دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و ششم، بهمن و اسفند ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# شبه میانگین‌پذیری برخی جبرهای نیم‌گروهی وزندار

کبری اوستاد[۱]، امین محمودی کبریا [۲*]، محمد صادق عسگری[۳]

[۱] گروه علوم پایه، واحد دهدشت، دانشگاه آزاد اسلامی، دهدشت، ایران
[۲و۳] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۹/۱۲   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۰۲

**چکیده**

شرایط هم ارز میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)^{**}$ و خواص معادل شبه میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)^{**}$ را برای یک نیم-گروه معکوس S و یک تابع وزن ω به $S$ بیان و اثبات خواهیم نمود. تحت مفروضات معینی نشان خواهیم داد که میانگین‌پذیری، شبه میانگین‌پذیری و تقریباً میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)$ مفاهیمی یکسان هستند.

میانگین‌پذیری و شبه میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)$ را برای برخی نیم‌گروه‌ها مانند نیم‌گروه‌های ارشمیدسی، نیم-گروه‌های نواری مستطیلی و نیم‌گروه‌های صفر چپ (راست) بررسی خواهیم کرد.

ارتباط میان میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)$ و $\ell^1(S,\omega)^{**}$ که در آن S یک نیم‌گروه به طور ضعیف حذفی تعویض-پذیر است، بیان خواهد شد. نتایجی در خصوص دوسطحی بودن $\ell^1(S,\omega)$ به ازای برخی نیم‌گروه‌ها بدست خواهیم آورد.

اگر S یک نیم‌گروه معکوس متناهی و $\ell^1(S,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر باشد آنگاه نشان خواهیم داد $\ell^1(S,\omega)$ دوسطحی است. بعلاوه برای یک نیم‌گروه صفر چپ (راست) خواهیم دید که $\ell^1(S,\omega)$ دوسطحی است.

اگر $S=M^{\circ}(G,I)$ نیم‌گروه برندت و $\ell^1(S,\omega)$ همانی تقریبی کراندار داشته باشد، آنگاه دوسطحی بودن $\ell^1(S,\omega)^{**}$ با متناهی بودن G معادل است.

**واژه‌های کلیدی:** دوتصویری، نیم‌گروه ارشمیدسی، نیم‌گروه تعویض‌پذیر به طور ضعیف حذفی.

* عهده‌دار مکاتبات:   Email: a_mahmoodi@iauctb.ac.ir

**۱. مقدمه**

مفاهیم میانگین‌پذیری جبرهای باناخ به وسیله جانسون در [۹] معرفی شدند. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و E یک $\mathcal{A}$ - دو مدول باناخ باشد. نگاشت خطی و کراندار $D:\mathcal{A}\to E$ را یک اشتقاق گوییم هر گاه برای هر $a,b\in\mathcal{A}$ . $D(ab)=(Da)\cdot b+a\cdot(Db)$.

فرض کنیم $x\in E$, نگاشت $ad_x:\mathcal{A}\to X$ را که به صورت $ad_x(a)=a\cdot x-x\cdot a$ تعریف می‌شود, یک اشتقاق درونی نامیم. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را میانگین‌پذیر گوییم، هر گاه برای هر $\mathcal{A}$ - مدول باناخ E، هر اشتقاق از $\mathcal{A}$ به $E^*$، دوگان E، درونی باشد.

قطر تقریبی برای جبر باناخ $\mathcal{A}$ ، نتی مانند $(m_i)_i\in\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}$ می‌باشد، به طوری که برای هر $a\in\mathcal{A}$ :

$$a.(m_i)_i-(m_i)_i.a\to 0 \quad , \quad a\pi(m_i)_i\to a.$$

در [۸]، جانسون نشان داد جبر باناخ $\mathcal{A}$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $\mathcal{A}$ دارای یک قطر تقریبی کراندار باشد.

جبر باناخ $\mathcal{A}$ را شبه میانگین‌پذیر گوییم هرگاه $\mathcal{A}$ دارای یک قطر تقریبی باشد.

قهرمانی و ژانگ، مفاهیم شبه میانگین‌پذیری را برای جبرهای باناخ معرفی و بررسی کردند.

برای جزییات بیشتر مطالعه کنید[۱و ۶] .

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathcal{A}$ – دو مدول باناخ باشد. یک اشتقاق $D:\mathcal{A}\to X$ ، تقریباً درونی است، اگر نت $(x_\propto)$ درX چنان موجود باشد که برای هر $a\in\mathcal{A}$،

$$D(a)=\lim_{\propto}(a.x_\propto-x_\propto.a).$$

جبر باناخ $\mathcal{A}$ تقریباً میانگین‌پذیر است هرگاه برای هر$\mathcal{A}$ - مدول X، هر اشتقاق پیوسته $D:\mathcal{A}\to X^*$، تقریباً درونی باشد.

برای جبر باناخ $\mathcal{A}$ ، ضرب تانسوری تصویری$\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}$ یک $\mathcal{A}$ - مدول با اعمال زیر است:

$$a.(b\otimes c)=ab\otimes c \quad ,$$
$$(b\otimes c).a=b\otimes ca$$

برای هر (a,b,c∈ $\mathcal{A}$) . نگاشت ضربی $\mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi:\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$$
$$\pi(a\hat{\otimes}b)=ab \qquad (a,b\in\mathcal{A}).$$

مفاهیم دوتصویری و دوسطحی توسط هلمسکی در [۷] معرفی و ثابت شدند.

جبر باناخ $\mathcal{A}$ دوتصویری است هر گاه یک $\mathcal{A}$ -مدول همومورفیسم کراندار $\rho:\mathcal{A}\to\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}$ چنان موجود باشد که $\pi o\rho=I_{\mathcal{A}}$ ، در آن $I_{\mathcal{A}}$ نگاشت همانی روی $\mathcal{A}$ می‌باشد.

جبر باناخ $\mathcal{A}$ را دوسطحی گوییم، هرگاه $\mathcal{A}$ -مدول همومورفیسم $\rho:\mathcal{A}\to(\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A})^{**}$ چنان موجود باشد که $\pi^{**}o\rho=k_{\mathcal{A}}$ و $k_A:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{**}$ نشاننده طبیعی از $\mathcal{A}$ بتوی دوگان دوم خودش است.

تعریف. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. تابع پیوسته $\omega: S\to(0,\infty)$ یک وزن روی S نامیده می‌شود هرگاه برای هر $s,t\epsilon S$ ، $\omega(st)\le\omega(s)\omega(t)$.

تذکر: $\Omega(g)=\omega(g)\omega(g^{-1})$ و

$$\ell^1(S,\omega)=\left\{f=\sum f(s)\delta_s \quad : \quad \|f\|_\omega=\sum_{s\epsilon S}|f(s)|\omega(s)<\infty\right\}.$$

جبر باناخ با ضرب پیچشی $\delta_s * \delta_t = \delta_{st}$ می‌باشد ، این جبرها را جبرهای نیم‌گروهی وزندار می‌نامیم.

تعریف. نیم‌گروه S را نیم‌گروه معکوس گوییم هرگاه برای هر $s \in S$ ، عضو منحصر بفرد $s^* \in S$ چنان موجود باشد که $ss^*s = s \;\;,\;\; s^*ss^* = s^*$. برای هر نیم‌گروه معکوس S ، رابطه ترتیبی روی S به صورت زیر تعریف می‌شود، برای هر $(s\,,t\;\in S)$،

$$s \le t \;\leftrightarrow s = ss^*t\;.$$

اگر $(S\,,\le)$ یک رابطه جزیی مرتب باشد، $(S\,,\le)$ را متناهی موضعی گوییم هر گاه برای $x \in S$ ، $(x] = \{\,y \in S\;:\;\; y \le x\}$ متناهی باشد و به طور یکنواخت متناهی موضعی گوییم هرگاه

$$\sup\{|(x]|\;:\;\; x \in S\,\} < \infty.$$

تذکر. اگر S یک نیم‌گروه معکوس و $p \in E(S)$ ، زیرگروه ماکسیمال S در p را با $G_p$ نشان می‌دهیم و

$$G_p = \{\,s \in S\;\;:\;\; ss^* = s^*s = p\}.$$

تذکر. فرض کنید S یک نیم‌گروه معکوس باشد. ضرب • روی فضای باناخ $\ell^1(S)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{s\in S} f(s)\delta_s \bullet \sum_{t\in S} g(t)\delta_t = \sum_{r\in S}\;\sum_{\substack{st=r\\ s^*s=tt^*}} f(s)g(t)\delta_r\,.$$

و اگر هیچ s و t در S موجود نباشد که $\mathrm{st} = \mathrm{r}\;,\;\mathrm{s^*s} = \mathrm{tt^*}$ آن گاه

$$\sum_{s\in S} f(s)\delta_s \bullet \sum_{t\in S} g(t)\delta_t = 0.$$

جبر باناخ $(\ell^1(S),\bullet,\|.\|_1)$ را با B(S) نشان می‌دهیم و در این حالت:

$$\delta_s \bullet \delta_t = \begin{cases} \delta_{st} & s^*s = tt^* \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \qquad (\,s,t \in S).$$

برای جزییات بیشتر مطالعه کنید.[۳،۴،۶،۱۱،۱۳]

سپس در قسمت ۲ ، ثابت می‌کنیم برای نیم‌گروه معکوس گسسته S ، هرگاه $\ell^1(S,\omega)$ همانی تقریبی کراندار داشته باشد، میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)^{**}$ معادلند با این که $\ell^1(S)$ دوتصویری بوده و S متناهی باشد. در قسمت ۳، ثابت می‌کنیم برای نیم‌گروه ارشمیدسی S، هرگاه $\Omega$ روی هر زیرگروه ماکسیمال S، کراندار باشد، تقریباً میانگین‌پذیری، شبه میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)$، با هم معادلند و همچنین اگر S نیم‌گروه تعویض‌پذیر به طور ضعیف حذفی باشد، در شرایطی، این موضوع نیز برای دوگان دوم $\ell^1(S,\omega)$ ثابت می‌شود و در قسمت ۴، میانگین‌پذیری و شبه میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)$ را برای کلاس معینی از نیم‌گروه‌ها بررسی می-کنیم.

## ۲. دوسطحی بودن و شبه میانگین پذیری $\boldsymbol{\ell^1(S,\omega)^{**}}$

در این قسمت ثابت می‌کنیم برای نیم‌گروه معکوس گسسته S، اگر $\ell^1(S,\omega)$ همانی تقریبی کراندار داشته باشد، $\ell^1(S,\omega)^{**}$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $\ell^1(S,\omega)^{**}$ دوتصویری باشد. همچنین برای نیم‌گروه برندت $S = M^0(G,I)$ نیز ثابت می‌کنیم در صورتی که $I$ ، ناتهی و متناهی و $\ell^1(S,\omega)$ همانی تقریبی کراندار داشته باشد، دوسطحی بودن $\ell^1(S,\omega)^{**}$ و متناهی بودن G معادلند.

قضیه۲-۱. فرض کنید S نیم‌گروه معکوس متناهی و $\omega$ وزن روی S باشد. اگر $\ell^1(S,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر باشد، آن گاه $\ell^1(S,\omega)$ دوسطحی می‌باشد.

برهان . فرض کنید $\ell^1(S,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر باشد بنابر گزاره [۶، گزاره ۲،۳]، $\ell^1(S,\omega)$ شبه میانگین-پذیر است. می‌دانیم هر نیم‌گروه معکوس متناهی، میانگین‌پذیر است[۲]. لذا S نیم گروه میانگین‌پذیر است و طبق [۲، قضیه ۸]، $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر است. از آنجا که S متناهی است پس $\omega$ روی S کراندار است بنابر[۱۵، قضیه ۳،۶]، $\ell^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر بوده و لذا دوسطحی است. ■

قضیه ۲-۲. فرض کنید S نیم‌گروه معکوس گسسته، $\omega$ وزن روی S و $\ell^1(S,\omega)$ همانی تقریبی کراندار داشته باشد، آن گاه شرایط زیر معادلند:

۱) $\ell^1(S,\omega)^{**}$ میانگین‌پذیر است.

۲) $\ell^1(S)$ دوتصویری و S متناهی است.

۳) $\ell^1(S,\omega)^{**}$ دوتصویری است.

برهان. ۲→۱ از این که $\ell^1(S,\omega)^{**}$ میانگین‌پذیر است حال بنابر [۱۵،قضیه ۳،۷]، $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر و S متناهی است پس $\ell^1(S)$ دوسطحی می‌باشد. طبق [۱۲ قضیه ۳،۷ i] ، S به طور یکنواخت متناهی موضعی و به ازای هر $p\epsilon E(S)$ ، $G_p$ گروه میانگین‌پذیر است. چون S متناهی است پس $G_p$ متناهی است و لذا بنابر [۱۲ قضیه ۳،۷ ii] ، $\ell^1(S)$ دوتصویری است.

۳→۲ بنابر متناهی بودن S، کراندار بودن $\Omega$ نیز ثابت می‌شود و $\ell^1(S,\omega) \cong \ell^1(S)$ ،همینطور $\ell^1(S)^{**} \cong \ell^1(S)$ و لذا $\ell^1(S,\omega)^{**}$ دوتصویری است.

۱→۳ چون $\ell^1(S,\omega)^{**}$ دوتصویری است ، پس دوسطحی است و بنابر فرض $\ell^1(S,\omega)^{**}$ نیز دارای همانی تقریبی کراندار است و بنابراین $\ell^1(S,\omega)^{**}$ میانگین‌پذیر است. ■

تعریف ۲ -۳ . فرض کنید G یک گروه و I مجموعه‌ای ناتهی باشد. تعریف می‌کنیم:

$$M^{\cdot}(G,I) = \{(g)_{ij} \ : \ g \in G \,, i \,, j \in I\} \bigcup \{\cdot\}\,,$$

که در آن $(g)_{ij}$ ماتریسی $I \times I$ می‌باشد که درایه (i ,j) ام آن g و بقیه درایه‌ها صفر است.

$M^{\cdot}(G,I)$ با ضرب تعریف شده زیر،

$$(g)_{ij}(h)_{kl} = \begin{cases} (gh)_{il} & j = k \\ \cdot & j \neq k \end{cases} \quad (g,h \in G \,, i,j.k,l \in I\,)$$

یک نیم‌گروه معکوس است با $(g)^*_{ij} = (g^{-1})_{ji}$ که نیم‌گروه برندت تحت G همراه با مجموعه اندیس I نامیده می‌شود.

نتیجه۲-۴ . فرض کنید G یک گروه و I مجموعه ناتهی متناهی و$S = M^{\cdot}(G,I)$ نیم‌گروه برندت، $\omega$وزن روی S و$\ell^1(S,\omega)$ همانی تقریبی کراندار داشته باشد، در آن صورت $\ell^1(S,\omega)^{**}$ دوسطحی است اگر و تنها اگر G متناهی باشد.

برهان . فرض کنید $\ell^1(S,\omega)^{**}$ دوسطحی باشد. از این که I متناهی است و $E(S)=\{(e_G)_{ii} \ : \ i \in I\}\cup\{0\}$ متناهی است. $\ell^1(S,\omega)^{**}$ دارای همانی تقریبی کراندار است و لذا میانگین‌پذیر است. حال بنابر قضیه ۲-۲ ، $\ell^1(S)$ دوتصویری است و طبق [۱۲ قضیه ii ۳,۷]، هر زیرگروه ماکسیمال از S متناهی بوده و لذا G متناهی است.

برعکس، اگر G متناهی باشد. چون طبق فرض I نیز متناهی است ، پس S متناهی است و

$$\ell^1(S) \cong \ell^1(S\,,\omega) \cong \ell^1(S,\omega)^{**}$$

پس بنابر [۳، نتیجه ۳,۱۲]، $\ell^1(S,\omega)^{**}$ دوسطحی می‌باشد.■

تذکر. فرض کنید S یک نیم‌گروه و I یک ایده‌آل روی S بوده و $\omega$ وزن روی S باشد. برای $s,t \in S$ ، قرار می‌دهیم $s\sim t$ اگر $s=t$ یا $s,t\in I$ باشد. واضح است که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی S می‌باشد. کلاس‌های هم‌ارزی شامل s را با [s] نشان می‌دهیم. فرض کنید $s,t\in S$ و تعریف می‌کنیم $[s][t]=[st]$. کاملا روشن و مشخص است که این یک عمل نیم‌گروهی خوش‌تعریف، بر روی مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی $S/\sim$ می‌باشد و یک فرمی از گروه خارج قسمتی $S/_I$ را با عضو صفر I نشان می‌دهد. همچنین نگاشت $S \to S/_I$ ، که $s \longmapsto [s]$ یک اپی‌مورفیسم می‌باشد.

تعریف می‌کنیم $\widetilde{\omega}: S/_I \to \mathbb{C}$ به طوریکه ۱ $=\widetilde{\omega}([s])$ برای همه‌ی $s \in I$ و $\widetilde{\omega}([s])=\omega(s)$ برای هر $s \in S-I$، به آسانی دیده می‌شود که $\widetilde{\omega}$ یک وزن روی $S/_I$ می‌باشد. در ادامه به لم زیر نیاز داریم.

لم [۱۵، لم ۳,۱] . فرض کنید S یک نیم‌گروه، I یک ایده‌آل روی S و $\omega$ وزن روی S باشد. آن گاه $\ell^1_\cdot(I,\omega)$ یک ایده‌آل از $\ell^1(S,\omega)$ بوده و

$$\ell^1\left(\frac{S}{I},\widetilde{\omega}\right) \cong \ell^1(S,\omega)\Big/\ell^1_\cdot(I,\omega).$$

هرگاه S=I، داریم :

$$\ell^1(S,\omega)\Big/\ell^1_\cdot(S,\omega) \cong \mathbb{C}.$$

قضیه ۲-۵. فرض کنید S نیم‌گروه گسسته معکوس، $(E(S),\leq)$ به طور یکنواخت متناهی موضعی و $\omega$ وزن روی S باشد ، آن گاه شرایط زیر معادلند:

۱) $\ell^1(S,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر است.

۲) $\ell^1(S)$ شبه میانگین‌پذیر و S متناهی است.

۳) $\ell^1(S)^{**}$ شبه میانگین پذیراست.

برهان . ۲→۱ چون $\ell^1(S,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر است، پس $\ell^1(S,\omega)$ شبه میانگین‌پذیر است[۶، گزاره ۲,۳]. فرض کنید S یک نیم‌گروه معکوس باشد، رابطه $\rho$ روی S رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s\rho\, t \;\leftrightarrow\; \exists e \in E(S).$$

به طوری که$es = et$ . می‌بینیم که $\rho$ یک رابطه هم‌ارزی روی S است و فضای خارج قسمتی $G_S = {S}/{\rho}$ یک گروه است [۱۰].

فرض کنید $\theta: S \to G_S$ نگاشت خارج قسمتی باشد ، پس هومومورفیسمی از $\ell^1(S,\omega)$ به $\ell^1(G_S,\omega_S)$ که در آن $\omega_S = \omega|_S$ می‌باشد، وجود دارد. بنابر[۶، گزاره ۲٫۲] ، $\ell^1(G_S,\omega_S)$ شبه میانگین‌پذیر است، چون $G_S$ یک گروه است لذا دارای عضو همانی مانند e می‌باشد پس $\delta_e$ همانی، $\ell^1(G_S,\omega_S)$ هست و$\ell^1(G_S,\omega_S)$ تقریباً میانگین‌پذیر است [۶، قضیه ۲٫۳] و حال بنابر[۱۱، قضیه ۲٫۴] ، $G_S$ یک گروه میانگین‌پذیر است. حال بنابر[۲، قضیه ۱] ، S یک نیم‌گروه معکوس میانگین‌پذیر است. بنابر[۲، قضیه ۱] ، هر زیرگروه ماکسیمال از S، میانگین‌-پذیر است و طبق [۵، قضیه ۳٫۷]، $\ell^1(S)$ شبه میانگین‌پذیر است.

در ادامه ثابت می‌کنیم S متناهی است. از اینکه S گسسته است بنابراین S سری زیر را دارد

$$S_1 \trianglelefteq S_2 \trianglelefteq S_3 \trianglelefteq \cdots . \trianglelefteq S_{n-1} \trianglelefteq S_n = S.$$

به طوری که هر خارج قسمت ${S_{i+1}}/{S_i}$ یک نیم‌گروه ماتریسی ریس منظم با فرم $M^\cdot(G_i,P_i,n_i)$ برای هر i که $n_i \in \mathbb{N}$ و $S_1 \cup \{G_i \ : \ 2 \le i \le n\}$ مجموعه همه زیرگروه‌های ماکسیمال از S باشد. همچنین، $S_1$ یک زیرگروه ایده‌آل از S است. پس $\ell^1_\cdot(S_1,\omega)$ طبق لم قبل یک ایده‌آل از $\ell^1(S,\omega)$ و $\ell^1(S/S_1,\widetilde{\omega})$ است، بنابر[۶، گزاره ۲٫۷]، $\ell^1(S_1,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر است و $S_1$ گروه میانگین‌پذیر است. از این که $S_1$ یک گروه است پس متناهی است و لذا $\frac{S_2}{S_1}$ ، نیم‌گروه ۰- ساده کامل می‌باشد و بنابر [۶، گزاره ۲٫۲] ، $\ell^1(\frac{S_2}{S_1},\widetilde{\omega})^{**}$ شبه میانگین‌پذیر بوده و بنابر [۱۵، قضیه ۲٫۱] برای$2 \le i \le n$ داریم:

$$\frac{\ell^1({S_2}/{S_1},\widetilde{\omega})^{**}}{\mathbb{C}\delta_\cdot} \cong M_n(\ell^1(G_i,\omega))^{**} \cong M_n(\ell^1(G_i,\omega)^{**}).$$

پس $M_n(\ell^1(G_i,\omega)^{**})$ شبه میانگین‌پذیر است. پس بنابر[۵، نتیجه ۳٫۳] ، $\ell^1(G_i,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر است و بنابر [۶، گزاره ۴٫۲]، $G_i$ متناهی بوده و لذا $\frac{S_2}{S_1}$ متناهی است، پس $S_2$ متناهی است. به همین ترتیب، S متناهی می‌باشد.

۳↔۲ چون S متناهی است پس $\ell^1(S)^{**} \cong \ell^1(S)$ و لذا این دو معادلند.

۱→۲ فرض کنید $\ell^1(S)$ شبه میانگین‌پذیر و S متناهی باشد، بنابر [۵، قضیه ۳٫۷] و [۲، قضیه ۱] ، S نیم-گروه معکوس میانگین‌پذیر است. چون S متناهی است پس $\omega$روی S کراندار و لذا $\ell^1(S) \cong \ell^1(S,\omega)$ و همینطور $\ell^1(S)^{**} \cong \ell^1(S)$ . بنابراین $\ell^1(S,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر است.■

قضیه ۲-۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه معکوس به طور یکنواخت متناهی موضعی، $\omega$ وزن روی S ، $\Omega$ روی هر زیرگروه ماکسیمال از S کراندار و$\ell^1(S,\omega)$ دارای همانی تقریبی کراندار باشد. آن گاه شرایط زیر معادلند:

۱) $\ell^1(S,\omega)$ شبه میانگین‌پذیراست.

۲) E(S) متناهی و هر زیرگروه ماکسیمال از S میانگین‌پذیر است.

۳) $\ell^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر است.

۴) $\ell^1(S,\omega)$ تقریباً میانگین‌پذیر است.

برهان. ۲→۱ فرض کنید $\ell^1(S,\omega)$ شبه میانگین‌پذیر باشد، بنابر برهان قضیه ۲-۵، S میانگین‌پذیر است و لذا بنابر[۲، قضیه ۱]، هر زیرگروه ماکسیمال از S میانگین‌پذیر است و کافی است ثابت کنیم، E(S) متناهی است. چون $(S,\leq)$ به طور یکنواخت متناهی موضعی است، بنابر [۱۲، گزاره ۲,۱۴] ، $(E(S),\leq)$ به طور یکنواخت متناهی موضعی می‌باشد. بنابر[۵، قضیه ۳,۷] ، $\ell^1(S)$ شبه میانگین‌پذیر است . با فرض ۱ $= \omega$ ، $= \ell^1(S,\omega)$ $\ell^1(S)$ و $\ell^1(S)$ دارای همانی تقریبی کراندار است و لذا طبق [۶، گزاره ۳,۲]، $\ell^1(S)$ تقریباً میانگین‌پذیر بوده و بنابر [۱۳، قضیه ۴,۱]، E(S) متناهی است.

۳→۲ با توجه به [۱۳، قضیه ۴,۳] ، شرط ۲، معادل با میانگین‌پذیری $\ell^1(S)$ است. پس چون $\ell^1(S)$ میانگین-پذیر و $\Omega$ روی S کراندار است، طبق[۱۵، قضیه ۳,۶] ، $\ell^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر است.

۴→۳ واضح است.

۱→۴ چون $\ell^1(S,\omega)$ دارای همانی تقریبی کراندار و تقریباً میانگین‌پذیر است، پس بنابر[۶، گزاره ۳,۲] ، $\ell^1(S,\omega)$ شبه میانگین‌پذیر می‌باشد.■

نتیجه۲-۷. فرض کنید S یک نیم‌گروه معکوس با E(S) متناهی، $\omega$ وزن رویS و $\Omega$ روی هر زیرگروه ماکسیمال از S، کراندار باشد، در آن صورت$\ell^1(S,\omega)$ شبه میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر$\ell^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر باشد.

برهان . فرض کنید$\ell^1(S,\omega)$ شبه میانگین‌پذیر باشد آن گاه S یک نیم‌گروه معکوس میانگین‌پذیر است و لذا بنابر [۲، قضیه ۱]، هر زیرگروه ماکسیمال از S، میانگین‌پذیر است و سپس با توجه به[۲، قضیه ۸] ، $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر است. چون $\Omega$ روی هر زیرگروه ماکسیمال از S، کراندار می‌باشد، پس طبق [۱۵، قضیه ۳,۶]، $\ell^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر است و بر عکس نیز واضح است.■

### ۳. شبه میانگین پذیری جبرهای نیم گروهی وزندار و دوگان دوم آن روی نیم گروه های تعویضپذیر

در این قسمت ثابت می‌کنیم هرگاه $S$ یک نیم‌گروه ارشمیدسی باشد و $\Omega$ روی هر زیرگروه ماکسیمال $S$ کراندار باشد آن گاه شبه میانگین‌پذیری، تقریباً میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)$ با هم معادلند و همین موضوع را برای دوگان دوم $\ell^1(S,\omega)$ ، با وجود شرایطی اثبات می‌کنیم.

نیم‌گروه $S$ را نیم‌گروه ارشمیدسی گوییم هرگاه $S$ تعویض‌پذیر بوده و برای هر $s,t\in S$ وجود داشته باشد $n\in N$ به طوری که $\{tu \quad : \quad u\in S\}$ $S^n\in tS=$ .

**قضیه ۳-۱.** فرض کنید $S$ یک نیم‌گروه ارشمیدسی، $\omega$ وزن روی $S$ و $\Omega$ روی هر زیرگروه ماکسیمال $G$ از $S$، کراندار باشد.آن گاه شرایط زیر با هم معادلند:

۱) $\ell^1(S,\omega)$ شبه میانگین‌پذیر است.

۲) $S$ یک گروه میانگین‌پذیر است.

۳) $\ell^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر است.

۴) $\ell^1(S,\omega)$ تقریباً میانگین‌پذیر است.

**برهان.** ۱→۲ فرض کنید $\ell^1(S,\omega)$ شبه میانگین‌پذیر باشد. بنابراین $\ell^1(S,\omega)$ همانی تقریبی داشته و همینطور

$\overline{\ell^1(S,\omega)^2} = \ell^1(S,\omega).$ نتیجه می‌گیریم $S^2 = S$ و $S = S^2 = \cup_{s\in S} sS$. در ادامه ثابت می‌کنیم $S=sS$ برای همه $s \in S$ و $S$ دارای عضو همانی است. $s \in S$ ثابت در نظر می‌گیریم، بنابر تعریف ارشمیدسی بودن، $u, v \in S$ وجود دارند به طوری که $s=su$ و $u=sv$. بنابراین داریم:

$$u^2 = svsv = suv = sv = u.$$

پس $u \in E(S)$ و به عبارت دیگر $S=uS$ و لذا $u$ عضو همانی $S$ می‌باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $S$ نیم‌گروه حذفی چپ می‌باشد. اگر $st=sb$ آن گاه $v \in S$ هست که $u=sv$ و لذا

$$t = ut = svt = stv = sbv=svb=ub=b.$$

پس $S$ حذفی می‌باشد، حال با توجه به برهان قضیه [۴، قضیه ۳٫۶ $ii$]، $S$ یک گروه هست حال بنابر برهان قضیه ۲-۴، $S$ یک گروه میانگین‌پذیر می‌باشد.

۲→۳ فرض کنید $S$ گروه میانگین‌پذیر باشد، پس $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر است و لذا طبق [۱۵، قضیه ۳٫۶]، $\ell^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر است.

۳→۴ بدیهی است.

۴→۱ از این که $S$ تعویض‌پذیر است، $\ell^1(S,\omega)$ تعویض‌پذیر بوده و بنابر [۶، نتیجه ۳٫۴]، $\ell^1(S,\omega)$ شبه میانگین‌پذیر است.■

در ادامه گزاره‌ای در مورد شبه میانگین‌پذیری دوگان دوم جبرهای نیم‌گروهی وزندار تعویض‌پذیر اثبات می‌کنیم. نیم‌گروه تعویض‌پذیر $S$، را به طور ضعیف حذفی گوییم هر گاه برای هر $s,t \in S$، $s^{-1}t = \{u \in S \ : \ su = t\}$ متناهی باشد.

**گزاره ۳-۲.** فرض کنید $S$ نیم‌گروه تعویض‌پذیر به طور ضعیف حذفی ، $\omega$ وزن روی $S$ و $\omega \geq 1$ باشد. اگر $\ell^1(S)^{**}$ یکدار باشد ، آن گاه شرایط زیر معادلند:

۱) $\ell^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر و $S$ متناهی است.

۲) $\ell^1(S,\omega)^{**}$ میانگین‌پذیر است.

۳) $\ell^1(S,\omega)^{**}$ تقریباً میانگین‌پذیر است.

۴) $\ell^1(S,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر است.

**برهان.** ۱→۲ از این که $S$ متناهی است ، پس $\omega$ روی $S$ کراندار است و لذا $\ell^1(S,\omega) \cong \ell^1(S)$ و همچنین $\ell^1(S)$ متناهی‌البعد بوده و داریم $\ell^1(S) \cong \ell^1(S)^{**}$ . بنابراین $\ell^1(S,\omega)^{**}$ میانگین‌پذیر است.

۲→۳ بدیهی است.

۴→۳ از اینکه $S$ تعویض‌پذیر است، $\ell^1(S,\omega)$ تعویض‌پذیراست و لذا $\ell^1(S,\omega)^{**}$ نیز تعویض‌پذیر می‌باشد .حال بنابر [۶، نتیجه ۳,۴]، برهان کامل می‌شود.

۱→۴ در ابتدا ثابت می‌کنیم $S$ نیم‌گروهی متناهی است. اگر $\omega = 1$، $\ell^1(S,\omega)^{**} \cong \ell^1(S)^{**}$، حال طبق [۱۴، نتیجه ۳,۶]، وجود دارد $t \in S$ به طوری که $tS$ متناهی باشد. پس برای هر $s \in S$ ، بنابر فرض $t^{-1}S$ متناهی می‌باشد. به عبارتی دیگر، با توجه به این که $S = \cup\{t^{-1}s \ : \ s \in tS\}$، پس $S$ نیز متناهی می‌باشد. چون $\ell^1(S,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر است، $\ell^1(S,\omega)$ نیز شبه میانگین‌پذیر است حال بنابر قضیه ۳-۱ نتیجه می‌گیریم $\ell^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر است.■

## ۴. شبه میانگین‌پذیری برخی جبرهای نیم‌گروهی وزندار

در این قسمت، میانگین‌پذیری و شبه میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)$ را برای کلاس معینی از نیم‌گروه‌ها بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $S$ یک نیم‌گروه صفر چپ یا راست باشد، ثابت می‌کنیم که شبه میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)$ معادل با میانگین‌پذیری آن و این شرایط معادل با تک عضوی بودن $S$ است. همین طور نشان می‌دهیم بعضی نتایج زمانی که $S$ نیم‌گروه نواری مستطیلی و $\omega$ وزن جدایی‌پذیر باشد، برای $\ell^1(S,\omega)$ ، حفظ می‌شود. ما ثابت می‌کنیم $\ell^1(S,\omega)$ دوسطحی است هرگاه $S$ نیم‌گروه صفر چپ (راست) یا نیم‌گروه نواری مستطیلی باشد.

نیم‌گروه $S$، نیم‌گروه صفر چپ است هر گاه $st=s$ و نیم‌گروه صفر راست است هرگاه $st=t$ برای هر $s,t \in S$ . برای هر $f,g \in \ell^1(S,\omega)$ ، اگر $S$ نیم‌گروه صفر راست باشد، آن گاه $f * g = \varphi_S(f).g$ و هر گاه $S$ نیم‌گروه صفرچپ باشد، $f * g = \varphi_S(g).f$ که در آن $\varphi_S$ کاراکتر افزایشی روی $\ell^1(S,\omega)$ می‌باشد.

**گزاره ۴-۱.** فرض کنید $S$ یک نیم‌گروه صفر راست(چپ) و $\omega$ وزن روی $S$ باشد. آن گاه $\ell^1(S,\omega)$ دوسطحی است.

**برهان.** فرض کنید $S$ نیم‌گروه صفر راست باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\rho: \ell^1(S,\omega) \to \ell^1(S,\omega) \otimes \ell^1(S,\omega) \ , \qquad \rho(f) = \delta_{t_\cdot} \otimes f$$

که در آن $t_\cdot$ عضو دلخواهی از $S$ می‌باشد، آن گاه برای هر $f,g \in \ell^1(S,\omega)$ داریم:

$$\rho(f * g) = \delta_{t_\cdot} \otimes (f * g) = \varphi_S(f)\big(\delta_{t_\cdot} \otimes g\big) = \big(f * \delta_{t_\cdot}\big) \otimes g = f.\big(\delta_{t_\cdot} \otimes g\big) = f.\rho(g).$$

و به طور مشابه $\rho(f * g) = \rho(f).g$ . همچنین $\pi_\rho$، نگاشت همانی روی $\ell^1(S,\omega)$ می‌باشد. پس $\ell^1(S,\omega)$ دوتصویری است و می‌دانیم که هر جبر باناخ دوتصویری، دوسطحی می‌باشد، لذا $\ell^1(S,\omega)$ دوسطحی است. ■

**تعریف ۴-۲.** نیم گروه‌های $S_1$ و $S_2$ را در نظر بگیرید. گوییم وزن $\omega$ روی $S := S_1 \times S_2$، جدایی‌پذیر است، هر گاه دو وزن $\omega_1$ و $\omega_2$ به ترتیب روی $S_1$ و $S_2$ چنان موجود باشند که $\omega = \omega_1 \otimes \omega_2$ . به آسانی ثابت می‌شود :

$$\ell^1(S,\omega) \cong \ell^1(S_1,\omega_1) \otimes \ell^1(S_2,\omega_2).$$

**تعریف ۴-۳.** فرض کنید $S$ یک نیم‌گروه و $E(S) = \{p \in S \quad : \quad p^{2} = p\}$ ، گوییم $S$، نیم‌گروه نواری است، هرگاه $S = E(S)$. نیم‌گروه نواری $S$ که در آن $sts=s$ برای هر $s, t \in S$ ، نیم‌گروه نواری مستطیلی نامیده می‌شود.

برای هر نیم‌گروه نواری مستطیلی $S$ ، داریم $S \cong L \times R$ که در آن $L$ و $R$ به ترتیب نیم‌گروه های صفر چپ و راست هستند.

**گزاره ۴-۴.** فرض کنید $S$ یک نیم‌گروه نواری مستطیلی و $\omega$ یک وزن جدایی‌پذیر روی $S$ باشد، آن گاه $\ell^{1}(S, \omega)$ دوتصویری بوده و لذا دوسطحی است.

**برهان.** بنابر مطالب فوق و گزاره ۴-۱ و همینطور [۱۲، گزاره ۲,۴] ، واضح است. ■

**قضیه ۴-۵.** فرض کنید $S$، نیم‌گروه نواری مستطیلی و $\omega$ وزن جدایی‌پذیر روی $S$ باشد، آن گاه شرایط زیر معادلند:

۱) $\ell^{1}(S, \omega)$ شبه میانگین‌پذیر است.

۲) $S$ تک عضوی است.

۳) $\ell^{1}(S, \omega)$ میانگین‌پذیر است.

**برهان.** ۲→۱ فرض کنید $\ell^{1}(S, \omega)$ شبه میانگین‌پذیر باشد. از آنجا که $S$، نیم‌گروه نواری مستطیلی است پس نیم‌گروه صفر چپ $L$ و نیم‌گروه راست $R$ و وزن‌های $\omega_L$ و $\omega_R$ به ترتیب روی $L$ و $R$ چنان موجودند که $S \cong L \times R$ و $\omega = \omega_L \otimes \omega_R$. داریم:

$$\ell^{1}(S, \omega) \cong \ell^{1}(L, \omega_L) \otimes \ell^{1}(R, \omega_R).$$

بنابراین نگاشت $\theta: \ell^{1}(S, \omega) \to \ell^{1}(L, \omega_L)$ با ضابطه

$\theta(f \otimes g) = \varphi_R(g) f$ برای $f \in \ell^{1}(L, \omega_L)$ و $g \in \ell^{1}(R, \omega_R)$، یک اپی‌مورفیسم( برونسانی) از جبرهای باناخ می‌باشد که در آن $\varphi_R$ ، کاراکتر افزایشی روی $\ell^{1}(R, \omega_R)$ می‌باشد. از این که $\ell^{1}(L, \omega_L)$ شبه میانگین‌پذیر است لذا $\ell^{1}(L, \omega_L)$ ، همانی تقریبی راست و چپ دارد، لذا $L$ تک عضوی است زیرا نیم‌گروه صفر چپ است. به طور مشابه $R$ نیز تک عضوی است و لذا $S$ ، تک عضوی است.

۳→۲ فرض کنید $S$ تک عضوی باشد، بنابر [۳، قضیه ۳,۳]، $\ell^{1}(S)$ میانگین‌پذیر می‌باشد و لذا طبق [۱۵، قضیه ۳,۶] ، $\ell^{1}(S, \omega)$ میانگین‌پذیر است.

۱→۳ بدیهی است. ■

برای نیم‌گروه $S$ ، نیم گروه $S^{op}$ ، همان نیم‌گروه $S$ می باشد که حاصل ضرب در آن برعکس می‌شود.

**قضیه ۴-۶.** فرض کنید $S$ یک نیم‌گروه صفر راست (چپ) و $\omega$ وزن روی $S$ باشد، آن گاه شرایط زیر معادلند:

۱) $\ell^{1}(S, \omega)$ شبه میانگین‌پذیر است.

۲) $S$ تک عضوی است.

۳) $\ell^{1}(S, \omega)$ میانگین‌پذیر است.

**برهان.** فرض کنید $S$ یک نیم‌گروه صفر چپ باشد، در آن صورت $S^{op}$ یک نیم‌گروه صفر راست است. به راحتی می‌توان دید که $S \times S^{op}$ یک نیم‌گروه نواری مستطیلی است. حال قضیه قبل را برای نیم‌گروه نواری مستطیلی $S \times S^{op}$ با فرض $\omega_L = \omega_R = \omega$ به کار می‌بریم. ■

**۵. نتیجه‌گیری**

هرگاه $S$ یک نیم‌گروه معکوس باشد، میانگین‌پذیری، شبه میانگین‌پذیری و تقریباً میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)$، با هم معادلند و این شرایط معادل با متناهی بودن $E(S)$ و میانگین‌پذیر بودن هر زیر گروه ماکسیمال از $S$ می‌باشد. همچنین برای نیم‌گروه معکوس گسسته $S$ هرگاه $(E(S),\leq)$ به طور یکنواخت متناهی موضعی باشد، $\ell^1(S,\omega)^{**}$ شبه میانگین‌پذیر است، اگر و تنها اگر $\ell^1(S)$ شبه میانگین‌پذیر و $S$ متناهی باشد.

در ادامه اگر $S$ یک نیم‌گروه صفر چپ یا راست باشد، ثابت می‌شود که شبه میانگین‌پذیری $\ell^1(S,\omega)$ معادل با میانگین‌پذیری آن و این شرایط معادل با تک عضوی بودن $S$ است. همین طور بعضی نتایج زمانی که $S$ نیم‌گروه نواری مستطیلی و $\omega$ وزن جدایی‌پذیر باشد، برای $\ell^1(S,\omega)$ ، حفظ می‌شود. ثابت می‌شود $\ell^1(S,\omega)$ دو-سطحی است هر گاه $S$ نیم‌گروه صفر چپ (راست) یا نیم‌گروه نواری مستطیلی باشد.

## فهرست منابع

[۱] Y. Choi, F. Ghahramani and Y. Zhang, Approximate and pseudo-amenability of various classes of Banach algebras,J.Func. Anal. ۲۵۶(۲۰۰۹) ،۳۱۵۸-۳۱۹۱.

[۲] J . Duncan and I. Namioka, Amenability of inverse semigroup and their semigroup algebras, Proc. Royal- Soc . Edinburgh , Section A (۱۹۷۸) ،۳۰۹-۳۲۱.

[۳] M. Essmaili and A. Medghalchi , Biflatnese of certain semigroup algebras , Bulletin of the Iranian Mathematical society Vol . ۳۹ No . ۵(۲۰۱۳) , pp ۹۵۹-۹۶۹ .

[۴] M. Essmaili , M. Rostami , and A. R . Medghalchi, Pseudo-contractibility and Pseudo-amenability of semigroup algebrs, Arch . Math. ۹۷ (۲۰۱۱) ,۱۶۷ - ۱۷۷.

[۵] M . Essmaili ,M . Rostami, A. Pourabbas , Pseudo-amenability of certain semigroup algebras, Semigroup Forum ۸۲ (۲۰۱۱) , .۴۸۴-۴۷۸.

[ ۶] F. Ghahramani and Y. Zhang, Pseudo-amenability and pseudo-contractible Banach algebras , Math . Proc . Combridge philos . soc .۱۴۲ (۲۰۰۷) , ۱۲۳-۱۱۱.

[۷] A. Ya. Helemskii,Flat Banach modules and amenable algebras, Trans. Moscow Math. Soc. ۴۷(۱۹۸۵), ۲۲۴-۱۹۹.

[۸] B. E. Johnson, Approximate digonals and cohomology of certain annihilator Banach alebras, Amer. J.Math. ۹۴ (۱۹۷۲), ۶۹۸-۶۸۵.

[۹] B. E. Johnson, Cohomology in Banach algebras, Mem . Amer. Math. Soc. ۱۲۷ (۱۹۷۲).

[۱۰] W .D . Munn , A class of irrecucible matrix representations of an arbitrary inverse semigroup , Proc . Glasgow , math. Assoc . ۵ (۱۹۶۱) , ۴۸-۴۱ .

[۱۱] S. Naseri, Approximate amenability of weighted group algebras, International mathematical forum , vol , ۶ , ۲۰۱۱ , no . ۲ , ۵۶-۴۹.

[۱۲] P. Ramsden , Biflatness of semigroup algebras , Semigroup Forum ۷۹ (۲۰۰۹) , -۵۱۵ ۵۳۰.

[۱۳] M . Rostami , A. Pourabbas , M. Essmaili , Approximate amenability of certain inverse semigroup algebras, Acta Mathematica Scientia ۲۰۱۳, ۳۳B (۲) :۵۷۷-۵۶۵.

[۱۴] M. Soroushmehr .M. Rostami. M. Essmaili, On pseudo-amenability of commutative semigroup algebras and their second duals,semigroup Forum, Springer Science+Business Media, LLC ۲۰۱۷.

[۱۵] M. Soroushmehr, Weighted Ress matrix semigroup and their applications , Arch , Math , ۱۰۰ (۲۰۱۳) ۱۴۷-۱۳۹.