دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

نتایجی در زمینه وجود جواب برای مسائل تعادل

فاطمه لعل دولت آباد *

مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۰۶   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۱۵

چکیده

در این مقاله شرایط کافی برای وجود جوابِ مسئله تعادل را مطرح می‌کنیم. مسئله تعادل به صورت زیر بیان می‌شود:

فرض کنید K یک زیرمجموعه ناتهی از فضای توپولوژی E و $f:K\times K\to\mathbb{R}$. در مسئله تعادل هدف پیدا کردن $x^*\in K$ که به ازای هر $y\in K$، $f(x^*,y)\geq 0$.

این مسئله بسیار کلی است، به این معنی که در حالت خاص به‌عنوان مثال شامل، مسئله تکامل، مسائل نقطه ثابت، مسائل مینی ماکس، مسئله تعادل نَش در بازیهای غیرمشارکتی و مسائل بهینه‌سازی می‌باشد. یعنی، این مسئله، همه این مسائل را به شیوه‌ای ساده بیان می‌کند، و نتایج به دست آمده از هر یک از این مسائل را نیز می‌توان با تغییرات مناسب به مسائل تعادل توسیع داد. در این مقاله وجود جواب برای مسئله تعادل را - با شرایط جدید - بیان و اثبات می‌کنیم. در قضایایی که تاکنون برای مسائل تعادل اثبات شده، فرضیات تحدب و یکنوایی برای داده‌های مسئله در نظر گرفته شده است، ولی در این مقاله این فرضیات از داده‌های مسئله حذف شده است. نتایج ما، براساس رابطه بین اصل KKM و مسائل تعادل است به این ترتیب که روش اصلی اثبات وجود جواب، از طریق ساخت یک خانواده خاص از زیرمجموعه‌های یک فضای برداری توپولوژیکی هاسدورف است. در پایان، مثالی بیان می‌کنیم که در فرضیات جدید صادق باشد و قضایای اثبات شده را برای آن به کار می‌بندیم.

واژه‌های کلیدی: تحدب، مسئله تعادل، اصل KKM، مسئله مینیمم، یکنوایی.

* عهده‌دار مکاتبات:
Email: f_lael@bzte.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید K یک زیرمجموعه ناتهی از فضای توپولوژی E و $f:K\times K\to\mathbb{R}$. مسئله مورد بحث در این مقاله، مسئله تعادل نامیده می‌شود و با $EP(f,K)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱) یافتن $x^*\in K$ که $\forall y\in K$، $f(x^*,y)\geq ۰$.

مجموعه جواب $EP(f,K)$ با $S(f,K)$ نمایش داده می‌شود.

مسئله (۱) بسیار کلی است به این معنی که در حالت خاص به عنوان مثال شامل، مسئله تکامل، مسائل نقطه ثابت، مسائل مینی‌ماکس، مسئله تعادل نَش در بازی‌های غیرمشارکتی و مسائل بهینه‌سازی، می‌گردد. در واقع، مسئله (۱) همه این مسائل را به شیوه‌ای ساده بیان می‌کند، و نتایج به دست آمده از هر یک از این مسائل را می‌توان با تغییرات مناسب به مسائل تعادل توسیع داد.

جدیدا، برخی از مدل‌های عملی مهم در اقتصاد و مهندسی به صورت یک مسئله تعادل تنظیم شده است (به عنوان مثال، مراجع [۱، ۲، ۳، ۴] و منابع موجود در آن را ببینید). این نشان می دهد که مسئله تعادل اهمیت زیادی دارد.

۲- پیشینه تحقیق

مقالات سودمندی در مورد مسئله تعادل با تأکید بر نتایج وجودی، روش‌های حل و کاربردها وجود دارد. از آنجا که هدف اصلی این مقاله اثبات نتایج وجودی جدیدی است، در ادامه به فعالیت‌های انجام شده‌ی همسو با این مقاله، اشاره خواهیم کرد.

تاریخچه نتایج وجودی، برای مسئله تعادل به سال ۱۹۷۲ برمی‌گردد، یعنی همزمان است با اثبات نابرابری مینی‌ماکس کِی‌فن که در ادامه بیان و در [۵] اثبات شده است.

قضیه ۲-۱: فرض کنید K یک زیرمجموعه ناتهی، فشرده و محدب از فضای برداری توپولوژی هاسدورف است. فرض کنید که

الف. برای هر $y\in K$، $f(\cdot,y):K\to\mathbb{R}$ نیم‌پیوسته بالایی[۲] است.

ب. برای هر $x\in K$، $f(x,\cdot):K\to\mathbb{R}$ شبه-محدب[۳] است.

در این صورت $x^*\in K$ وجود دارد که

$$\inf_{y\in K} f(x^*,y)\geq \inf_{x\in K} f(x,x).$$

قضیه ۲-۱ وجود جواب به‌ازای K فشرده را ارائه می‌دهد. در حالت کلی، لم بعدی، که در [۶] اثبات شده، نقش اصلی را در به دست آوردن نتایج مشابه قضیه ۲-۱، بازی خواهد کرد. چنین قضایای وجودی، اساس ارتباط بین مسئله تعادل و مسئله تحدب است ([۱، ۴، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳])، که لم ۲-۲ ابزار نیرومندی است در صورتی که خانواده $\Phi(y)$ که در ادامه معرفی شده‌است، به درستی انتخاب شود. تاکید ما بر این است که لم ۲-۲ تعمیمی از اولین قضیه KKM است (مرجع [۱۴] را ببینید).

لم ۲-۲: فرض کنید Y یک زیرمجموعه ناتهی از یک فضای توپولوژی هاسدورف W است. برای هر $y\in Y$، زیرمجموعه بسته $\Phi(y)$ از W را در نظر بگیرید. فرض کنید که دو ویژگی زیر برقرار باشد.

الف. ترکیبات محدب از هر مجموعه متناهی $\{u_۱,\cdots,u_q\}$ از Y در $\bigcup_{i\in\{۱,\ldots,q\}}\Phi(u_i)$ قرار دارد.

ب. $\Phi(y)$ حداقل برای یک $y\in Y$ فشرده است.

در این صورت $\bigcap_{y\in Y}\Phi(y)\neq\varnothing$.

1. upper semi-continuous
2. quasi-convex

تعمیم‌هایی از قضیه ۲-۱، برای مثال در مراجع [۱،۴، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۵،۱۶، ۱۷]، وجود دارد که نویسنده تلاش می‌کند تا شرط فشردگی را کنار بگذارد و شرایط هسته را جایگزین کند به این منظور که فرضیات قضیه، ضعیفتر گردند و مسائل بیشتری پوشش داده شوند. همچنین حذف شرط فشردگی، این امکان را می‌دهد تا مثال‌های کاربردی بیشتری قابل حل گردند. در ادامه شرایط هسته که تاکنون برای مسئله تعادل معرفی شده است، لیست می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر، خواننده می‌تواند مراجع [۱، ۴، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲] را ببینید. مقایسه کامل بین شرایط هسته را می‌توان برای نمونه در [۴، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲] ببینید.

H۱: مجموعه ناتهی فشرده محدب $C \subset K$ وجود دارد که برای هر $u \in C/core_K C$ وجود دارد $a \in core_K C$ که $f(u,a) \le 0$، همچنین $core_K C$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a\in core_K C \Leftrightarrow (a\in C,\ C\bigcap]a,y[\neq \emptyset,\ \forall y\in K/C)$$

که $]a,y[=\{ta+(1-t)y: 0<t<1\}$.

H۲: زیرمجموعه ناتهی فشرده L از $\mathbb{R}^n$ و $y_0 \in L\bigcap K$ وجود دارد که برای هر $u\in K/L$ داریم، $f(u,y_0)<0$.

H۳: $r>0$ وجود دارد که برای هر $u\in K/\{v:\|v\|\le r\}$ حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار است:

الف. $y\in K$ وجود دارد که $\|y\|<\|u\|$ و $f(u,y)\le 0$.

ب. $y\in K\bigcap\{v\in\mathbb{R}^n:\|v\|\le r\}$ وجود دارد که $f(u,y)<0$.

H۳: برای هر دنباله $\{u_j\}\subseteq K$ که $\lim_{j\to+\infty}\|u_j\|=+\infty$، دنباله $\{v_j\}\subseteq K$ وجود دارد که برای j به اندازه کافی بزرگ، داریم $f(u_j,v_j)\le 0$ و $\|v_j\|<\|u_j\|$.

H۵: برای هر دنباله $\{u_j\}\subseteq K$ که $\lim_{j\to+\infty}\|u_j\|=+\infty$، $a\in K$ وجود دارد که برای j به اندازه کافی بزرگ، داریم $f(u_j,a)\le 0$.

H۶: برای هر دنباله $\{u_j\}\subset K$ که $\lim_{j\to+\infty}\|u_j\|=+\infty$ و برای هر j، $\|u_j\|<j$، $j_0 \in$ وجود دارد که برای هر $j\ge j_0$ رابطه زیر برقرار است:

$$f(u_j,y)\ge 0,\quad \forall y\in K/\{v:\|v\|\le j\}$$

به جای H۱-H۶، ما یک فرض را مطرح می‌کنیم و می‌گوییم یک مجموعه فشرده V و $w_1,\dots,w_q\in K$ وجود داشته باشد که $\bigcap_{i=1,\dots,q}\overline{\{x\in K: f(x,w_i)\ge 0\}}\subset V.$ ما در بخش ۵ مثالی ارائه خواهیم داد که در این فرض صدق می‌کند در حالی که در H۱-H۶ صدق نمی‌کند.

علاوه بر فرض فشردگی که برای دستیابی به نتایج جدیدِ وجودی، حذف آن ضروری است، فرض یکنوایی یکی دیگر از شرایط اساسی در این راستا است. با حذف چنین فرضیاتی می‌توانیم نتایجی بدست آوریم که برای دسته بزرگی از مسائل قابل استفاده باشد. در ادامه، معروف‌ترین فرضیات یکنوایی را که تا به حال استفاده شده است، لیست می‌کنیم.

M۱: برای هر $x,y\in K$، $f(x,y)+f(y,x)\le 0$.

M۲: برای هر $x,y\in K$، که $f(x,y)\ge 0$ داریم $f(y,x)\le 0$.

M۳: برای هر $x_1,\dots,x_m\in K$ که دو به دو متفاوت هستند و برای هر $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ مثبت که

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ داریم

$$\min_{1 \le i \le m} f(x_i, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j) < 0.$$

M۴: برای هر $x_1, \ldots, x_m \in K$ و $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0$ که $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k) \le 0.$$

M۵: $\overline{y} \in K$ وجود دارد که به ازای هر $x \in K$، $f(x, \overline{y}) \le 0$.

M۱ بعنوان شرط یکنوایی کلاسیک شناخته شده است، M۲ شرط شبه‌یکنوایی نامیده می‌شود در حالی که M۳ و M۴ شرایط شبه‌یکنوایی مناسب هستند. M۵ به این معنی است که مسئله تعادل مینتی[۴] دارای جواب است. در مرجع [۱۳] تفاوت و شباهت‌های بین M۱- M۵ بیان شده‌اند. توجه داشته باشید که در مرجع [۱۰] به نتایجی دست یافتند که نیاز به فرض یکنوایی در فضاهای اقلیدسی ندارند اما حداقل در یکی از شرایط H۴ یا H۵ صدق می‌کنند.

تا اینجا شرایط هسته، فشردگی و یکنوایی را بحث کردیم. در این بخش، به موضوعات تحدب، بسته بودن و نیم‌پیوسته بالایی خواهیم پرداخت. در تحدب فرض بر این است که K یک مجموعه محدب و به ازای هر $x \in K$، $f(x,.) : K \to \mathbb{R}$ یک تابع شبه‌محدب است. همچنین، منظور از بسته‌بودن این است که K یک مجموعه بسته و نیم‌پیوسته بالایی یعنی به ازای هر $y \in K$، تابع $f(., y) : K \to \mathbb{R}$ نیم‌پیوسته بالایی است. در واقع، چنین فرضیاتی به عنوان فرضیات مهم برای نتایجِ وجودی، در کنار فرض $f(x,x) \ge 0$ که $x \in K$، هستند [۱، ۴، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳].

در این مقاله، تلاش می‌کنیم، چنین فرضیاتی را حذف کنیم تا قادر به استفاده از نتایج اخیر در اصل KKM باشیم. این منجر به دستیابی به نتایج جدید، برای مسئله تعادل بدون نیاز به فرضیات تحدب، بسته بودن و نیم‌پیوسته بالایی می‌شود. در واقع، نتایج ما خانواده بزرگی از مسائل تعادل را پوشش می‌دهد. این موضوع در بخش ۴ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

حال رئوس مطالب این مقاله را مطرح می‌کنیم. بخش ۳ مقدمات و تعاریف اصلی مورد نیاز در این مقاله است. نتایج وجودی را در بخش ۴ ثابت می‌کنیم. در بخش ۵ با مقداری توضیح و مقایسه و برخی کاربردها، خط مشی را در مسئله مینی‌ماکس به پایان می‌رسانیم.

۳-مقدمات و تعاریف

در سراسر این مقاله، نمادهای زیر را به کار می‌بندیم. $\langle D \rangle$ نماد مجموعه‌های متناهی و ناتهی از مجموعه دلخواه D است. بستار و درون توپولوژیکی زیرمجموعه X از یک فضای توپولوژی به ترتیب با $\overline{X}$ و X° نمایش داده می‌شود. E یک فضای برداری توپولوژیکی هاسدورف است مگر اینکه خلاف آن تصریح شود. 2^E مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی E است. علاوه بر این، ترکیبات محدب مجموعه X در فضای برداری توپولوژی با $co(X)$ نمایش داده می‌شود.

تعاریف زیر در ادامه استفاده خواهند شد.

تعریف ۳-۱: فرض کنید n . مخروط نزولی مربوط به Δرا با Δ^{∞} نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta^{\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t_j \downarrow 0,\ \exists x_j \in \Delta;\ t_j x_j \to x\},$$

3. Minty equilibrium

که $t_j \downarrow 0$ یعنی یک دنباله نزولی از اعداد حقیقی مثبت است.

تعریف ۳-۲: مفهوم فضای محدب، سه‌تایی $(E,D;\Gamma)$ است که E یک فضای توپولوژی، D یک مجموعه دلخواه و $\Gamma:\langle D\rangle \to 2^E$ یک نگاشت مجموعه‌مقدار با مقادیر ناتهی است.

تعریف ۳-۳: فرض کنید $(E,D;\Gamma)$ یک فضای محدب و $G:\langle D\rangle \to 2^E$ یک تابع مجموعه‌مقدار است.

(i) G یک نگاشت KKM است اگر برای هر $M\in\langle D\rangle$، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\Gamma(M)\subset G(M)=\bigcup_{z\in M} G(z).$$

(ii) خانواده $\{G(z): z\in D\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است اگر برای هر $M\in\langle D\rangle$، رابطه $\bigcap_{z\in M} G(z)\neq\varnothing$ برقرار باشد.

(iii) G بسته-مقدار نامیده می‌شود اگر برای هر $z\in D$، $G(z)$ یک مجموعه بسته در E است.

(iv) $(E,D;\Gamma)$ در اصلKKM جزئی صدق می‌کند اگر برای هر نگاشتد KKM، $G:\langle D\rangle\to 2^E$ بسته-مقدار، خانواده $\{G(z): z\in D\}$ در خاصیت اشتراک متناهی صدق می‌کند.

(v) G در اصل اشتراک متناهی بسته صدق می‌کند هرگاه $\bigcap_{z\in D}\overline{G(z)}=\overline{\bigcap_{z\in D} G(z)}$.

(vi) G یک انتقال با اشتراک متناهی بسته نامیده می‌شود هرگاه $\bigcap_{z\in D}\overline{G(z)}=\bigcap_{z\in D} G(z)$. بنابراین هر انتقال با اشتراک متناهی بسته، در خاصیت اشتراک متناهی بسته صدق می‌کند.

قضیه ۳-۴: فرض کنید E یک فضای برداری توپولوژی هاسدورف است و $G:\langle D\rangle\to 2^E$ یک نگاشت بسته-مقدار است. فرض کنید که برای هر مجموعه $\{u_1,\dots,u_N\}\in\langle D\rangle$، مجموعه‌ی $\{v_1,\dots,v_N\}$ که (برخی از v_iها می‌توانند برابر باشند) در E وجود دارد که برای هر زیرمجموعه $\{v_{i_1},\dots,v_{i_l}\}$ از $\{v_1,\dots,v_N\}$، رابطه زیر برقرار است:

$$co(\{v_{i_1},\dots,v_{i_l}\})\subseteq \bigcup_{j=1,\dots,l} G(u_{i_j}),$$

در این صورت $\{G(z): z\in D\}$، دارای خاصیت اشتراک متناهی است.

اثبات: برای اثبات، مراجع [۱۸، ۱۹] را ببینید.

لم ۳-۵: فرض کنید $(E,D;\Gamma)$ که $\Gamma:\langle D\rangle\to 2^E$ در $\{u_1,\dots,u_N\}$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\Gamma(\{u_1,\dots,u_N\})=co(\{u_1,\dots,u_N\}) \qquad (2)$$

در این صورت فضای برداری توپولوژی هاسدورف E در اصل KKM جزئی صدق می‌کند.

اثبات: فرض کنید $\hat{G}:D\to 2^E$ یک نگاشت KKM بسته-مقدار است و $M=\{u_1,\dots,u_N\}\in\langle D\rangle$. اگر در قضیه ۳-۴ قرار دهیم $\{v_1,\dots,v_N\}=M$ در این صورت $\{\hat{G}(z): z\in D\}$ در خاصیت مقطع متناهی صدق می‌کند. به عبارت دیگر، چون Γ، تعریف شده در (۲)، به $\hat{G}$ وابسته نیست و $\hat{G}$ دلخواه است، پس در اصل KKM جزئی صدق می‌کند.

قضیه بعدی در تعمیم نتایج وجودی، نقش مهمی بازی می‌کند.

قضیه ۳-۶: فرض کنید $(E,D;\Gamma)$ یک فضای محدب است که در اصل KKM جزئی صدق

می‌کند. فرض کنید که $F : D \to ۲^E$ یک نگاشت مجموعه مقدار و $\overline{F} : D \to ۲^E$ یک نگاشت KKM است، که $\overline{F}$ در $z \in D$ به صورت زیر تعریف می‌شود $\overline{F(z)} = \overline{F}(z)$. علاوه بر این، فرض کنید که زیرمجموعه فشرده ناتهی V از E و مجموعه متناهی $M \in \langle D \rangle$ وجود دارد که $\bigcap_{z\in M} \overline{F(z)} \subset V$ در این صورت شرایط زیر برقرار هستند:

(i) اگر F انتقال بسته-مقدار است در این صورت $(\bigcap_{z\in D} F(z)) \bigcap V \neq \varnothing.$

(ii) اگر F اشتراک بسته-مقدار است در این صورت $\bigcap_{z\in D} F(z) \neq \varnothing.$

اثبات: مرجع[۲۰] را ببینید.

۴- حل مسئله

فرضیات زیر ابزاری کاربردی هستند که در این بخش استفاده خواهند شد. در واقع، نتایج معادل برای اشتراک بسته-مقدار و خاصیت انتقال بسته-مقدار در $EP(f,K)$ هستند.

A: برای هر $u \in K$ که

$$u \in \left[\left(\bigcup_{y\in K} \{x \in K : f(x,y) < ۰\}\right) \bigcup K^c\right]^{\circ}$$

$v \in K$ وجود دارد که

$$u \in \left[\left(\{x \in K : f(x,v) < ۰\}\right) \bigcup K^c\right]^{\circ}.$$

B: برای هر $v \in K$ که $\{x \in K : f(x,v) < ۰\} \neq \varnothing$ یا $v \in K^c$، $u \in K$ وجود دارد که

$$v \in (\{y \in K : f(u,y) < ۰\} \bigcup K^c)^{\circ}.$$

گزاره ۴-۱. فرض کنید $EP(f,K)$ بر E. $C : K \to ۲^E$ در y به صورت زیر تعریف شود:

$$C(y) = \{x \in K : f(x,y) \geq ۰\} \qquad (۳)$$

(i) اشتراک بسته-مقدار است اگر و تنها اگر **A** برقرار باشد.

(ii) C انتقال بسته-مقدار است اگر و تنها اگر **B** برقرار باشد.

اثبات: می‌دانیم $\overline{\bigcap_{y\in K} C(y)} \subset \bigcap_{y\in K} \overline{C(y)}$. بنابراین، C اشتراک بسته-مقدار است اگر و تنها اگر

$$\bigcap_{y\in K} \overline{C(y)} \subset \overline{\bigcap_{y\in K} C(y)} \qquad (۴)$$

رابطه‌ی (۴) معادل است با

$$\left(\overline{\bigcap_{y\in K} C(y)}\right)^c \subset \left(\bigcap_{y\in K} \overline{C(y)}\right)^c.$$

رابطه اخیر نیز برقرار است اگر و تنها اگر

$$\left[\left(\bigcap_{y\in K} C(y)\right)^c\right]^{\circ} \subset \bigcup_{y\in K} \left(\overline{C(y)}\right)^c \qquad (۵)$$

که از تساوی $\left(\overline{\bigcap_{y\in K} C(y)}\right)^c = \left[\left(\bigcap_{y\in K} C(y)\right)^c\right]^{\circ}$ در سمت چپ استفاده می‌کنیم. با استفاده از

$$\left(\overline{C(y)}\right)^c = \left[\left(C(y)\right)^c\right]^{\circ}$$

در سمت راست (۵) داریم

$$\left[\bigcup_{y\in K} \left(C(y)\right)^c\right]^{\circ} \subset \bigcup_{y\in K} \left[\left(C(y)\right)^c\right]^{\circ} \qquad (۶)$$

رابطه‌ی (۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left[\left(\bigcup_{y\in K}\{x\in K: f(x,y)<0\}\right)\bigcup K^c\right]^{\circ} \subset \bigcup_{y\in K}\left(\{x\in K: f(x,y)<0\}\bigcup K^c\right)^{\circ} \qquad (۷)$$

با توجه به (۷) این زیرمجموعه بودن، تنها در صورتی برقرار است که $\mathbf{A}$ برقرار باشد. و این اثبات (i) را کامل می‌کند.

اثبات (ii) را در مرجع [۲۱] می‌توان یافت.

قضیه ۴-۲. فرض کنید $EP(f,K)$ بر فضای برداری توپولوژی هاسدورف E داده شده است. فرض کنید که ویژگی‌های زیر برقرار باشند.

(i) برای هر زیرمجموعه متناهی $\{u_1,\dots,u_N\}$ از K، $\{v_1,\dots,v_N\}$ (برخی از v_iها می‌توانند برابر باشند) از K وجود دارد که برای هر زیرمجموعه $\{v_{i1},\dots,v_{il}\}$ از $\{v_1,\dots,v_N\}$ داشته باشیم که اگر $z\in co(\{v_{i1},\dots,v_{il}\})$ در این صورت دنباله $\{z_m\}$ از K وجود دارد که $z_m\to z$ در E وقتی که $m\to\infty$ و داریم

$$\max_{j=1,\dots,l} f(z_m,u_{i_j})\geq 0 \qquad m\geq 1$$

(ii) $\mathbf{A}$ برقرار است.

(iii) زیرمجموعه فشرده V و $w_1,\dots,w_q\in K$ وجود دارد که

$$\bigcap_{i=1,\dots,q}\overline{\{x\in K: f(x,w_i)\geq 0\}}\subset V$$

در این صورت داریم $S(f,K)\neq\varnothing$. علاوه بر این، اگر $\mathbf{B}$ برقرار باشد، در این صورت $S(f,K)\bigcap V\neq\varnothing$.

اثبات: قضیه ۳-۶ را به کار می‌بندیم تا به $S(f,K)\neq\varnothing$ برسیم، بدین منظور نگاشت مجموعه‌مقدار $C:K\to 2^E$ که در رابطه (۳) معرفی شده است را در نظر بگیرید. واضح است که

$$\bigcap_{y\in K} C(y)=S(f,K) \qquad (۸)$$

بنابراین، باید نشان دهیم که سمت چپ (۸) ناتهی است. در پایان، باید نشان دهیم که (i)-(iii) فرضیات قضیه ۳-۶ را برآورده می‌کند. قرار می‌دهیم $D=K$ و $F=C$ و تابع $\Gamma:\langle K\rangle\to 2^E$ در $\Gamma(M)=co(\{v_1,\dots,v_N\})$ به‌صورت $M=\{u_1,\dots,u_N\}$ برای هر $M\in\langle K\rangle$ که v_iها مانند (i) هستند، تعریف می‌شود. توجه داریم که با لم ۳-۵، $(E,K;\Gamma)$ در اصل KMM جزئی صدق می‌کند. سپس نشان می‌دهیم که $\overline{C}$ یک نگاشت KKM است، یعنی $\Gamma(M)\subset\overline{C}(M)$ که $M=\{u_1,\dots,u_N\}\in\langle K\rangle$. $z\in\Gamma(M)$ را انتخاب می‌کنیم. با (i) دنباله $\{z_m\}$ در K وجود دارد که $z_m\to z$ وقتی $m\to\infty$ که داریم

$$\max_{j=1,\dots,N} f(z_m,u_j)\geq 0 \qquad \forall m\geq 1$$

با استفاده از (۳)، نتیجه می‌گیریم که

$$z_m\in\bigcup_{j=1,\dots,N} C(u_j) \qquad \forall m\geq 1.$$

بنابراین،

$$z\in\overline{\bigcup_{j=1,\dots,N} C(u_j)}=\bigcup_{j=1,\dots,N}\overline{C(u_j)},$$

که چون z دلخواه است، نتیجه می‌دهد که $\Gamma(M)\subset\overline{C}(M)$. از اینرو $\overline{C}$ یک نگاشت KKM است. بعلاوه، این حقیقت که C اشتراک بسته‌مقدار است از گزاره ۴-۱ (i) به دست می‌آید. از سوی دیگر، با (iii) یک مجموعه فشرده V و $w_1,\dots,w_q\in K$ وجود دارد که $\bigcap_{i=1,\dots,q}\overline{C(w_i)}\subset V$.

حال قضیه ۳-۶ را به کار می‌بندیم تا نتیجه بگیریم که $\bigcap_{u\in K} C(u)\neq\varnothing$.

بعلاوه، با استفاده از گزاره ۴-۱ (ii) اگر $\mathbf{B}$ برقرار باشد، C انتقال بسته‌مقدار است. با استفاده از این استدلال نتیجه می‌گیریم که $S(f,K)\bigcap V\neq\varnothing$ و اثبات کامل می‌شود.

نتیجه ۴-۳. فرض کنید $EP(f,K)$ بر E تعریف شده است. فرض کنید همه ویژگی‌های (i) و (iii) در قضیه ۴-۲ برقرار باشد. اگر به ازای هر $y\in K$ و K بسته، $f(.,y):K$ یک تابع نیم‌پیوسته بالایی است، در این صورت $S(f,K)\bigcap V\neq\varnothing$.

اثبات: چون به ازای هر $y\in K$، $f(\cdot,y)$ نیم‌پیوسته بالایی است، $C(y)$ تعریف شده در (۳) به ازای هر $y\in K$ بسته است. این نشان می‌دهد که ویژگی $\mathbf{B}$ برقرار است. بنابراین تمام فرضیات قضیه ۴-۲ برقرار هستند، و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۵- مثال و مقایسه‌ها

در این بخش، ما می‌خواهیم نتایج وجودی خود را با مقایسه فرض‌های خود با مقالاتی که تاکنون ارائه شده، توضیح دهیم. در واقع، همانطور که در بخش ۱ قول داده شد، ما مثالی را بیان می‌کنیم که نتایج وجودی ما، نیازی به شرایطی که در ادامه ذکر می‌کنیم ندارند: یکنوایی (یعنی M۱-M۵)، هسته (یعنی H۱-H۶)، تحدب، بسته بودن، نیم‌پیوستگی بالایی و به ازای هر $x\in K$، شرط $f(x,x)\geq ۰$.

مثال بعد، نشان می‌دهد که نتایج وجودی ما بسیار قوی و کاربردی برای دسته بزرگی از مسائل تعادل هستند. علاوه بر این، ما نتایج وجود را برای مسائل نامحدب مینی‌ماکس نیز به دست می‌آوریم.

مثال ۵-۱: $EP(f,K)$ که $K=[-۲,۰)\bigcup(۰,۲]$ و

$$f(x,y)=\begin{cases}-۱ & K\bigcap\mathbb{Q}\\ ۱ & K\bigcap\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که مثال ۵-۱، نه بسته و نه محدب است. به ازای هر $y\in K$ داده شده، $f(.,y):K$ برای هر $K\cap Q^c$ نیم‌پیوسته بالایی نیست. شرط ’’به ازای هر $x\in K$، $f(x,x)\geq ۰$‘‘برقرار نیست. علاوه بر این، به ازای هر $x\in K$، $f(.,y):K$ شبه-محدب نیست. به عبارت دیگر، چون K کراندار است، شرایط H۱--H۶ برقرار هستند. اگر چه هیچ یک از شرایط یکنوایی برقرار نیستند. درنتیجه به آسانی می‌توان نشان داد که فرضیات قضیه ۴-۲ برقرار است. در واقع،

$S(f,K)=K\cap Q$

نتیجه‌گیری

در این مقاله ما شرایط کافی جدیدی که وجودِ جواب برای مسئله تعادل را تضمین می‌کند، بدون فرضیات تحدب و یکنوایی بر داده‌های مسئله، بیان کردیم. همچنین با طرح مثال و به کار بردن قضیه‌های اثبات شده در این مقاله، نشان دادیم که این قضایا بر مسائل زیاد حل‌نشده با قضایایی که تاکنون در مقالات مطرح شده است، قابل پیاده‌سازی است.

فهرست منابع

[1] E. Blum, W. Oettli. From optimization and variational inequalities to quilibrium problems. The Mathematics Student 63: 123-145(1994).

[2] A.N. Iusem, W. Sosa. New existence results for equilibrium problems, Nonlinear Analysis. 52: 621-635 (2003).

[3] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Academic Press, Dublin (1980).

[4] M. Nasri, W. Sosa. Generalized Nash games and equilibrium problems. Optimization 60: 1161-1170(2011).

[5] K. Fan. A minimax inequality and applications. In Inequality III (O. Shisha, editor). Academic Press, New York (1972).

[6] K. Fan. A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, Mathematische Annalen. 142: 305-310 (1961).

[7] G. Allen. Variational inequalities, complementarity problems and duality theorems. Journal of Mathematical Analysis and Applications 58: 1-10(1977).

[8] M. Bianchi, R. Pini. Coercivity conditions for equilibrium problems. Journal of Optimization Theory and Applications 124:79-92 (2005).

[9] H. Brezis, L. Nirenberg, G. Stampacchia. A remark on Ky Fan's minimax principle. Bollettino della Unione Matematica Italiana 6: 293-300 (1972).

[10] A.N. Iusem, G. Kassay, W. Sosa. An existence result for equilibrium problems with some surjectivity consequences. Journal of Convex Analysis 16: 807-826 (2009).

[11] A.N. Iusem, G. Kassay, W. Sosa. On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems. Mathematical Programming 116: 259-273(2009).

[12] W. Sosa. From Weierstrass to Ky Fan theorems and existence results on optimization and equilibrium problems. Pesquisa Operacional 33: 199-215 (2013).

[13] C. Yen. A minimax inequality and its application to variational inequalities. Pacifc Journal of Mathematics 97: 477-481 (1981).

[14] B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz. Ein Beweis des Fixpunktsatzes fr n-dimensionale Simplexe. Fundamenta Mathematicae 14: 132-137 (1929).

[15] M. Castellani, M. Giuli. Re_nements on existence results for relaxed quasimonotone equilibrium problems. Journal of Global ptimization, DOI10.1007/s10898-012-0021-2.

[16] A.P. Farajzadeha, J. Zafarani. Equilibrium problems and variational inequalities in topological vector spaces. Optimization 59: 485-499 (2010).

[17] I.V. Konnov, D.A. Dyabilkin. Nonmonotone equilibrium problems: coercivity conditions and weak regularization. Journal of Global Optimization 49: 575-587 (2011).

[18] S.S. Chang, Y. Zhang. Generalized KKM theorem and variational inequalities. Journal of Mathematical Analysis and Applications 159: 208-223 (1991).

[19] G. Kassay, I. Kolumban. On the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz and Ky Fan's theorem. ''Babes-Bolyai" University Preprint, Seminar on Mathematical Analysis 7: 87-100 (1990).

[20] S. Park. New generalizations of basic theorems in the KKM theory. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 74: 3000-3010 (2011).

[21] K.K. Tan, J. Yu, X. Z. Yuan. Some new minimax inequalities and applications to generalized games in H-spaces. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 24: 1457-1470 (1995),