دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند 1400
شماره شاپا: 588-2588X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک مدل راسل توسعه یافته برای اندازه‌گیری کارایی تجمیعی سیستم‌های تولید چند دوره‌ای

محمد نجاری الموتی[1]، محسن خون سیاوش[2*]، رضا کاظمی متین[3]، زهره مقدس[2]

[1] دانشجویی دکتری ریاضی کاربردی، گروه ریاضی، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران
[2] استادیار، گروه ریاضی، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران
[3] دانشیار، گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/04/12 تاریخ پذیرش مقاله: 1400/06/16

ارزیابی عملکرد سیستم‌های تولید با در نظر گرفتن داده‌های مربوط به دوره‌های زمانی مختلف یکی از مهمترین مسائل نظریه تولید است. در این مقاله یک روش جدید برای اندازه گیری کارایی تجمیعی سیستم‌های تولید چند دوره‌ای با استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌ها ارائه می‌شود. رویکرد ارائه شده را می‌توان به عنوان توسعه‌ای از روش‌های شعاعی در ادبیات در نظر گرفت. یک مدل مبتنی بر راسل توسعه یافته برای اولین بار برای اندازه‌گیری کارایی تجمیعی با در نظر گرفتن بازه‌های زمانی مراحل تولید ارائه می‌شود. یکی از ویژگی‌های مفید مدل پیشنهادی این است که ناکارایی رویکرد تجمیعی موجود در یک مرحله بدون نیاز به در نظر گرفتن مرحله دوم برای بهینه سازی متغیرهای کمکی، قابل تشخیص است. ویژگی‌ها و مزایای مدل جدید بحث می‌شوند. در پایان، برای نشان دادن قابلیت اجرای رویکرد جدید، دو مثال کاربردی بررسی و تحلیل می‌شوند. نتایج، عملکرد خوب روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

واژه‌ی کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، اندازه راسل، واحدهای تصمیم گیرنده، تولید چند دوره‌ای.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: mfsiavash@gmail.com

1- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها[2] یک روش ناپارامتری برای اندازه‌گیری عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری[3] است که چندین ورودی را برای تولید چند خروجی استفاده می‌کند. در روش تحلیل پوششی داده‌ها مدل‌های پایه‌ای، مدل‌های CCR [1] و BCC [2] هستند که به ترتیب دارای بازده به مقیاس ثابت و متغیر هستند. امروزه تحلیل پوششی داده‌ها در حوزه‌های مختلف مانند بانکداری [3]، آموزش [4]، سلامت [5]، بیمارستان‌ها [6]، انرژی [7]، بورس [8]، شرکت نفت [9]، گردشگری [10]، هتلداری [11] و غیره برای ارزیابی عملکرد و بهبود کارایی و رتبه بندی مورد استفاده قرار می‌گیرد و کاربرد مؤثری دارد.

در مدل‌های مرسوم تحلیل پوششی داده‌ها کارایی شرکت‌ها فقط در یک دوره زمانی خاص مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین توسعه‌های فراوانی از مدل‌های مرسوم تحلیل پوششی داده‌ها وجود دارد که بیش از یک دوره زمانی برای عملکرد واحد تحت ارزیابی در نظر گرفته می‌شوند. تحلیل پنجره‌ای و شاخص بهره‌وری مالمکوئیست در تحلیل پوششی داده‌ها [12،13] صرف نظر از تفاوت بین جزئیات مدل، هدف مشترک همه آنها این است که برای ارزیابی چندین دوره زمانی را در نظر می‌گیرند. نموتو و گوتو [14] مدل تحلیل پوششی داده‌های پویا را برای اندازه گیری کارایی کلی سیستم‌های تولید چند دوره‌ای ارائه دادند. این کارایی کلی را می‌توان به عنوان قیمت یا کارایی اقتصادی دید. آنها پیش‌بینی‌های دقیقی را نسبت به هزینه‌های ورودی در طول دوره‌های مختلف فرض کردند و در یک مجموعه امکان تولید معمولی یک مرز کارا را در راه حداقل رساندن هزینه‌های جمع آوری شده که با استفاده ورودی‌ها در طول زمان مواجه شده تعیین کردند. در تحلیل پوششی داده‌های چند دوره‌ای[4] کارایی تجمیعی در محدوده داده‌های سری زمانی اندازه گیری می‌شوند. نیازی به دانستن اطلاعات در خصوص قیمت داده‌ها یا وزن ورودی‌ها یا خروجی‌ها دوره‌ای مختلف ندارد و یک کارایی تجمیعی چند دوره‌ای[5] را نتیجه می‌دهد که مفهوم آن کارایی تکنیکی واحدهای تولید چنددوره‌ای است.

سام پارک و پارک [15] یک رویکرد دو مرحله‌ای برای اندازه‌گیری کارایی تجمیعی داده‌های سری زمانی عرضه کردند. امیر تیموری و کرد رستمی [16] یک مدل برای محاسبه کارایی تجمیعی در بین همه دوره‌ها ارائه و نشان دادند که کارایی تجمیعی یک ترکیب محدب از کارایی دوره‌هاست. علاوه براین کائو و لیو [17] روشی برای اندازه گیری کارایی چند دوره پیشنهاد کردند به عبارت دیگر آنها از یک رویکرد شبکه‌ای برای اندازه‌گیری کارایی کلی واحد تصمیم گیری در یک زمان استفاده کردند. همچنین کائو و هوانگ [18] مدل‌هایی را برای ارزیابی کارایی کلی و دوره‌ای سیستم‌های دومرحله‌ای چند دوره‌ای درهمان زمان پیشنهاد کردند. جابلونسکی [19] عملکرد سیستم‌های چند دوره‌ای را تجزیه و تحلیل کرد و کارایی و ابرکارایی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های چند دوره‌ای را ارائه داد. رضوی حاجی آقایی و همکاران [20] یک رویکرد دو مرحله‌ای بر مبنای کران نامساوی چبیشف که به سیستم‌های تولید چند دوره‌ای مرتبط است معرفی کردند. کرد رستمی و جهانی سید نوویری [21] یک روش برای ارزیابی کارایی سیستم‌های تولید چند دوره‌ای با داده‌های منفی پیشنهاد کردند. اسماعیل زاده و هادی وینچه [22] یک مدل ابرکارایی براساس فرض بازده به مقیاس ثابت برای برآورد کارایی تجمیعی سیستم‌های تولید چند دوره‌ای را ارائه دادند.

[2] Data Envelopment Analysis (DEA)
[3] Decision Making Units (DMUs)
[4] Multi Period Data Envelopment Analysis (MDEA)
[5] Multi Period Aggregative Efficiency (MAE)

در سال‌های اخیر نیز مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های چند دوره‌ای توسعه داده شده‌اند. جهانی سید نوویری [23] روشی بر پایه‌ی تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری کارایی سیستم‌های تولیدی با خروجی های مطلوب و نامطلوب در چند دوره معرفی کردند. اسماعیل زاده و کاظمی متین [24] با در نظر گرفتن روابط داخلی پیچیده برای زیرفرایندهای هر واحد تصمیم‌گیری مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های چند دوره‌ای را توسعه دادند. آنها مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های شبکه چند دوره‌ای را برای محاسبه‌ی کارایی کلی و جزئی برای هر دوره زمانی با ساختارهای داخلی موازی و سری در زیرفرایندها معرفی کردند. توانا و همکاران [25] یک مدل تحلیل پوششی داده‌های شبکه چند دوره‌ای چند هدفه فازی را برای ارزیابی عملکرد پالایشگاه‌های نفت در حضور خروجی‌های نامطلوب، ارائه دادند.

در مقالات مذکور اغلب مدل‌های معرفی شده برای ارزیابی واحدها، شعاعی هستند. در چنین مدل‌هایی کارایی پاراتو در نظر گرفته نمی‌شود. بنابراین برای دستیابی به کارایی پاراتو نیاز به ارائه یک مدل در فاز دوم می‌باشد. در این راستا، مدل اصلاح شده راسل معرفی می‌گردد.

این مقاله یک روش جدید برای اندازه گیری کارایی تجمیعی سیستم‌های تولید چنددوره‌ای را ارائه می‌دهد. این روش شکل توسعه یافته راسل برای اندازه گیری کارایی است که تلاش می‌کند کارایی سیستم‌های چند دوره‌ای را اندازه‌گیری کند. این رویکرد نیاز به استفاده از تنها یک مدل بهینه‌سازی برای رسیدن به کارایی پاراتو را دارد. از دیگر ویژگی‌های مدل پیشنهادی، پیچیدگی محاسباتی کم است. همچنین مدل پیشنهادی در مقایسه با مدل‌های پیشین، منابع ناکارایی را بهتر نشان می‌دهد.

در ادامه مقاله به صورت زیر، سازماندهی شده است. بخش دوم، مدل سام پارک و پارک و خواص آن را بیان می‌کند. بخش سوم، قسمت اصلی این مقاله را معرفی می‌کند. در این بخش یک مدل جدید که توسعه‌یافته مدل راسل برای اندازه گیری کارایی سیستم‌های تولید چند دوره‌ای است، ارائه می‌شود. در بخش چهارم، دو مثال کاربردی برای نشان دادن دادن عملکرد مدل معرفی شده و مقایسه‌ی نتایج مدل پیشنهادی با مدل‌های قبلی آورده شده است. در بخش پنجم نتایج بیان می‌شود.

2- مدل سام پارک و پارک برای سیستم‌های تولید چند دوره‌ای

n واحد تصمیم گیری که در t دوره زمانی $(t=1,2,\ldots,L)$ ارزیابی می‌شوند را در نظر بگیرید. هر DMU_j $(j=1,2,\ldots,n)$ در هر دوره، m ورودی $(i=1,2,\ldots m)$ را برای تولید s خروجی $(r=1,2,\ldots s)$ مصرف می‌کند.

فرض کنید t $(t=1,2,\ldots,L)$ اندیسی برای دوره‌ها $j=1,2,\ldots,n$ اندیسی برای واحدهای تصمیم‌گیری و $i=1,2,\ldots,m$ اندیسی برای ورودی‌ها و $r=1,2,\ldots,s$ اندیسی برای خروجی‌ها باشد. همچنین فرض کنید x_{ij}^{t} مقدار i امین ورودی مصرف شده DMU_j در دوره t و y_{rj}^{t} مقدار r امین خروجی تولید شده DMU_j در زمان t باشد.

سام پارک و پارک [15] مجموعه امکان تولید زیر را معرفی کردند و مدل زیر را برای ارزیابی عملکرد چند دوره فرموله کردند.

$$PPS=\{(x^{t},y^{t}):x^{t}\geq X^{t}\lambda^{t},y^{t}\leq Y^{t}\lambda^{t},\ \lambda^{t}\geq 0,t=1,2,\ldots,L\}$$

مدل پیشنهاد شده توسط سام پارک و پارک دارای دو فاز است. فاز 1 و فاز 2 به صورت‌های زیر است:

فاز 1:

$$
\begin{aligned}
&Min \ \ \theta_o \\
&\text{s.t.} \qquad\qquad (1)\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t y_{rj}^t \geq y_{ro}^t,\ r=1,2,\ldots,s,\ t=1,\ldots,\mathrm{L}\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t x_{ij}^t \leq \theta_o x_{io}^t, i=1,2,\ldots,m,\ t=1,\ldots,\mathrm{L}\\
&\lambda_j^t \geq 0,\ \ j=1,2,\ldots,n,\ \ t=1,\ldots,\mathrm{L}
\end{aligned}
$$

که θ_o برای نشان دادن انقباض شعاعی همه ورودی‌ها استفاده می‌شود. چون مدل شعاعی است تمام ناکارایی‌های موجود در یک واحد تصمیم گیرنده را نشان نمی‌دهد. بنابراین معمولاً فاز دوم را در نظر می‌گیرند. θ_o^* جواب بهینه فاز اول در فاز دوم قرار می‌گیرد ودر فاز دوم تلاش می‌شود تا مجموع متغیرهای کمکی ورودی و خروجی را برای هر DMU_j تحت ارزیابی در همه دوره‌ها $t=1,2,\ldots,L$ حداکثر کند. مدل فاز دوم به صورت زیر است.

فاز 2:

$$
\begin{aligned}
&Max \ \ z=\sum_{t=1}^{L}\sum_{r=1}^{s}s_r^t+\sum_{t=1}^{L}\sum_{i=1}^{m}d_i^t\\
&\text{s.t.} \qquad\qquad (2)\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t y_{rj}^t - s_r^t = y_{ro}^t,\ r=1,2,\ldots,s, t=1,2,\ldots,L,\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t x_{ij}^t + d_i^t = \theta_o^* x_{io}^t, i=1,2,\ldots,m, t=1,2,\ldots,L\\
&\lambda_j^t \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n, t=1,2,\ldots,L\\
&s_r^t \geq 0,\ r=1,2,\ldots,s, t=1,2,\ldots,L,\\
&d_i^t \geq 0, i=1,2,\ldots,m,\ \ t=1,2,\ldots,L.
\end{aligned}
$$

سام پارک و پارک [15] کارایی قوی و ضعیف واحدهای تصمیم‌گیرنده را در ارزیابی چند دوره به صورت زیر تعریف کردند.

تعریف 1: فرض کنید (λ^*, s^*, d^*) یک جواب بهینه مدل (2) باشد آنگاه DMU_o کارای قوی است اگر در شرایط زیر صدق کند.

۱- جواب بهینه مدل (1) برابر 1 باشد یعنی $\theta_o^*=1$

۲- $s^{*t}=0$ و $d^{*t}=0$ برای همه $t = 1,2,\ldots,L$

اگر شرط (1) برقرار نباشد DMU_o ناکارا است.

تعریف 2: DMU_o کارای ضعیف است اگر $\theta_o^*=1$ و حداقل یکی از مؤلفه‌های s^{*t} یا d^{*t} مخالف صفر باشد.

3- مدل سام پارک و پارک برای سیستم‌های تولید چند دوره‌ای

هدف از این مطالعه توسعه مدل غیر شعاعی راسل برای ارزیابی کارایی سیستم‌های تولید چند دوره‌ای دریک فاز است. این مدل، توسعه یافته مدل راسل است. در مقایسه با مدل قبلی که توسط سام پارک و پارک ارائه شده است قابلیت تشخیص بالاتری دارد و مرحله دوم را حذف می‌کند.

فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده در L دوره زمانی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. هر واحد از x_j^t و y_r^t به عنوان بردارهای ورودی و خروجی استفاده می‌کند. مدل توسعه یافته راسل[6] (ERM) را به صورت زیر معرفی می‌کنیم. مدل پیشنهادی همه ناکارایی موجود برای یک واحد تحت ارزیابی را در یک فاز در نظر می‌گیرد. هر دو هدف در یک مدل محقق می‌شود.

[6] Enhanced Russell Model

$$ERM = Min \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{L}\theta_i^t}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\sum_{t=1}^{L}\phi_r^t}$$

s.t. (3)

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t y_{rj}^t \geq \phi_r^t y_{ro}^t,\ r=1,2,\ldots,s, t=1,2,\ldots,L$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t x_{ij}^t \leq \theta_i^t x_{io}^t, i=1,2,\ldots,m, t=1,2,\ldots,L$$

$$\lambda_j^t \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n,\ t=1,2,\ldots,L,$$

$$\theta_i^t \leq 1,\ i=1,2,\ldots,m, t=1,2,\ldots,L,$$

$$\phi_r^t \geq 1, r=1,2,\ldots,s, t=1,2,\ldots,L,$$

ϕ_r^t برای همه $r=1,2,\ldots,s$ و $t=1,2,\ldots,L$، r امین متغیر انبساط خروجی در دوره t است و θ_i^t برای همه‌ی $i=1,2,\ldots,m$ و $t=1,2,\ldots,L$، i امین متغیر انقباضی ورودی در دوره t برای همه‌ی واحدها است. با در نظر گرفتن محدودیت‌ها، تابع هدف کسری عددی بین صفر و یک است و زمانی برابر یک است که همه θ_i^tها و ϕ_r^tها برابر یک باشند. در چنین شرایطی تعریف زیر را برای تشخیص وضعیت کارایی واحد تحت ارزیابی در نظر می‌گیریم.

تعریف 3: فرض کنید $\left(\lambda^{*t}, \theta^{*t}, \phi^{*t}\right)$ یک جواب بهینه برای مدل (3) باشد DMU_o کارا است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱- $\theta_i^{*t}=1$ برای $t=1,2,\ldots,L$ و $i=1,2,\ldots,m$

۲- $\phi_r^{*t}=1$ برای $t=1,2,\ldots,L$ و $r=1,2,\ldots,s$.

DMU_o ناکارا است اگر حداقل یکی از شرایط بالا برقرار نباشد.

قضیه 1: قیدهای ورودی وخروجی مدل (3) در هر جواب بهینه نافذ هستند.

اثبات: فرض کنید $\left(\phi_r^{*t}, \theta_i^{*t}\right)$ $\left(r=1,2,\ldots,s\right)$ و $\left(i=1,2,\ldots,m\right)$ یک جواب بهینه مدل (3) باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید قید متناظر با z امین مؤلفه‌ی ورودی در زمان q در جواب بهینه $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{*q}x_{zj} < \theta_z^{*q}x_{zo}$ نافذ نباشد یعنی. پس وجود دارد یک θ_z^q به‌طوری‌که $\theta_z^q < \theta_z^{*q}$ و $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{*q}x_{zj} = \theta_z^q x_{zo}$. بنابراین یک جواب شدنی مانند $\left(\theta^t, \lambda^{*t}, \phi^{*t}\right)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{l}\theta_i^t}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\sum_{t=1}^{l}\varnothing_r^{*t}} < \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{l}\theta_i^{*t}}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\sum_{t=1}^{l}\varnothing_r^{*t}}$$

این با بهینه بودن $\left(\theta^t, \lambda^{*t}, \phi^{*t}\right)$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و همه قیدهای ورودی وخروجی در تمام جواب‌های بهینه نافذ هستند. بنابراین نیازی به معرفی متغیرهای کمکی نیست. ■

توجه کنید که ورودی‌ها و خروجی‌های فعالیت تحت ارزیابی به صورت مستقل بهبود داده می‌شوند.

سه تفاوت اساسی بین مدل پیشنهادی و مدل سام پارک و پارک وجود دارد که به قرار زیر است.

- مدل [3] کارایی را فقط در یک فاز نشان می‌دهد در صورتی که مدل سام پارک و پارک به فاز دوم نیاز دارد. بنابراین پیچیدگی محاسباتی مدل (3) از مدل سام پارک و پارک کمتر است.
- مدل سام پارک و پارک شعاعی است در صورتی‌که مدل [3] غیرشعاعی است. مدل سام پارک و پارک ورودی محور یا خروجی محور است اما مدل (3) هم ورودی محور و هم خروجی محور است یعنی همزمان ورودی‌ها را کاهش و خروجی را افزایش می‌دهد.

- مقدار کارایی مدل [3] همیشه کمتر یا مساوی عدد کارایی مدل سام پارک و پارک در فاز یک است بنابراین مدل [3] منابع ناکارایی را بهتر تشخیص می‌دهد.

قضیه2: اگر θ_i^{*t} و ϕ_r^{*t} $(i=1,2,\ldots,m)$، $(r=1,2,\ldots,s)$ و $(t=1,2,\ldots,L)$ جواب‌های بهینه مدل (3) باشند و θ^* و ϕ^* جواب‌های بهینه مدل سام پارک و پارک به ترتیب در ماهیت‌های ورودی و خروجی باشند آن‌گاه

۱- $max_i max_t \left\{\theta_i^{*t}\right\} \le \theta^*$

۲- $min_r min_t \left\{\phi_r^{*t}\right\} \ge \phi^*$

اثبات (1): مدل سام پارک و پارک در ماهیت ورودی در فاز یک به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &Min \quad \theta_o \\ &\text{s.t.} \qquad\qquad (4)\\ &\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t x_{ij}^t \le \theta_o x_{io}^t, \quad i=1,2,\ldots,m, t=1,2,\ldots,L,\\ &\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t y_{rj}^t \ge y_{ro}^t, \quad r=1,2,\ldots,s, t=1,2,\ldots,L,\\ &\lambda_j^t \ge 0, \quad j=1,2,\ldots,n, t=1,2,\ldots,L, \end{aligned}$$

فرض کنید $\left(\lambda^*, \theta^*\right)$ جواب بهینه مدل (4) باشد با توجه به قیدهای ورودی داریم:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{*t} x_{ij}^t \le \theta^* x_{io}^t \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{*t} x_{ij}^t}{x_{io}^t} \le \theta^*$$

$$\Rightarrow \max_i \max_t \left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{*t} x_{ij}^t}{x_{io}^t}\right\} \le \theta^*$$

به عبارت دیگر چون قیدهای ورودی در جواب‌های بهینه مدل (3) نافذ هستند پس یک θ_i^{*t} وجود دارد به طوری که

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{*t} x_{ij}^t}{x_{io}^t} = \theta_i^{*t} \Rightarrow \max_i \max_t \left\{\theta_i^{t^*}\right\} \le \theta^*$$

اثبات (2): به طریق مشابه انجام می‌شود.■

این قضیه ارتباط بین مدل قبلی و مدل پیشنهادی را نشان می‌دهد تابع هدف در بدترین حالت برای هر متغیر و هر زمان از بهترین حالت مدل قبلی بدتر نیست.

4- مثال عددی

مثال 1. مثال زیر از مقاله سام پارک وپارک گرفته شده است و نشان می‌دهد که چگونه مدل ارائه شده کار می‌کند و نتایج آن را با نتایج مدل قبلی را مقایسه می‌کند.جدول (1) را در نظر بگیرید. این جدول اطلاعات ورودی و خروجی را برای ارزیابی 20 کابل تلویزیون (CATV) واحدهای سرویس اپراتور (SOs) در کره برای چندین دوره از سال 1999 تا 2001 نشان می‌دهد. هر واحد، دو ورودی

۱. هزینه عملیاتی (100دلار)

۲. نیروی انسانی (تعداد)

را برای تولید دو خروجی زیر مصرف می‌کند.

۱. درآمد (100دلار)

۲. بیننده (100نفر)

در جدول 2 نتایج ارزیابی مدل (3) و مدل دو فازی سام پارک و پارک ذکر شده است. همان طوری که سام پارک و پارک [15] در مقاله خود ذکر کرده‌اند فاز دوم فقط برای واحدهایی است که مقادیر بهینه آنها در فاز اول برابر یک است.

جدول (1): داده‌های سه سال مربوط به کابل تلویزیون واحدهای سرویس اپراتور

واحدها	ورودی‌ها						خروجی‌ها					
	هزینه عملیاتی (100دلار)			نیروی انسانی (تعداد)			درآمد (100 دلار)			بیننده (100 نفر)		
	1999	2000	2001	1999	2000	2001	1999	2000	2001	1999	2000	2001
A	454	530	560	26	28	30	397	486	580	186	360	396
B	358	350	390	28	30	28	239	268	312	105	160	396
C	416	450	482	40	40	40	462	524	620	244	445	480
D	245	292	318	25	28	32	202	230	286	116	208	226
E	258	300	325	28	30	30	288	328	405	149	270	292
F	480	524	598	50	54	62	510	580	612	311	545	565
G	475	495	554	27	28	30	382	420	504	198	346	368
H	370	404	425	29	30	35	297	340	399	161	269	275
I	421	480	530	35	35	36	415	466	529	201	325	335
J	627	668	728	44	44	44	491	544	624	264	442	469
K	400	462	508	22	24	25	334	386	454	170	320	352
L	404	476	515	37	40	40	321	348	400	168	300	325
M	458	528	580	26	30	31	426	468	520	210	368	389
N	541	640	685	34	35	36	528	580	696	320	526	570
O	281	328	360	25	30	30	221	264	305	127	252	264
P	934	1018	1102	59	64	63	817	926	1098	361	615	665
Q	863	1030	1100	49	50	50	884	1020	1104	424	828	900
R	571	674	738	31	35	34	486	568	660	258	482	520
S	339	386	414	28	30	30	385	462	554	196	365	400
T	287	320	342	36	36	34	189	215	254	90	180	188

جدول (2): مقایسه نتایج کارایی مدل پیشنهادی راسل توسعه یافته (3) و مدل سام پارک و پارک در دو فاز در مثال 1

واحدها	فاز 1 (θ_o^*)	فاز 2 (z_o^*)	ERM
A	0.938		0.8455
B	0.639		0.6268
C	1	11.359	0.9763
D	0.758		0.6299
E	0.988		0.8416
F	1	219.669	0.9003
G	0.829		0.7962
H	0.740		0.6750
I	0.868		0.7531
J	0.745		0.7157
K	0.873		0.8319
L	0.706		0.6072
M	0.923		0.8365
N	1	158.049	0.9557
O	0.769		0.6605
P	0.867		0.7485
Q	1	0	1.0000
R	0.925		0.8630
S	1	0	1.0000

T	0.579	0.4683

طبق جدول 2 واحدهای N، F و C کارایی قوی ندارند در حالی که واحدهای Q و S به عنوان واحدهای کارای قوی شناخته می‌شوند. همان طوری که مورد انتظار است مقادیر کارایی همه واحدها در ستون چهارم جدول 2 کمتر از عدد کارایی مدل سام پارک و پارک است که در ستون دوم ذکر شده است. نکته مهمی که به درستی در مدل پیشنهادی ERM انجام شده است این است که تمام ناکارایی‌های موجود در یک واحد تصمیم‌گیری را نشان می‌دهد. با توجه به نتایج حاصل از مدل (3) طبقه بندی واحدها می‌تواند بر اساس این دو تجزیه و تحلیل متفاوت باشد. واحدهای N، F وC دارای مقادیر کارایی یک در فاز یک مدل سام پارک و پارک هستند در حالی که این مقادیر در مدل پیشنهادی ERM کمتر از یک هستند. واحدهای S و Q با استفاده از مدل سام پارک و پارک کارای قوی هستند بنابراین در مدل پیشنهادی ERM هم کارا هستند.

باتوجه به 20 واحدی که مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند نمرات کارایی حاصل از دو مدل (1) و (3) نشان می‌دهد که تنها دو مورد این مقادیر یکسان هستند و در 18 مورد دیگر این اعداد متفاوت هستند. این بدان معنی است که مقادیر کارایی این واحدها در حدود 90 درصد با هم متفاوت هستند مقایسه فوق نشان می‌دهد که مدل (3) پیچیدگی محاسباتی را کاهش می‌دهد و دقیقتر از مدل سام پارک و پارک است. در حقیقت مدل (3) منابع ناکارایی را بهتر از مدل مدل سام پارک و پارک نشان می‌دهد بنابراین مزیت قابل توجهی نسبت به مدل قبل دارد و از لحاظ اقتصادی شدنی است.

مثال 2. این مثال، عملکرد مدل معرفی شده (3) را در تحلیل فعالیت‌های شرکت‌های گاز مورد بررسی قرار می‌دهد. داده‌های این مثال از مقاله‌ی امیر تیموری و کردرستمی [16] اخذ شده است. مجموعه‌ی داده‌ها از 25 شرکت گاز واقع در 24 ناحیه از ایران طی سال‌های 2002-2003 تشکیل شده است. مجموعه‌ی داده‌ها را سه ورودی شامل سرمایه (x_1)، تعداد کارکنان (x_2) و هزینه‌های عملیاتی (به استثنای هزینه‌های کارکنان) (x_3) و چهار خروجی شامل تعداد مشترکان (y_1)، میزان لوله گذاری (y_2)، طول شبکه گاز (y_3) و درآمد به دست آمده از گاز فروخته شده در دوره‌ی فعلی (y_4) تشکیل داده‌اند. آخرین خروجی (y_4) به عنوان ورودی در دوره بعد استفاده می‌شود زیرا شرکت‌ها می‌توانند از درآمد حاصل از فروش تولیدات دوره فعلی به عنوان ورودی (بودجه) برای دوره بعد استفاده کنند. جدول‌های 3 و 4 شامل داده‌ها در دو دوره است.

جدول 5 نتایج ارزیابی کارایی شرکت‌های گاز را با استفاده از مدل پیشنهادی (3) نمایش می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌گردد با استفاده از مدل پیشنهادی ERM معرفی شده کارایی تجمیعی طی یک مرحله به دست می‌آید. با توجه به جدول 5، شرکت‌های 2، 3، 4، 5، 8، 10، 12، 16، 20 و 25 کارای قوی هستند.

جدول (3): داده‌های شرکت‌های گاز در دوره 1

شرکت	y_{04}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}
1	278,579	377,430	1,401	1,528,325	27,564	501	201,529	11,675
2	250,598	221,338	1,094	1,186,905	44,136	803	840,446	34,960
3	229,202	267,806	1,079	1,323,325	27,690	251	832,616	24,461
4	115,801	160,912	444	648,685	45,882	816	251,770	23,744
5	124,412	177,214	801	909,539	72,676	654	443,507	36,409
6	118,713	146,325	686	545,115	19,839	177	341,585	18,000
7	458,910	195,138	687	790,348	40,154	695	233,822	31,221
8	393,238	108,146	152	236,722	37,770	606	118,943	23,889
9	354,188	165,663	494	523,899	28,402	652	179,315	25,163
10	106,743	195,728	503	428,566	63,701	959	195,303	43,440
11	36,545	87,050	343	298,696	17,334	221	16,037	9,689
12	84,684	124,313	129	198,598	30,242	565	61,836	21,032
13	44,196	67,545	117	131,649	14,139	153	46,233	10,398
14	84,854	47,208	165	228,730	13,505	211	42,094	9,391
15	76,285	43,494	106	165,470	8,508	114	44,195	6,023
16	49,998	48,308	141	180,866	7,478	248	45,841	7,063
17	82,448	55,959	146	194,470	1,818	230	36,513	9,635
18	55,237	40,605	145	179,650	6,422	127	70,380	3,523
19	62,514	61,402	87	94,226	1,860	182	36,592	12,276
20	38,288	87,950	104	91,461	2,900	170	47,650	17,983
21	87,476	33,707	114	88,640	3,326	85	13,410	1,501
22	83,142	100,304	254	292,995	1,478	318	79,883	12,135
23	52,184	94,286	105	98,302	9,105	273	32,553	10,438
24	86,993	67,322	224	287,042	5,332	241	72,316	6,574
25	60,471	102,045	104	155,514	8,082	441	30,004	19,168

جدول (4): داده‌های شرکت‌های گاز در دوره 2

شرکت	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}
1	498,505	1,389	5,482,262	43,061	1,067.986	218,885	2,835
2	487,382	1,046	3,389,186	58,862	1,056.387	1,429,293	4,443
3	359,400	1,052	3,429,943	23,776	345.29	1697,660	5,817
4	612,240	493	4,802,226	84,967	1,176.646	572,446	7,691
5	1,254,847	745	1,102,266	87,336	965.6	936,488	33,520
6	334,097	632	756,345	24,719	408.6	603,599	12,428
7	409,221	645	816,493	52,654	696.214	307,421	4,343
8	272,198	149	329,267	42,939	572.2	314,471	28,569
9	278,912	471	526,882	31,716	779.927	384,094	18,658
10	352,989	488	553,988	82,075	1,151.989	472,923	8,163
11	260,460	344	290,392	18,099	353.6	236,593	11,598
12	224,740	135	302,160	40,404	588.459	176,077	26,654
13	134,991	117	167,329	20,356	275.528	135,211	11,687
14	131,812	164	294,662	16,534	215.656	113,916	6,699
15	92,208	107	279,873	6,875	92	62,223	5,750
16	86,879	138	218,564	11,486	206.322	136,762	6,088
17	112,930	146	244,674	17,577	190.622	261,312	9,329
18	104,807	141	211,262	11,154	101.055	42,774	7,378
19	138,720	93	132,001	21,068	317.638	34,175	12,447
20	235,561	105	943,79	31,968	239	79,012	19,435
21	42,134	110	115,244	3,930	39.283	15,569	2,721
22	163,181	248	272,430	2,538	425.17	13,746	13,235
23	166,000	105	119,175	7,222	268.85	13,525	17,176
24	155,000	219	339,145	3,999	261.052	35,196	8,629
25	129,705	106	192,110	3,389	580.845	15,514	23,183

جدول 5: نتایج کارایی مدل پیشنهادی (3) در مثال 2

شرکت‌ها	ERM
1	0.3290
2	1.0000
3	1.0000
4	1.0000
5	1.0000
6	0.6540
7	0.2882
8	1.0000
9	0.7183
10	1.0000
11	0.4818
12	1.0000
13	0.7613
14	0.5075
15	0.4159
16	1.0000
17	0.3874
18	0.6507
19	0.5927
20	1.0000
21	0.3291
22	0.2424
23	0.8269
24	0.5305
25	1.0000

5- نتیجه‌گیری

بیشتر مطالعات قبلی در تحلیل پوششی داده‌ها عمدتاً بر مبنای روش‌های ارزیابی عملکرد واحدهای تولیدی در یک دوره است. اما در عمل اکثر سازمان‌ها می‌خواهند در چند دوره زمانی مورد ارزیابی قرار بگیرند تا عملکردشان را بهتر نشان دهند. در مدل‌های مرسوم تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی سازمان‌های مختلف در یک دوره زمانی انجام می‌شود. این مدل‌ها نمی‌توانند کارایی تجمیعی یک واحد تصمیم‌گیری را در فاصله زمانی چند دوره‌ای محاسبه کنند. میانگین یا میانگین وزنی کارایی انفرادی واحد تصمیم گیری در دوره‌های مختلف نتایج ضعیف تری از عدد کارایی تجمیعی دارد. همچنین میانگین نمی‌تواند واحدهای تصمیم گیری کارا و ناکارا را تشخیص دهد. روش ارائه شده یک رویکرد جدید برای اندازه‌گیری کارایی تجمیعی واحدهای تولید چند دوره‌ای است. این مدل بر مبنای توسعه یک مدل غیرشعاعی پایه گذاری شده است که مدل توسعه یافته راسل نامیده می‌شود. این مدل کارایی تجمیعی سیستم‌های تولید چند دوره‌ای را فقط در یک فاز محاسبه می‌کند و همه منابع ناکارایی را در نظر می‌گیرد. نتایج عددی نشان دادند که مدل پیشنهادی پیچیدگی محاسباتی را کاهش می‌دهد. از دیگر مزایای مدل پیشنهادی این است که در مقایسه با مدل‌های پیشین منابع ناکارایی را بهتر نشان می‌دهد.

فهرست منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W., Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research, 2, 429–444.

[2] Banker, R., Charnes, A., Cooper, W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, Management Science, 30, 1031-1142.

[3] Wang, K., Huang, W., Wu, J., Liu, Y.-N. (2014). Efficiency measures of the Chinese commercial banking system using an additive two-stage DEA. Omega, 44,5-20.

[4] Lee, B.L., Worthington, A.C. (2016). A network DEA quantity and quality-orientated production model: An application to Australian university research services, Omega, 60, 26-33.

[5] Chowdhury, H., Zelenyuk, V. (2016). Performance of hospital services in Ontario: DEA with truncated regression approach, Omega, 63, 111-122.

[6] Akbari, F., Arab, M., Keshavarz, K., Dadashi, A. (2012). Technical efficiency analyses in hospitals of Tabriz University of Medical Sciences. Hospital, 11(2), 65-76. [Article in Persian]

[7] Wang, K., Yu, S., Zhang, W. (2013). China's regional energy and environmental efficiency: A DEA window analysis based dynamic evaluation, 58(5-6), 1117-1127.

[8] Witzel, M. (2002). A short history of efficiency, Business Strategy Review, 13, 38-47.

[9] Sueyoshi, T. (2000). Stochastic DEA for restructure strategy: an application to a Japanese petroleum company, Omega, 28(4), 385-398.

[10] Shaw, G., Williams, M.A. (2004). Tourism and Tourism Spaces, SAGE Publications, London.

[11] Kralj, A., Solnet, D. (2010). Service climate and customer satisfaction in a casino hotel: An exploratory case study, International Journal of Hospitality Management, 29, 711-719.

[12] Caves, D., Christensen, L., Diewert, W.E. (1982). The economic theory of index numbers and the measurement input, output, and productivity, Econometrica, 50(6), 1393-1414.

[13] Färe, R., Grosskopf, S. (1996). Intertemporal Production Frontiers: With Dynamic DEA, Kluwer Academic Publishers, and Boston.

[14] Nemoto, J., Goto, M. (1999). Dynamic data envelopment analysis: modeling intertemporal behavior of a firm in the presence of productive inefficiencies, Economic Letters, 64, 51-56.

[15] Park, K.S., Park, K. (2009). Measurement of multi-period aggregative efficiency, European Journal of operational Research, 193(2), 567-580.

[16] Amirteimoori, A., Kordrostami, S. (2010). Multi-period efficiency analysis in data envelopment analysis, International Journal of Mathematics in Operational Research, 2(1), 113-128.

[17] Kao, C., Liu, S.-T. (2014). Multi-period efficiency measurement in data envelopment analysis: The case of Taiwanese commercial banks. Omega, 47, 90-98.

[18] Kau, C., Hwang, S.-N. (2014). Multi-period efficiency and Malmquist productivity index in two-stage production

systems, European Journal of Operational Research, 232(3), 512-521.

[19] Jablonsky, J. (2016). Efficiency analysis in multi-period systems: an application to performance evaluation in Czech higher education, Central European Journal of Operations Research, 24(2), 283-296.

[20] Razavi Hajiagha, S.H., Hashemi, S.S., Amoozed Mahdiraji, H., Azaddel, J. (2015). Multi-period data envelopment analysis based on Chebyshev inequality bounds, Expert Systems with Applications, 42(21), 7759-7767.

[21] Kordrostami, S., Jahani Sayyed Noveiri, M. (2017). Evaluating the efficiency of firns with negative data in multi-period systems: An application to bank data, International Journal of Industrial Mathematics, 9(1), 27-35.

[22] Esmaeilzadeh, A., Hadi-Vencheh, A. (2013). A super-efficiency model for measuring aggregative efficiency of multi-period production systems, Measurement, 46(10), 3988-3993.

[23] Jahani Sayyad Noveiri, M., Kordrostami, S., Amirteimoori, A. (2018). Detecting the multi-period performance and efficiency changes of systems with undesirable outputs, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 10(3), 1850034.

[24] Esmaeilzadeh, A., Matin, R.K. (2019). Multi-period efficiency measurement of network production systems, Measurement, 134, 835-844.

[25] Tavana, M., Khalili-Damghani, K., Santos Arteaga, F.J., Hosseini, A. (2019). A fuzzy multi-objective multi-period network DEA model for efficiency measurement in oil refineries, Computers & Industrial Engineering, 135, 143-155.