌آید. از رشته دقیق3-7-4 و تساوی 3-7-2 و نامساوی 3-7-3 و گزاره 2-5 نتیجه می‌شود که

$$depth_{R_P}(Ext^n_R(M,K))_P = depth_{R_P}(\Omega Tr_K\Omega^n_K M)_P + 1 = r_M - n + 1 \qquad (3\text{-}7\text{-}6)$$

چون $r_M > n+1$ است پس $Ext^{n+1}_{\mathrm{R}}(M,K) = 0$ و با به کارگیری رشته دقیق 3-6-3 و رشته دقیق 3-6-5 یکریختی

$$N \cong Ext^n_{\mathrm{R}}(Ext^n_{\mathrm{R}}(N,K),K) \cong (ker\varphi, K) \qquad (3\text{-}7\text{-}7)$$

را داریم. از طرف دیگر با فرض $r_M > n+1$ و با توجه به رشته دقیق کوتاه 3-6-4 تساوی زیر به دست می‌آید،

$$r_M - 1 = r_{ker\varphi} \qquad (3\text{-}7\text{-}8)$$

با جایگزین کردن M با $ker\varphi$ در 3-7-6 و با استفاده از 3-7-8 داریم:

$$depth_{R_P}(Ext^n_R(\ker\varphi,K))_P = depth_{R_P}N_P = (r_M-1)-n+1 = r_M - n$$

بنابراین $P\in A$.

حال عکس شمول را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $P \in A$. بنابراین طبق فرض و تعریف r_M نامساوی $G_{K_P} - dimM_P \ge r_M$ را داریم. به علاوه چون M خالص درجه از درجه n است،

$depth_{R_P} M_P \neq 0$ ازقضیه2-4، $depthR_P > r_M$ نتیجه می‌شود. از طرف دیگر $grade(ker\varphi) = n > 0$ و با توجه به 3-3-2،

$G_K - dimTr_K\Omega^{n-1}ker\varphi \leq n$

و در نتیجه

$$depth_{R_P}(Tr_K\Omega^{n-1}ker\varphi)_P > r_M - n \quad (3\text{-}7\text{-}9)$$

اثبات قضیه را در دو حالت ادامه می‌دهیم.

اگر $r_M = n + 1$، طبق فرض $depth_{R_P}N_P = 1$ و $depthR_P > n + 1$. قرار می‌دهیم، $\bar{P} = \frac{P}{I}$ و $I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$، با توجه به تبصره 2-13، $depthS_{\bar{P}} > 1$. از طرفی با استفاده از [15، 1-4-19] نامساوی (3-7-10)

$$depth_{S_{\bar{P}}}(Hom_S(Hom_S(N,\bar{K}),\bar{K}))_{\bar{P}} \geq min\{2,\ depthS_{\bar{P}}\} = 2$$

و با به کارگیری رشته 3-6-3 نامساوی

$$depth_{S_{\bar{P}}}N_{\bar{P}} \geq \min\{depth_{S_{\bar{P}}}(Hom_S(Hom_S(N,\bar{K}),\bar{K}))_{\bar{P}},\ depth_{S_{\bar{P}}}(Ext^1_S(M,\bar{K}))_{\bar{P}} + 1\}$$

به دست می‌آید. این نامساوی همراه با نامساوی نتیجه می‌دهد،

$$depth_{S_{\bar{P}}}(Ext^1_S(M,\bar{K}))_{\bar{P}} = 0\,. \quad (3\text{-}7\text{-}10)$$

بنابراین $\bar{P} \in Ass_S Ext^1_S(M,\bar{K})$ و با توجه [12، قضیه 2- 5] $P \in Ass_R Ext^{n+1}_R(M,K)$. حکم در این حالت ثابت می‌شود.

اثبات را با شرط $r_M > n + 1$ ادامه می‌دهیم. با توجه به‌فرض و رشته دقیق3-6-2 تساوی

$$depth_{R_P}N_P = depth_{R_P}(Ext^n_R(\ker\varphi,K))_P = r_M - n \quad (3\text{-}7\text{-}11)$$

صادق است. با استفاده از رشته 3-3-1 و $grade \ker\varphi = n$ رشته دقیق

$$0\longrightarrow Ext^n_{\mathrm{R}}(ker\varphi,K) \rightarrow Tr_K\Omega^{n-1}ker\varphi \longrightarrow \Omega Tr_K\Omega^n ker\varphi \longrightarrow 0 \quad (3\text{-}7\text{-}12)$$

و سپس با به کارگیری [15، گزاره 1-2-9] نامساوی

$$depth_{R_P}(Ext^n_R(\ker\varphi,K))_P \geq \min\{depth_{R_P}\left(Tr_K\Omega^{n-1}ker\varphi\right)_P,\ depth_{R_P}(\Omega Tr_K\Omega^n ker\varphi)_P + 1\},$$

به دست می‌آید. این نامساوی همراه با نامساوی 3-7-9 و تساوی 3-7-11 و گزاره 2-5 تساوی

$$depth_{R_P}(Ext^n_R(\ker\varphi,K))_P = depth_{R_P}(\Omega Tr_K\Omega^n ker\varphi)_P + 1 = r_M - n$$

را نتیجه می‌دهد. بنابراین

$$depth_{R_P}(Tr_K\Omega^n ker\varphi)_P = r_M - n - 2 \quad (3\text{-}7\text{-}13)$$

از طرف دیگر با در نظر گرفتن (3-7-8) و تساوی 3-3-3، یکریختی زیر را داریم،

$$Tr_K\Omega^n ker\varphi \cong \Omega^{r_M-n-2}Tr_K\Omega^{r_M-2}ker\varphi$$

این یکریختی همراه با تساوی 3-7-13 نتیجه می‌دهد که:

$$depth_{R_P}\left(Tr_K\Omega_K^{r_M-\ 2}ker\varphi\right)_P = 0 \quad (3\text{-}7\text{-}14)$$

دوباره با به کارگیری تساوی 3-7-8 و رشته 3-3-1 رشته دقیق

$$0\rightarrow Ext^{r_M-1}_{\mathrm{R}}(ker\varphi,K) \rightarrow Tr_K\Omega^{r_M-2}ker\varphi \rightarrow \Omega Tr_K\Omega^{r_M-1}ker\varphi \rightarrow 0 \quad (3\text{-}7\text{-}15)$$

بدست می‌آید. حال استفاده از رشته 3-7-12 و [15، گزاره 1-2-9] و با توجه به این که $(\Omega Tr_K\Omega^{r_M-1}ker\varphi)_P$ یک R_P- مدول سی زی جی است و $depthR_P > r_M$ تساوی $depth_{R_P}(Ext^{r_M-1}_R(\ker\varphi,K))_P = 0$ به دست می‌آید. بنابراین $P \in AssExt^{r_M-1}_{\mathrm{R}}(ker\varphi,K)$.

نتیجه با استفاده از 3-6-4 به دست می‌آید.

تعریف 3-8. به ازای یک عدد صحیح t، یک R-مدول N در شرط $\tilde{S}_t$ صدق می‌کند هر گاه به ازای هر $P \in Spec(R)$،

$$depth_{R_P} N_P \geq min\{t, depthR_P\}.$$

قضیه3-9. فرض کنیم R- مدول‌های M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ پیوند دارند. به علاوه فرض کنیم عدد صحیح $t > n + 1$ وجود دارد که $r_M \geq t$. آنگاه با قراردادن $I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $S = \frac{R}{I}$، N به عنوان S- مدول در شرط $\tilde{S}_{t-n}$ صدق می‌کند.

برهان. با استفاده از فرض مسئله و تعریف r_M، برای هر $n < j < t$، $Ext^j_{\mathrm{R}}(M, K) = 0$. با در نظر گرفتن رشته دقیق 3-6-3،

$$N \cong Ext^n_{\mathrm{R}}(Ext^n_{\mathrm{R}}(N, K), K)$$

(3-9-1)از طرف دیگر با استفاده از 3-6-6، برای هر $2 \leq i \leq t - n - 1$ داریم،

$$Ext^{i+n}_{\mathrm{R}}(M, K) \cong Ext^{i+n-1}_{\mathrm{R}}(Ext^n_{\mathrm{R}}(N, K), K) = 0$$

در نتیجه به عنوان S- مدول داریم

$$Ext^i_{\mathrm{S}}(M, \overline{K}) \cong Ext^{i-1}_{\mathrm{S}}(Hom_S(N, \overline{K}), \overline{K}) = 0$$

با توجه به تعریف $Tr_{\overline{K}}M$، برای هر $2 \leq i \leq t - n - 1$،

$$Ext^i_{\mathrm{S}}(M, \overline{K}) \cong Ext^{i+1}_{\mathrm{S}}(Tr_{\overline{K}}M, \overline{K}) = 0$$

به عبارت دیگر، به ازای $3 \leq j \leq t - n$،

$$Ext^j_{\mathrm{S}}(Tr_{\overline{K}}N, \overline{K}) = 0 \qquad (3\text{-}9\text{-}2)$$

از طرفی با در نظر گرفتن 3-9-1، N و $Hom_S(Hom_S(N, \overline{K}), \overline{K})$ به عنوان S- مدول یکریخت هستند. این شرط و رشته دقیق 2-3-2، نتیجه می‌دهد، برای هر $j = 1,2$، $Ext^j_{\mathrm{S}}(Tr_{\overline{K}}N, \overline{K}) = 0$ و در نهایت برای هر $1 \leq j \leq t - n$، $Ext^j_{\mathrm{S}}(Tr_{\overline{K}}N, \overline{K}) = 0$. با به کارگیری قضیه 2-6، به ازای هر ایده‌آل اول P، $depth_{S_P} N_P \geq \{t - n, depthS_P\}$ و حکم به دست می‌آید.

قضیه 3-10. فرض کنیم R- مدول‌های M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ پیوند دارند.
اگر $G_K - \dim N < \infty$ و به علاوه به ازای یک عدد صحیح t، R- مدول N در شرط $\tilde{S}_{t-n}$ صدق کند. آنگاه $r_M \geq t$.

برهان. طبق فرض، برای هر $P \in Spec(R)$ نامساوی $\min\{t - n, depth\, S_P\} \leq depth_{R_P}\, N_P$ را داریم. با به کار گیری از 2-6، برای هر $1 \leq i \leq t - n$، $Ext^i_S(Tr_{\overline{K}}N, \overline{K}) = 0$ است. به عبارت دیگر برای هر $3 \leq i \leq t - n$، $Ext^i_S(Tr_{\overline{K}}N, \overline{K}) = 0$ و $N \cong Hom_s(Hom_s(N, \overline{K}), \overline{K})$ از رشته‌های دقیق 3-6- 6 و 3-6-3 نتیجه می‌شود که برای هر، $n < i < t$ $Ext^i_R(M, K) = 0,$ و به این تر تیب حکم قضیه بدست می‌آید.
نتیجه زیر تعمیمی از [5، قضیه 4-13] است.

نتیجه 3-11. فرض کنیم R-مدول‌های M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ پیوند دارند.اگر G_K- بعد M متناهی باشد و $n + 1 < r_M$ آنگاه

$$r_M = \min\{depth\, N_P + n | P \in Spec(R), G_{K_P} - \dim M_P > n\}$$

برهان. با استفاده از قضیه3-9 ،

$$depth\, N_P \geq \min\{r_M - n, depth\, R_P - n\}$$

به عبارتی دیگر

$$depth\, N_P + n \geq \min\{r_M, depth\, R_P\}.$$

به علاوه برای هر $P \in Spec(R)$ که $G_{K_P} - \dim M_P > n$ با توجه به تعریف درجه کاهشی و قضیه 2-4 نتیجه می‌گیریم که $depth\, R_P \geq G_{K_P} - \dim M_P \geq r_M$. چون M یک مدول خالص درجه از درجه n است پس $depth R_P > r_M$. لذا $depth\, N_P + n \geq r_M$. با استفاده از قضیه 3-7 حکم به دست می‌آید.

قضیه3-12: [17، قضیه12-1-20]. فرض کنیم (R, m) حلقه موضعی و کوهن- مکالی از بعد d با مدول دوگانی ω_R باشد.
آنگاه برای هر R- مدول با تولید متناهی M و هر عدد صحیح i یکریختی طبیعی زیر وجود دارد.

$$H_m^i(M) \cong Hom_R\left(Ext_{\mathrm{R}}^{d-i}(M, \omega_R), E\right)$$

که $E = E(\frac{R}{m})$ پوشش انژکتیو $\frac{R}{m}$ است.

تعریف 3-13. فرض کنیم t یک عدد صحیح مثبت باشد. اگر مدول‌های $N_0 = M, N_1, \ldots, N_{t-1}$، $N_t = N$ وجود داشته با شند به طوری که، به ازای هر $0 \leq i \leq t-1$، N_i و N_{i+1} نسبت به χ_n پیوند داشته باشند، در این صورت می‌گوییم M و N در t مرحله با هم پیوند دارند و اگر t عدد زوج باشد می‌گوییم M و N به صورت زوج پیوند دارند.
قضیه زیر در [9] با برهانی متفاوت ثابت شده است.

قضیه3-14. فرض کنیم (R, m) حلقه موضعی و کوهن- مکالی از بعد d با مدول دوگانی ω_R باشد و M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ به صورت زوج پیوند داشته باشند. آنگاه به ازای $i \neq d-n$،

$$H_m^i(N) = H_m^i(M).$$

برهان. قرار می‌دهیم $K = \omega_R$ و $E = E\left(\frac{R}{m}\right)$ با استفاده از رشته 3-6-3 و اثر فانکتور رشته دقیق $Hom(-, E)$.

$$0 \longrightarrow Hom\left(Ext_{\mathrm{R}}^{n+1}(N, \omega_R), E\right) \longrightarrow Hom(Ext_{\mathrm{R}}^n(Ext_{\mathrm{R}}^n(M, \omega_R), \omega_R), E) \longrightarrow Hom(M, E) \longrightarrow 0$$

و با استفاده از قضیه 3-12 رشته دقیق

$$0 \longrightarrow H_m^{d-n-1}(N) \longrightarrow H_m^{d-n}\left(Ext_{\mathrm{R}}^n(M, \omega_R)\right) \longrightarrow Hom(M, E) \longrightarrow 0 \qquad (3\text{-}14\text{-}1)$$

بدست می‌آید. از طرف دیگر طبق فرض، R حلقه کوهن-مکالی است لذا اعضاء $\mathcal{X}_n$، R- مدول‌های کوهن-مکالی از درجه n هستند.
بنابراین به ازای هر Y در $\mathcal{X}_n$ داریم،

$$depthY = dimY = dimR - n = d - n$$

به علاوه با استفاده [15، قضیه 3-5-7]، به ازای $Y \in \chi_n$ و $i \neq d-n$،

$$H_m^i(Y) = 0 \qquad (3\text{-}14\text{-}2)$$

فانکتور $\Gamma_m(\ )$ را روی رشته 3-6- 1 اثر می‌دهیم، رشته دقیق طولانی

$$\cdots \longrightarrow H_m^i\left(Ext_{\mathrm{R}}^n(M, \omega_R)\right) \longrightarrow H_m^i(Y) \longrightarrow H_m^i(N) \longrightarrow \cdots \qquad (3\text{-}14\text{-}3)$$

به دست می‌آید. چون M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ پیوند دارند با استفاده از گزاره 2-8، $gradeExt_{\mathrm{R}}^n(M, \omega_R) = n$ و بنابراین $dimExt_{\mathrm{R}}^n(M, \omega_R) = d - n$ است.
دوباره با استفاده از[15، قضیه 3-5-7]، برای هر $i > d-n$ ،

$$H_m^i\left(Ext_{\mathrm{R}}^n(M, \omega_R)\right) = H_m^i(N) = 0 \qquad (3\text{-}14\text{-}4)$$

با در نظر گرفتن 3-14-3 و 3-14-2، برای هر $i < d-n$ یکریختی (3 -14- 5)

$$H_m^{i-1}(N) \cong H_m^i\left(Ext_{\mathrm{R}}^n(M, \omega_R)\right)$$

و در نتیجه رشته دقیق (3-14-6)

$0 \longrightarrow H_m^{d-n-1}(N)$
$\longrightarrow H_m^{d-n}\left(Ext_{\mathrm{R}}^n(M,\omega_R)\right) \longrightarrow H_m^{d-n}(Y)$
$\longrightarrow H_m^{d-n}(N) \longrightarrow 0$

را داریم. طبق فرض قضیه M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ به طور زوج با هم پیوند دارند.
بنابراین فرض می‌کنیم، R- مدول N' وجود دارد به طوری که $M\sim N'\sim N$. به علاوه پیوند خاصیت تقارنی دارد. با استفاده از 3-14-5، به ازای $i < d-n$، داریم:

$H_m^{i-1}(N) \cong H_m^i\left(Ext_{\mathrm{R}}^n(N',\omega_R)\right)$
$H_m^{i-1}(M) \cong H_m^i\left(Ext_{\mathrm{R}}^n(N',\omega_R)\right)$

با در نظر گرفتن 3-14-4 برای هر $i > d-n$، $H_m^i(N) = H_m^i(M) = 0$. با توجه به 3-14-1، رشته‌های دقیق زیر را داریم:

$0 \longrightarrow H_m^{d-n-1}(M)$
$\longrightarrow H_m^{d-n}\left(Ext_{\mathrm{R}}^n(N',\omega_R)\right) \longrightarrow$
$Hom(N',E) \longrightarrow 0$ (3-14-7)
$0 \longrightarrow H_m^{d-n-1}(N)$
$\longrightarrow H_m^{d-n}\left(Ext_{\mathrm{R}}^n(N',\omega_R)\right)$
$\longrightarrow Hom(N',E) \longrightarrow 0$ (3-14-8)

با مقایسه دو رشته 3-14-7 و 3-14-8 داریم،
$H_m^{d-n-1}(M) \cong H_m^{d-n-1}(N)$

و حکم ثابت می‌شود.

تعریف3-15. فرض کنیم (R,m) حلقه موضعی و M یک R- مدول است، بعد همولوژیکی M نسبت به m به صورت زیر تعریف می‌شود:
$cd_m(M) = \max\{j < dimM | H_m^j(M) \neq 0\}$

$\mathrm{K} = \omega_{\mathrm{R}}$ را مدول دوگانی حلقه R قرار می‌دهیم. با استفاده از تعریف بدیهی است اگر M یک R- مدول G_{ω_R}- کامل باشد آنگاه $r_M = +\infty$ و $cd_m M = -\infty$ است و اگر M یک R- مدول G_{ω_R}- کامل کاهشی باشد، $cd_m(M) = depthM$ و $r_M = G_K - dimM$ است.
در حالت کلی وقتی R حلقه کوهن-مکالی باشد و $r_M < \infty$ آنگاه $cd_m(M) + r_M = dimR$.

تبصره 3-16. یک R- مدول T را ثانویه می‌نامیم اگر برای هر $r \in R$، نگاشت $T \xrightarrow{r} T$ پوشا یا پوچ توان باشد. به علاوه T را P ثانویه می‌گوییم اگر $P=\sqrt{0:_R T}$. هر مدول آرتینی T را می‌توان به شکل $T = T_1 + \cdots + T_n$ نوشت که T_iها همه P_i- ثانویه و P_iها ایده‌آل‌های اول متمایز هستند. مجموعه همه این ایده‌آل‌های اول را به صورت $Att_R(T)$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه3-17. فرض کنیم (R,m) حلقه موضعی و کوهن- مکالی با مدول دوگانی ω_{R} و $\dim R = d$، به علاوه فرض کنیم M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ پیوند داشته باشند و $r_M < \infty$. آنگاه
$AttH_m^{cd_m(M)}(M) =$
$\{P \in spec(R) | depthN_P = dimM - cd_m(M), G_{\omega_P} - dimM_P > n\}$

برهان. با استفاده از قضیه 3-11 داریم
$H_m^{cd_m(M)}(M) \cong$
$Hom\left(Ext_{\mathrm{R}}^{d-cd_m(M)}(M,\omega_R),E\right) \cong$
$Hom\left(Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,\omega_R),E\right)$

با در نظر گرفتن [17، تمرین7-2-10] و قضیه 3-7 حکم ثابت می‌شود.

گزاره 3-18. فرض کنیم M یک R- مدول G- کامل کاهشی است. آنگاه
$gradeExt_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K) \geq r_M + 1$

برهان. با توجه به [18، نتیجه 30] همواره $gradeExt_{\mathrm{R}}^i(M,K) \geq i$.

برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم $gradeExt_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K) \neq r_M$. فرض کنیم $gradeExt_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K) = r_M$ در این صورت با استفاده از [15، گزاره 1-2-10] $P \in suppExt_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K)$ وجود دارد به طوری که $depthR_P = gradeExt_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K) = r_M$.
از طرف دیگر $Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K) \neq 0$.
بنابراین $G_{K_P} - dimM_P \geq r_M$. گزاره 2-4 نتیجه می‌دهد که $depthM_P = 0$ و $P \in AssM$. این با خالص درجه بودن M از درجه n در تناقض است، لذا حکم ثابت می‌شود.

قضیه زیر تعمیم [6، لم 2-1] است.

قضیه 3-19. فرض کنیم M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ پیوند داشته باشند و M یک R- مدول G_K- کامل کاهشی باشد. آنگاه برای هر $i \neq 0$،

$$Ext_{\mathrm{R}}^{i+n}(N,K) \cong Ext_{\mathrm{R}}^{r_M+i}\left(Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K),K\right)$$

برهان. طبق فرض قضیه، M یک R- مدول G_K- کامل کاهشی است پس $G_K - dimM = r_M$. بنابراین $G_K - dim\Omega^{r_M}M = 0$ و در نتیجه (3-19-1) $G_K - dimTr_K\Omega^{r_M}M = 0$ و $G_K - dim\Omega Tr_K\Omega^{r_M}M = 0$ قضیه را در دو حالت ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض کنیم $r_M > n + 1$. با توجه به این فرض و رشته 3-3-1، رشته دقیق زیر به دست می‌آید.

$$0\longrightarrow Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(\mathrm{M},K) \longrightarrow Tr_K\Omega^{r_M-1}M\longrightarrow \Omega Tr_K\Omega^{r_M}M\longrightarrow 0 \qquad (3\text{-}19\text{-}2)$$

با استفاده از تساوی 3-19- 1 و رشته 3-19-2 به ازای $i > 0$، نتیجه می‌شود که

$$Ext_{\mathrm{R}}^{i}\left(Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K),K\right) \cong Ext_{\mathrm{R}}^{i}(Tr_K\Omega^{r_M-1}M,K) \qquad (3\text{-}19\text{-}3)$$

از طرفی دیگر با به کارگیری 3-3-2، به ازای $i > n$،

$$Ext_{\mathrm{R}}^{i}(Tr_K\Omega^{n-1}M,K)=0 \qquad (3\text{-}19\text{-}4)$$

و با در نظر گرفتن رشته3-3-1 رشته‌های دقیق

$$0 \longrightarrow Ext_{\mathrm{R}}^{n}(M,K) \longrightarrow Tr_K\Omega^{n-1}M \longrightarrow \Omega Tr_K\Omega^{n}M\longrightarrow 0 \qquad (3\text{-}19\text{-}5)$$

$$0 \longrightarrow \Omega Tr_K\Omega^{n}M \longrightarrow Hom(P,K) \longrightarrow Tr_K\Omega^{n}M \longrightarrow 0 \qquad (3\text{-}19\text{-}6)$$

و با توجه 3 -19-4 و 1-5، به ازای $i > n$، یکریختی

$$Ext_{\mathrm{R}}^{i}(Ext_{\mathrm{R}}^{n}(M,K),K) \cong Ext_{\mathrm{R}}^{i+1}(\Omega Tr_K\Omega^{n}M,K)$$

به دست می‌آید. به علاوه با استفاده از رشته 3-19-6 و یکریختی 3-3-3، به ازای $i > n$ یکریختی زیر حاصل می‌شود،

$$\begin{aligned} Ext_{\mathrm{R}}^{i}(Ext_{\mathrm{R}}^{n}(M,K),K) &\cong \\ Ext_{\mathrm{R}}^{i+2}(\Omega^{r_M-1-n}Tr_K\Omega^{r_M-1}M,K) &\cong \\ Ext_{\mathrm{R}}^{r_M-1-n+i+2}(Tr_K\Omega^{r_M-1}M,K) &\cong \\ Ext_{\mathrm{R}}^{r_M-n+i+1}\left(Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K),K\right) \end{aligned}$$

یکریختی آخر حاصل یکریختی 3-19-3 است. بنابراین به ازای $j > 0$، یکریختی (3-19-7)

$$Ext_{\mathrm{R}}^{j+n}(Ext_{\mathrm{R}}^{n}(M,K),K) \cong Ext_{\mathrm{R}}^{r_M+j+1}\left(Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K),K\right)$$

را داریم. با در نظر گرفتن رشته دقیق 3-6-6، به ازای $i > n$.

$$Ext_{\mathrm{R}}^{i+1}(N,K) \cong Ext_{\mathrm{R}}^{i}(Ext_{\mathrm{R}}^{n}(M,K),K)$$

این یکریختی همراه با یکریختی 3-19- 7 نتیجه می‌دهد که، به ازای $i \geq 2$،

$$Ext_{\mathrm{R}}^{r_M+i}\left(Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K),K\right) \cong Ext_{\mathrm{R}}^{n+i}(N,K)$$

بنابراین، برای اثبات حالت اول کافی است که حکم قضیه را به ازای i=1 و $r_M > n + 1$ نشان دهیم. با

توجه به فرض از یکریختی3-19-3 و تعریف r_M و یکریختی 3-3-3

$$Ext_{\mathrm{R}}^{r_M+1}\left(Ext_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K),K\right) \cong Ext_{\mathrm{R}}^{r_M+1}(Tr_K\Omega^{r_M-1}M,K) \cong Ext_{\mathrm{R}}^{2+n}(Tr_K\Omega^n \mathrm{M},K) \qquad (3\text{-}19\text{-}8)$$

نتیجه می‌شود. با استفاده از [12، گزاره 3-4] رشته دقیق (3-19-9)

$$0 \longrightarrow Ext_R^{n+1}(Tr_K\Omega^n M,K) \longrightarrow M \rightarrow Ext_R^n(Ext_R^n(M,K),K) \longrightarrow Ext_R^{n+2}(Tr_K\Omega^n M,K) \longrightarrow 0$$

را داریم. از طرف دیگر باتوجه به لم 2-12، $Ext_R^{n+1}(Tr_K\Omega^n M,K) = 0$.

با مقایسه رشته‌های دقیق 3-6-3 و 3-19-9 این $Ext_R^{n+2}(Tr_K\Omega^n M,K) \cong Ext_R^{n+1}(N,K)$ حقیقت همراه با3-19-8 حکم را ثابت می‌کند.

برهان را برای حالت $r_M = n+1$ ادامه می‌دهیم. در این حالت $G_K - dimM = r_M = n+1$. بدیهی است با در نظر گرفتن تعریف درجه کاهشی و درجه مدول، $Ext_R^i(M,K) = 0$ هرگاه $i \neq n+1$ بنابر این با توجه به یکریختی 3-6-3، به ازای $i \neq n$، $Ext_R^j(Ext_R^n(N,K),K) = 0,\ j > n$. لذا $G_K - \dim Ext_R^n(N,K) \le n$. این حقیقت همراه با [9، گزاره 2-7] و قضیه 3-2 نتیجه می‌دهد $Ext_R^n(N,K)$ و $Ext_R^n(Ext_R^n(N,K),K)$، R - مدول‌های G_K- کامل از درجه n هستند. از طرف دیگر، با توجه به 3- 18،

$$gradeExt_R^{n+1}(M,K) \ge n+2\,.$$

با در نظر گرفتن این نامساوی و اثر فانکتور $Ext_{\mathrm{R}}^i(-,K)$ روی رشته دقیق کوتاه 3-6-3، به ازای $i \ge 1$، یکریختی

$$Ext_R^{n+i}(N,K) \cong Ext_R^{n+i+1}\left(Ext_R^{n+1}(M,K),K\right)$$

و در نتیجه به ازای $i \ge 1$،

$$Ext_R^{n+i}(N,K) \cong Ext_R^{r_M+i}\left(Ext_R^{r_M}(M,K),K\right)$$

بدست می‌آید. به علاوه با به کارگیری تعریف درجه مدول حکم قضیه به ازای $i < 0$ صادق است. و حکم ثابت می‌شود.

نتیجه3-20. فرض کنیم M یک R- مدول G_K- کامل کاهشی و M و N نسبت به $\mathcal{X}_n$ پیوند داشته باشند. آنگاه گزاره‌های زیر صادق هستند.

الف)
$$G_K - dimExt_R^{r_M}(M,K) = G_K - dimN + r_M \quad - n$$
$$gradeExt_R^{r_M}(M,K) = r_N - n + r_M$$

ب) به‌علاوه اگر $Ext_R^{r_M}(M,K)$ یک R-مدول G_K- کامل باشد، آنگاه R- مدول N یک G_K- کامل کاهشی است و $Ext_R^{r_N}(N,K)$ یک R- مدول G_K- کامل است.

برهان. الف) با توجه به گزاره 3-18،

$$gradeExt_{\mathrm{R}}^{r_M}(M,K) \ge r_M + 1$$

بنابراین، برای هر $j \le r_M$، (3-20-1)

$$Ext_R^j\left(Ext_R^{r_M}(M,K),K\right) = 0.$$

از طرف دیگر، طبق تعریف برای هر

$$Ext_R^i(N,K) = 0,\ n < i < r_N$$

بنابراین با استفاده از قضیه 3-19،

$$Ext_R^{r_N}(N,K) \cong Ext_R^{(r_N-n)+n}(N,K) \cong Ext_R^{r_N-n+r_M}\left(Ext_R^{r_M}(M,K),K\right) \neq 0 \qquad (3\text{-}20\text{-}2)$$

و برای $r_M < j < r_M + r_N - n$،

$$Ext_R^j\left(Ext_R^{r_M}(M,K),K\right) \cong Ext_R^{j-r_M+r_M}\left(Ext_R^{r_M}(M,K),K\right) \cong Ext_R^{j-r_M+n}(N,K) = 0 \qquad (3\text{-}20\text{-}3)$$

نتیجه می‌شود. با توجه به تساوی 3-20-1 و یکریختی‌های 3-20-2و 3-20-3، استنتاج می‌کنیم، $gradeExt_R^{r_M}(M,K) = r_N - n + r_M$ دومین تساوی در گزاره الف به همین ترتیب و دوباره با استفاده ازقضیه 3-19 ثابت می‌شود.

ب) طبق فرض $Ext_R^{r_M}(M,K)$ یک R- مدول G_K- کامل است، بنابراین $G_K - dimN = r_N$، در نتیجه N یک R- مدول G_K- کامل کاهشی است. با توجه به این که، پیوند دو مدول خاصیت تقارنی دارد. باتوجه به (الف) $Ext_R^{r_N}(N,K)$ یک R- مدول G_K- کامل است.

تقدیر و تشکر: بر خود لازم می‌دانم از پروفسور محمد تقی دیبایی بخاطر مباحث مربوط به پیوند مدول‌ها در هنگامی که در موسسه ریاضیات دوره فرصت مطالعاتی را می گذرانده ام، سپاسگزاری کنم. همچنین از دکتر آرش صادقی که نوشته اولیه این مقاله را با دقت مطالعه و پیشنهادها و نظرات با ارزشی داده اند، تشکر می‌کنم. از داوران محترم بابت نکات مفیدی که در راستای ارتقای مقاله حاضر پیشنهاد داده‌اند، قدر دانی می‌کنم.

فهرست منابع

[1]. C. Peskine and L. Szpiro, Liasion des varieties algebriques. Inventiones Mathematicae. 26 (1974), 271-302.

[2]. Y. Yoshino and S. Isogawa, Linkage of Cohen- Macaulay modules over a Gorenstein ring, Journal of Pure and Applied Algebra. 149 (2000), 305-318.

[3]. A. Martsinkovsky and J. R. Strooker. Linkage of modules, Journal of Algebra 271 (2004) 578-620.

[4]. U. Nagel. Liaison Classes of modules, Journal of Algebra 284 (2005), 236-272.

[5]. M. T. Dibaei, A. Sadeghi. Linkage of modules and the serre conditions, Journal of pure and Applied Algebra 219 (2015) 4458-4478.

[6]. M. T. Dibaei, A. Sadeghi. Linkage of finite Gorenstein dimension modules, Journal of Agebra. 376(2013).261-278.

[7]. A. Sadeghi, Linkage of finite G_C-dimension modules. Journal of Pure and Applied Algebra. 221 (2017) 1344-1365.

[8]. A. Sadeghi, Notes on Linkage of modules, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2019) 62, 1045-1062.

[9]. F. Dehghani-Zadeh, M. T. Dibaei, A. Sadeghi, Linkage of modules by reflexive morphisms, Journal of the Mathamatical society of Japan, accept.

[10]. M. Auslander and M. Bridger. Stable module theory. Mem of the AMS 94. Math. Soc., providence 1969.

[11]. V. Masiek, Gorenstein dimension and torsion of modules over commutative noetherian rings, Communications in Algebra. 28 (2018), 5783-5812.

[12]. H. B. Foxby, Gorenstein moudules and related modules, Mathematica Scandinavica. 31 (1972) 267-285.

[13]. E. S. Golod, G-dimension and generalized perfect ideals, Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni V. A. Steklova. 165 (1984), 62-66.

[14]. A. A. Gerko, on homological dimensions (Russian) Mat. Sb. 192 (2001), no 8, 79-94; Transation in sb. Math. 192 (2001), no 7-8, 1165-1179.

[15]. W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay Rings. Cambridge studies in Advanced Mathematics, 39. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[16]. H. Matsumura. Commutative algebra. Second Edition. Benjamin. 1980.

[17]. M. P. Brodmann and R. Y. sharp. Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications. Cambridge studies in advanced Mathematics. 60, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[18]. H. Matsumura. Commutative ring theory. Cambridge University Press. 1986.