

الگوریتم همگرای قوی برای حل یک مسئله تعادل و مسئله نقطه ثابت با استفاده از فاصله برگمن در فضاهای باناخ

مصطفی قدم پور^{۱*}، ابراهیم سوری^۲

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

^(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۱۷

چکیده

در این مقاله، با استفاده از فاصله برگمن، الگوریتم جدیدی از نوع تصویر برای یافتن یک عنصر مشترک از مجموعه جواب‌های یک مسئله تعادل و مجموعه‌ای از نقاط ثابت معرفی می‌کنیم. سپس همگرایی قوی دنباله تولید شده با الگوریتم در شرایط مناسب اثبات می‌گردد. در واقع ثابت می‌کنیم که دنباله تولید شده با این الگوریتم به تصویر یک نقطه روی اشتراک مجموعه نقاط ثابت و مجموعه جواب مسئله تعادل همگراست. برای این منظور یک شرط برگمن از نوع لیپ شیتس برای یک تابع دو متغیره شبه یکنوا معرفی می‌کنیم. در ادامه، به کاربردی از مسئله نابرابری تغییراتی می‌پردازیم، به صورتی که از نتایج خود برای تعیین یک نقطه مشترک از مجموعه جواب مسئله نابرابری تغییراتی و مجموعه نقاط ثابت نگاشت غیرانبساطی استفاده می‌کنیم. در پایان، با استفاده از نرم‌افزار متلب، یک مثال عددی برای نشان دادن عملکرد همگرایی الگوریتم اصلی ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: نابرابری تغییراتی، مسئله نقطه ثابت، نگاشت غیرانبساطی برگمن، فرشه دیفرانسیل پذیر، نقطه ثابت مجانبی

۱- مقدمه

فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی، C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته و محدب از X و $g: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره باشد که برای هر $x \in C$ ، $g(0, 0) = 0$. مسئله تعادل (EP) نسبت به g روی C به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(1) \quad \text{یافتن } y^* \in C \text{ به طوری که برای هر } x \in C, g(x, y^*) \leq 0.$$

مجموعه جواب مسئله تعادل (۱) را با $EP(g)$ نشان می‌دهیم.

نابرابری‌های تغییراتی در موضوعات مختلفی از جمله مسائل کنترل بهینه، بهینه‌سازی، نقطه ثابت، معادلات دیفرانسیل جزئی، مدل‌های مهندسی و تعادل کاربرد دارند. از این رو در سال‌های اخیر توسط بسیاری از نویسندگان مورد مطالعه قرار گرفته شده است (به [۱۴، ۱۵، ۲۹ و ۳۴] مراجعه کنید).

تادا و تاکاهاشی^۲ [۲۷] یک روش ترکیبی را برای یافتن عضو مشترک مجموعه جواب‌های مسئله تعادل یکنوای (۱) و مجموعه نقاط ثابت یک نگاشت غیرانبساطی ارائه دادند.

اسکندانی و همکاران^۳ [۱۳] با استفاده از الگوریتم‌های قبل یک روش تکرار جدید برای تقریب یک عضو مشترک از مجموعه جواب‌های مسائل تعادل و مجموعه نقاط ثابت یک خانواده از نگاشت‌های چند مقداری در فضاهای باناخ ارائه دادند. آنها نشان دادند که برای هر $x \in C$ ، نگاشت $y \rightarrow g(x, y) + D_f(x, y)$ دارای یک مینیمم کننده منحصر بفرد است که در آن $g(x, 0)$ سره، محدب و نیم پیوسته پایین است و D_f فاصله برگمن است.

اخیرا جولاسو و همکاران^۴ [۱۷]، تحت شرایط مناسب ثابت کردند که $x^* \in EP(g)$ اگر و تنها اگر x^* جواب مسئله مینیمم زیر باشد:

$$\min\{(x, y) + D_f(x, y) : y \in C\}.$$

در این مقاله، یک سیستم بازگشتی جدید از نوع تصویر برای تقریب یک نقطه مشترک از مجموعه جواب‌های یک مسئله تعادل و مجموعه نقاط ثابت یک نگاشت غیرانبساطی برگمن ارائه می‌دهیم که جوابی برای (۱) در فضاهای باناخ انعکاسی نیز می‌باشد. سپس با استفاده از نرم‌افزار متلب، نتیجه اصلی را با یک مثال عددی بررسی خواهیم کرد.

۲- پیش نیازها

فرض کنیم $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ یک تابع سازگار^۵، یعنی، یک تابع سره، محدب و نیم پیوسته پایین باشد. دامنه f ، مجموعه

$\{x \in X : f(x) < \infty\}$ است و آن را با $\text{dom } f$ نمایش می‌دهیم. مجموعه مینیمم کننده‌های f را با

$\text{Argmin } f$ نشان داده و اگر f تک عضوی باشد، عضو منحصر بفرد آن را با $\text{argmin}_{x \in X} f(x)$ نمایش

می‌دهیم.

فرض کنیم $f \in \text{int dom } f$ ، برای هر $x \in X$ ، مشتق جهتی f در x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^\circ(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}. \quad (2)$$

اگر حد (۲) وقتی $t \rightarrow 0$ برای هر y وجود داشته باشد، آنگاه f را در x گنتو دیفرانسیل پذیر^۶ گوئیم. تابع f را گنتو دیفرانسیل پذیر گوئیم، اگر برای هر $x \in \text{int dom } f$ گنتو دیفرانسیل پذیر باشد. f را در x فرشه

^۲ Tada and Takahashi

^۳ Eskandani et al

^۴ Jolaoso et al

^۵ Admissible function

^۶ Gâteaux differentiable

دیفرانسیبل پذیر^۷ نامیم، هرگاه حد (۲) وقتی $t \rightarrow 0$ برای هر $y \in X$ که $\|y\| = 1$ ، به طور یکنواخت موجود باشد. همچنین، f را روی زیر مجموعه C از X فرشه دیفرانسیل پذیر یکنواخت^۸ گوئیم، اگر حد مذکور در هر $x \in C$ و $y \in X$ که $\|y\| = 1$ ، به طور یکنواخت موجود باشد.

در این حالت، گرادیان f در x تابع خطی $\nabla f(x)$ است که برای هر $y \in X$ با $\langle y, \nabla f(x) \rangle := f^*(x, y)$ تعریف می‌شود.

فرض کنیم $x \in \text{int dom } f$ زیر دیفرانسیل^۹ f در x مجموعه محدب زیر است:

$$\partial f(x) = \{l \in X^* : f(x) + \langle y - x, l \rangle \leq f(y), \forall y \in X\}, \quad (3)$$

به همین صورت مزدوج فنچل^{۱۰} f تابع محدب $f^*: X^* \rightarrow (-\infty, \infty]$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^*(l) = \sup\{\langle l, x \rangle - f(x) : x \in X\}.$$

با استفاده از نامساوی یانگ-فنچل^{۱۱} اگر $\partial f(x)$ ناتهی باشد، آنگاه داریم

$$\langle l, x \rangle \leq f(x) + f^*(l), \quad \forall x \in X, l \in X^*,$$

و همچنین

$$f(x) + f^*(l) = \langle l, x \rangle \Leftrightarrow l \in \partial f(x).$$

فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی باشد، تابع f لژاندر است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$\text{int dom } f \neq \emptyset, \text{ گتئو دیفرانسیل پذیر باشد و } (L1)$$

$$\text{dom } \nabla f = \text{int dom } f.$$

$$\text{int dom } f^* \neq \emptyset, \text{ گتئو دیفرانسیل پذیر باشد و } (L2)$$

$$\text{dom } \nabla f^* = \text{int dom } f^*.$$

چون X یک فضای باناخ انعکاسی است، $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$ (۶، ص ۸۳). همچنین داریم $\nabla f = (\nabla f^*)^{-1}$ که همراه با شرایط (L1) و (L2) نتیجه می‌گیریم $\text{ran } \nabla f^* = \text{ran } \nabla f = \text{dom } \nabla f^* = \text{int dom } f^*$

$$\text{dom } \nabla f = \text{int dom } f.$$

علاوه بر این، اگر X انعکاسی باشد، آنگاه f لژاندر است اگر و تنها اگر f^* لژاندر باشد [۵، نتیجه ۵.۵].

فرض کنیم $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ یک تابع گتئو دیفرانسیل پذیر باشد. تابع دو متغیره $D_f: \text{dom} \times [0, +\infty]$ را با

$$D_f(y, x) := f(y) - f(x) - \langle y - x, \nabla f(x) \rangle. \quad (4)$$

تعریف شده است، فاصله برگمن نسبت به f نامیده می‌شود [۲۱]. فاصله برگمن ویژگی‌های شناخته شده یک متر را برآورده نمی‌کند. به وضوح $D_f(x, x) = 0$ ، اما $D_f(y, x) = 0$ لزوماً $x = y$ را نتیجه نمی‌دهد، ولی وقتی f لژاندر باشد، این نتیجه برقرار است [۵، قضیه ۷.۳]. مدول کاملاً محدب در $x \in \text{int dom } f$ تابع

$$\vartheta_f(x, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\vartheta_f(x, t) := \inf\{D_f(y, x) : y \in \text{dom } f, \|y - x\| = t\}.$$

تابع f را در $x \in \text{int dom } f$ کاملاً محدب گوئیم، اگر برای هر $t > 0$ ، $\vartheta_f(x, t)$ مثبت باشد [۹]. فرض کنیم C زیر مجموعه‌ای ناتهی از X باشد. مدول تابع کاملاً محدب f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

^۷ Fréchet differentiable

^۸ Uniformly Fréchet differentiable

^۹ Subdifferential

^{۱۰} Fenchel conjugate

^{۱۱} Young-Fenchel inequality

$$\vartheta_f(C, t) = \inf\{\vartheta_f(x, t) : x \in C \cap \text{int dom } f\}.$$

تابع f را روی زیر مجموعه‌های کراندار، کاملاً محدب گوییم هرگاه برای هر زیر مجموعه کراندار و ناتهی C و هر $t > 0$ ، $\vartheta_f(C, t)$ مثبت باشد.

گزاره ۱. [۹] فرض کنیم f یک تابع محدب نیم پیوسته پایین با شرط $\text{int dom } f \neq \emptyset$ باشد. آنگاه تابع f در نقطه $x \in \text{int dom } f$ دیفرانسیل پذیر است اگر و تنها اگر $\partial f(x)$ یک مجموعه تک نقطه‌ای باشد.

تعریف ۱. [۱۰] فرض کنیم X یک فضای باناخ و $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ یک تابع محدب باشد. تابع f را دنباله‌ای سازگار^{۱۲} گوییم اگر برای هر دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X ، به طوری که اولی کراندار باشد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_f(y_n, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = 0.$$

لم ۱۰۲ [۲۳] اگر $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ فرشه دیفرانسیل پذیر یکنواخت باشد و روی زیر مجموعه‌های کراندار X ، کراندار باشد، آنگاه ∇f روی زیر مجموعه‌های کراندار X ، از توپولوژی قوی X به توپولوژی قوی X^* پیوسته یکنواخت است.

لم ۲۰۲ [۹] اگر $\text{dom } f$ حداقل دو نقطه داشته باشد، آنگاه تابع f روی زیر مجموعه‌های کراندار X کاملاً محدب است اگر و تنها اگر تابع f دنباله‌ای سازگار باشد.

لم ۳۰۲ [۸] فرض کنیم $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ یک تابع لژاندر باشد، در این صورت f روی زیر مجموعه‌های کراندار، کاملاً محدب است اگر و تنها اگر f روی زیر مجموعه‌های کراندار، محدب یکنواخت باشد.

لم ۴۰۲ [۲] فرض کنیم $f : X \rightarrow Y$ در هر نقطه از X گتئو دیفرانسیل پذیر باشد. اگر $u, v \in X$ به طوری که $[u, v] \subset X$ ، آنگاه

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \sup\{\|d_G f(w)\| : w \in [u, v]\} \|u - v\|,$$

که $d_G f(w)$ را گتئو دیفرانسیل f در w گوییم.

لم ۵۰۲ [۲۴] فرض کنیم $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع لژاندر باشد به طوری که ∇f^* روی زیر مجموعه‌های کراندار $\text{int dom } f^*$ کراندار باشد و $x \in X$ ، در این صورت اگر $\{D_f(x, x_n)\}$ کراندار باشد، آنگاه دنباله $\{x_n\}$ نیز کراندار است.

لم ۶۰۲ [۲۳] فرض کنیم f روی $\text{int dom } f$ گتئو دیفرانسیل پذیر و کاملاً محدب باشد،

$x \in \text{int dom } f$ و $C \subset \text{int dom } f$ یک مجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب باشد. اگر $\hat{x} \in C$ ، آنگاه شرایط زیر معادل‌اند:

(الف) بردار $\hat{x} \in C$ تصویر برگمن X روی C نسبت به f است.

(ب) بردار $\hat{x} \in C$ جواب منحصر بفرد نابرابری تغییراتی زیر است:

$$\langle z - y, \nabla f(z) - \nabla f(x) \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

(پ) بردار $\hat{x} \in C$ جواب منحصر بفرد نابرابری زیر است:

$$D_f(y, z) + D_f(z, x) \leq D_f(y, x), \quad \forall y \in C.$$

تابع $V_f : X \times X^* \rightarrow [0, +\infty]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_f(x, x^*) = f(x) - \langle x, x^* \rangle + f^*(x^*), \quad \forall x \in X, x^* \in X^*. \quad (۵)$$

^{۱۲} Sequentially consistent

پس

$$V_f(x, x^*) = D_f(x, \nabla f^*(x^*)), \quad \forall x \in X, x^* \in X^*.$$

همچنین با استفاده از نابرابری زیر دیفرانسیل برای هر $x \in X$ و $x^*, y^* \in X^*$ (به [۱۸] مراجعه کنید):

$$V_f(x, x^*) + \langle \nabla f^*(x^*) - x, y^* \rangle \leq V_f(x, x^* + y^*).$$

از آنجا که V_f در مولفه دوم محدب است، لذا برای هر $x \in X$ داریم

$$D_f(z, \nabla f^*(\sum_{i=1}^N t_i \nabla f(x_i))) \leq \sum_{i=1}^N t_i D_f(z, x_i),$$

که $\{x_i\} \subset X$ و $\{t_i\} \subset (0, 1)$ با $\sum_{i=1}^N t_i = 1$.

تصویر برگمن $\text{proj}_C^f: \text{int}(\text{dom } f) \rightarrow C$ به صورت بردار منحصر بفرد $\text{proj}_C^f(x) \in C$ تعریف می‌شود که در معادله زیر صدق می‌کند [۷]

$$D_f(\text{proj}_C^f(x), x) = \inf \{D_f(y, x) : y \in C\}. \quad (۶)$$

فرض کنیم X فضای باناخ، $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ و برای هر $r > 0$ $B_r := \{y \in X : \|y\| \leq r\}$ تابع $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ را روی زیر مجموعه‌های کراندار X محدب یکنواخت گوییم، اگر برای هر $t \geq 0$ ، $x, t > 0$ که $\rho_r(t) > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_r = \inf_{x, y \in B_r, \|x-y\|=t, \alpha \in (0, 1)} \frac{\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - f(\alpha x + (1-\alpha)y)}{\alpha(1-\alpha)}.$$

را تابع مقیاس f می‌نامند [۳۳].

فرض کنیم X یک فضای باناخ، $r > 0$ یک عدد ثابت و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع محدب یکنواخت روی زیر مجموعه‌های کراندار X باشد. در این صورت برای هر $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ، $\alpha_k \in (0, 1)$ و

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = 1 \quad \text{با } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$f(\sum_{k=0}^n \alpha_k x_k) \leq \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k) - \alpha_i \alpha_j \rho_r(\|x_i - x_j\|). \quad (۷)$$

تابع f را روی X بازدارنده^{۱۳} گوییم، هرگاه مجموعه زیر سطح^{۱۴} f کراندار باشد، به طور معادل،

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{تابع } f \text{ را روی } X \text{ بازدارنده قوی}^{۱۵} \text{ گوییم، اگر } \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \infty.$$

تابع f را روی زیر مجموعه‌های کراندار، هموار یکنواخت گوییم، هرگاه برای هر $r > 0$ ، $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma_r(t)}{t} = 0$ که

$\sigma_r: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma_r(t) = \sup_{x, y \in B_r, \|x-y\|=t, \alpha \in (0, 1)} \frac{\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - f(\alpha x + (1-\alpha)y)}{\alpha(1-\alpha)}.$$

برای هر $t > 0$ [۳۳، ۱۶].

گزاره ۰.۲ [۳۳] فرض کنیم $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد که بازدارنده قوی است. در این صورت موارد زیر معادل هستند:

(الف) f روی زیر مجموعه‌های کراندار X ، کراندار و هموار یکنواخت است.

(ب) f فرشه دیفرانسیل پذیر است و ∇f روی زیر مجموعه‌های کراندار X پیوسته یکنواخت نرم-نرم است.

^{۱۳} Coercive

^{۱۴} Sublevel set

^{۱۵} Strongly coercive

(ب) $dom f^* = X^*$ ، f^* بازدارنده قوی است و روی زیر مجموعه‌های کراندار X^* محدب یکنواخت است.
 گزاره ۳.۳ [۳۳] فرض کنیم $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد که روی زیر مجموعه‌های کراندار X کراندار است. در این صورت موارد زیر معادل هستند:

- (الف) f تابعی بازدارنده قوی است و روی زیر مجموعه‌های کراندار X محدب یکنواخت است.
 (ب) $dom f^* = X^*$ و f^* روی زیر مجموعه‌های کراندار X^* کراندار و هموار یکنواخت است.
 (پ) $dom f^* = X^*$ ، f^* فرشه دیفرانسیل پذیر است و ∇f^* روی زیر مجموعه‌های کراندار X^* پیوسته یکنواخت نرم-نرم است.

گزاره ۸.۲ [۳۰] فرض کنیم C زیر مجموعه‌ای ناتهی و محدب از X باشد و $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد که روی C زیر دیفرانسیل پذیر است. در این صورت f مینیمم خود را در $x \in C$ اختیار می‌کند اگر و تنها اگر $0 \in \partial f(x) + N_C(x)$ ، که $N_C(x)$ مخروط نرمال C در x است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_C(x) := \{x^* \in X^* : \langle x - y, x^* \rangle \geq 0, \forall y \in C\}. \quad (۸)$$

اگر f و g دو تابع محدب روی X باشند به طوری که f در نقطه $x \in dom f \cap dom g$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x), \quad \forall x \in X. \quad (۹)$$

در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم $g : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

- (B۱) g یکنوا است، یعنی برای هر $x, y \in C$ ، $g(x, y) + g(y, x) \leq 0$.
 (B۲) g شبه یکنوا^{۱۶} است، یعنی برای هر $x, y \in C$ ، $g(x, y) \leq 0 \Rightarrow g(y, x) \leq 0$.
 (B۳) g یک تابع پیوسته از نوع لیپ شیتس است، یعنی ثابت‌های c_1 و c_2 چنان موجوداند که برای هر $x, y, z \in C$

$g(x, y) + g(y, z) \geq g(x, z) - c_1 D_f(y, x) - c_2 D_f(z, y)$ ،
 به طوری که $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ یک تابع لژاندر است. ثابت‌های c_1 و c_2 ضرایب لیپ شیتس-برگمن نسبت به f هستند.

- (B۴) g روی $C \times C$ پیوسته ضعیف است.
 (B۵) برای هر ثابت $x \in C$ ، $g(x, \cdot)$ محدب، نیم پیوسته پایین و زیر دیفرانسیل پذیر روی C است.
 (B۶) برای هر ثابت $x \in C$

$$\limsup_{t \downarrow 0} g(tx + (1 - t)y, z) \leq g(y, z).$$

تذکره ۱. [۳۲] هر تابع دو متغیره یکنوا روی C ، شبه یکنوا است اما عکس آن درست نیست. یک نگاشت $A : X \rightarrow X^*$ شبه یکنوا است اگر و تنها اگر تابع دو متغیره $g(x, y) = \langle Ax, y - x \rangle$ روی C شبه یکنوا باشد.

نگاشت $T : C \rightarrow C$ غیرانبساطی برگمن نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in C$ ، $D_f(Tx, Ty) \leq D_f(x, y)$.

^{۱۶} Pseudomonotone

گزاره ۱۰۰۲ [۱۳] فرض کنیم C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته و محدب از فضای باناخ انعکاسی X و $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع لژاندر و بازدارنده قوی و $g : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره باشد که در $(B_2) - (B_5)$ صدق کند. و $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ دنباله‌هایی باشند که به صورت زیر تولید شوند

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{argmin}\{\lambda_n g(x_n, y) + D_f(y, x_n) : y \in C\}, \\ z_n = \operatorname{argmin}\{\lambda_n g(y_n, y) + D_f(y, x_n) : y \in C\}, \end{cases} \quad (10)$$

به طوری که $\{x_n\} \subset C$ و $\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$ ، آنگاه برای هر $x^* \in EP(g)$ داریم
 $D_f(x^*, z_n) \leq D_f(x^*, x_n) - (1 - \lambda_n c_1) D_f(y_n, x_n) - (1 - \lambda_n c_2) D_f(z_n, y_n)$.
 لم ۷۰۲ [۳۱] فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد نامنفی باشد که در نابرابری زیر صدق کند:

$$a_{n+1} \leq (1 - \alpha_n) a_n + \alpha_n \sigma_n, \quad \forall n \geq 0, \quad \text{که}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty \text{ و } \{\alpha_n\} \subset [0, 1] \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \sigma_n| < \infty \text{ یا } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq 0 \quad (\text{ب})$$

در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

لم ۸۰۲ [۱۹] فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد به طوری که زیر دنباله $\{n_i\}$ از $\{n\}$ وجود داشته باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $a_{n_i} < a_{n_i+1}$. در این صورت زیر دنباله $\{m_k \subset \mathbb{N}\}$ چنان موجود است که $m_k \rightarrow \infty$ و ویژگی‌های زیر برای همه اعداد (به اندازه کافی بزرگ) $k \in \mathbb{N}$ برقرار هستند:

$$\begin{aligned} a_{m_k} &\leq a_{m_k+1}, & a_k &\leq a_{m_k+1}. \\ m_k &= \max\{j \leq k : a_j < a_{j+1}\} \end{aligned}$$

در حقیقت

۳- نتایج اصلی

در این بخش قضیه اصلی را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۰۳ فرض کنیم C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته و محدب از فضای باناخ انعکاسی X و $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع لژاندر، سازگار و بازدارنده قوی باشد که کراندار، فرشه دیفرانسیل پذیر یکنواخت و کاملاً محدب روی زیر مجموعه‌های کراندار X باشد. $g : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع دو متغیره در نظر می‌گیریم که در شرایط $(B_2) - (B_5)$ صدق کند و $S : C \rightarrow C$ یک نگاشت غیرانبساطی برگمن با $\hat{F}(S) = F(S)$ است و $\Omega = F(S) \cap EP(g) \neq \emptyset$. همچنین $\{x_n\}$ دنباله تولید شده با $x_1 \in C$ و $u \in X$

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{argmin}\{\lambda_n g(x_n, y) + D_f(y, x_n) : y \in C\}, \\ z_n = \operatorname{argmin}\{\lambda_n g(y_n, y) + D_f(y, x_n) : y \in C\}, \\ w_n = \nabla f^*(\gamma_{n,1} \nabla f(x_n) + \gamma_{n,2} \nabla f(z_n) + \gamma_{n,3} \nabla f(Sz_n)), \\ x_{n+1} = \overset{\leftarrow}{\operatorname{Proj}}_C \left(\nabla f^*(\alpha_n \nabla f(u) + (1 - \alpha_n)(\beta_n \nabla f(w_n) + (1 - \beta_n) \nabla f(Sw_n)) \right). \end{cases} \quad (11)$$

باشد که دنباله‌های $\{\alpha_n\}$ ، $\{\beta_n\}$ و $\{\lambda_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \{\alpha_n\} \subset (0, 1) \quad (\text{الف})$$

(ب) $\{\gamma_{n,i}\} \subset (0, 1)$ ، $\gamma_{n,1} + \gamma_{n,2} + \gamma_{n,3} = 1$ و برای هر $i \neq j$ و $1 \leq i, j \leq 3$ ، $\liminf \gamma_{n,i} \gamma_{n,j} > 0$.

(پ) $\{\lambda_n\} \subset [a, b] \subset (0, p)$ که $p = \min\{\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\}$ ضرایب برگمن-لیپ شیتس از g هستند.

(ت) $\{\beta_n\} \subset (0, 1)$ ، $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$.

در این صورت دنباله $\{x_n\}$ همگرایی قوی به $Proj_{\Omega}^f u$ است.

اثبات: ابتدا بررسی می‌کنیم که Ω زیر مجموعه‌ای بسته و محدب از C است. از [۱۳، قضیه ۲.۱۴] نتیجه می‌شود که $EP(g)$ یک زیر مجموعه بسته و محدب از C است. همچنین، به طور مشابه $F(S)$ زیر مجموعه‌ای بسته و محدب از C است [۳۰، قضیه ۳.۱]. بنابراین Ω زیر مجموعه‌ای بسته و محدب از C است.

فرض کنیم $\hat{u} = Proj_C^f u$ از (۸)، لم ۱۰.۲ و اینکه S روی C غیرانبساطی برگمن است، داریم

$$\begin{aligned} D_f(y, w_n) &= D_f\left(y, \nabla f^*\left(\gamma_{n,1}\nabla f(x_n) + \gamma_{n,2}\nabla f(z_n) + \gamma_{n,3}\nabla f(Sz_n)\right)\right) \\ &\leq \gamma_{n,1}D_f(\hat{u}, x_n) + \gamma_{n,2}D_f(\hat{u}, z_n) + \gamma_{n,3}D_f(\hat{u}, Sz_n) \\ &\leq \gamma_{n,1}D_f(\hat{u}, x_n) + \gamma_{n,2}D_f(\hat{u}, z_n) + \gamma_{n,3}D_f(\hat{u}, z_n) \\ &\leq D_f(\hat{u}, x_n) \end{aligned} \quad (۱۲)$$

اکنون از (۸)، قسمت (پ) لم ۶.۲ و اینکه S روی C غیرانبساطی برگمن است، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} D_f(\hat{u}, x_{n+1}) &\leq D_f(\hat{u}, \nabla f^*(\alpha_n \nabla f(u) + (1 - \alpha_n)\beta_n \nabla f(w_n) \\ &\quad + (1 - \alpha_n)(1 - \beta_n) \nabla f(Sw_n))) \\ &\leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + (1 - \alpha_n)\beta_n D_f(\hat{u}, w_n) \\ &\quad + (1 - \alpha_n)(1 - \beta_n) D_f(\hat{u}, Sw_n) \\ &\leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, w_n). \end{aligned} \quad (۱۳)$$

از (۱۲) و (۱۳) و داریم

$$\begin{aligned} D_f(\hat{u}, x_{n+1}) &\leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, x_n) \\ &\leq \max\{D_f(\hat{u}, u), D_f(\hat{u}, x_n)\} \end{aligned}$$

لذا، با استقرا نتیجه می‌گیریم

$$D_f(\hat{u}, x_{n+1}) \leq \max\{D_f(\hat{u}, u), D_f(\hat{u}, x_n)\}.$$

بنابراین می‌توان گفت دنباله $\{D_f(\hat{u}, x_n)\}$ کراندار است. بنابر لم ۳.۲، f یک تابع محدب یکنواخت روی زیر مجموعه‌های کراندار است. بنابراین شرط (الف) از گزاره ۳ برقرار است، به طور معادل شرط (ب) از این گزاره نیز برقرار است، یعنی f^* روی زیر مجموعه‌های کراندار X^* کراندار است. پس ∇f^* نیز روی زیر مجموعه‌های کراندار X^* کراندار است ([۷.۸، قضیه ۴]). بنابر لم ۵.۲، $\{x_n\}$ دنباله کراندار است. بنابر (۱۲)، لم ۱۰.۲ و کرانداری $\{D_f(\hat{u}, x_n)\}$ نتیجه می‌گیریم $\{D_f(\hat{u}, z_n)\}$ و $\{D_f(\hat{u}, w_n)\}$ کراندار هستند. لذا از لم ۱۰.۲ دنباله‌های $\{z_n\}$ و $\{w_n\}$ کراندار هستند. بنابراین $\nabla f(x_n)$ ، $\nabla f(z_n)$ و $\nabla f(w_n)$ کراندارند [۹، قضیه ۱.۱۰.۱۱]. بنابر الگوریتم (۱۱)،

$$\gamma_{n,3}\nabla f(Sz_n) = \nabla f(w_n) - \gamma_{n,1}\nabla f(x_n) - \gamma_{n,2}\nabla f(z_n).$$

پس طبق (ب)، $\nabla f(Sz_n)$ کراندار است.

چون f فرشه دیفرانسیل پذیر یکنواخت است و روی زیر مجموعه‌های X کراندار است، بنابر لم ۱۰.۲، ∇f روی زیر مجموعه‌های X پیوسته یکنواخت نرم-نرم است. همچنین طبق فرض، f تابعی کوآرسیو قوی و محدب است. لذا شرط (ب) گزاره ۲ برقرار است. به طور معادل شرط (پ) این قضیه نیز برقرار است. یعنی f^* روی زیر مجموعه‌های X^* محدب یکنواخت است. فرض کنیم

$r_1 = \sup\{\|\nabla f(z_n)\|, \|\nabla f(Sz_n)\|\}$ چون $\{\nabla f(z_n)\}$ و $\{\nabla f(Sz_n)\}$ دنباله‌هایی کراندار هستند، پس $r_1 < \infty$. لذا با استفاده از (۵)، (۶)، لم های ۷.۲، ۱۰.۲ و اینکه S روی C غیرانبساطی برگمن است، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} D_f(\hat{u}, w_n) &= V_f(\hat{u}, \gamma_{n,1}\nabla f(x_n) + \gamma_{n,2}\nabla f(z_n) + \gamma_{n,3}\nabla f(Sz_n)) \\ &= f(\hat{u}) - \langle \hat{u}, \gamma_{n,1}\nabla f(x_n) + \gamma_{n,2}\nabla f(z_n) + \gamma_{n,3}\nabla f(Sz_n) \rangle \\ &\quad + f^*(\gamma_{n,1}\nabla f(x_n) + \gamma_{n,2}\nabla f(z_n) + \gamma_{n,3}\nabla f(Sz_n)) \\ &\leq f(\hat{u}) - \gamma_{n,1}\langle \hat{u}, \nabla f(x_n) \rangle - \gamma_{n,2}\langle \hat{u}, \nabla f(z_n) \rangle - \gamma_{n,3}\langle \hat{u}, \nabla f(Sz_n) \rangle \\ &\quad + \gamma_{n,1}f^*(\nabla f(x_n)) + \gamma_{n,2}f^*(\nabla f(z_n)) + \gamma_{n,3}f^*(\nabla f(Sz_n)) \\ &\quad - \gamma_{n,2}\gamma_{n,3}\rho_{r_1}^*(\|\nabla f(z_n) - \nabla f(Sz_n)\|) \\ &= \gamma_{n,1}V_f(\hat{u}, \nabla f(x_n)) + \gamma_{n,2}V_f(\hat{u}, \nabla f(z_n)) + \gamma_{n,3}V_f(\hat{u}, \nabla f(Sz_n)) \\ &\quad - \gamma_{n,2}\gamma_{n,3}\rho_{r_1}^*(\|\nabla f(z_n) - \nabla f(Sz_n)\|) \\ &= \gamma_{n,1}D_f(\hat{u}, x_n) + \gamma_{n,2}D(\hat{u}, z_n) + \gamma_{n,3}D_f(\hat{u}, Sz_n) \\ &\quad - \gamma_{n,2}\gamma_{n,3}\rho_{r_1}^*(\|\nabla f(z_n) - \nabla f(Sz_n)\|) \\ &\leq \gamma_{n,1}D_f(\hat{u}, x_n) + \gamma_{n,2}D(\hat{u}, z_n) + \gamma_{n,3}D(\hat{u}, z_n) \\ &\quad - \gamma_{n,2}\gamma_{n,3}\rho_{r_1}^*(\|\nabla f(z_n) - \nabla f(Sz_n)\|) \\ &\leq D_f(\hat{u}, x_n) - \gamma_{n,2}\gamma_{n,3}\rho_{r_1}^*(\|\nabla f(z_n) - \nabla f(Sz_n)\|). \end{aligned} \quad (۱۴)$$

اکنون، فرض کنیم $k_n := \nabla f^*(\beta_n \nabla f(w_n) + (1 - \beta_n) \nabla f(Sw_n))$ بنابر (۸) و اینکه S روی C غیرانبساطی برگمن است، داریم

$$D_f(\hat{u}, k_n) \leq \beta_n D_f(\hat{u}, w_n) + (1 - \beta_n) D_f(\hat{u}, Sw_n) \leq \beta_n D_f(\hat{u}, w_n).$$

از این رو $D_f(\hat{u}, k_n)$ کراندار است. لذا از لم ۵.۲، نتیجه می‌گیریم $\{k_n\}$ کراندار است. پس $\{\nabla f(k_n)\}$ کراندار است. لذا با توجه به اینکه $(1 - \beta_n) \nabla f(Sw_n) = \nabla f(k_n) - \nabla f^*(\beta_n \nabla f(w_n))$ ، $\{\nabla f(Sw_n)\}$ کراندار است. به روشی مشابه، از (۵)، (۶)، (۱۲) و لم ۷.۲، عدد $r_2 = \sup\{\|\nabla f(w_n)\|, \|\nabla f(Sw_n)\|\}$ چنان موجود است که

$$D_f(\hat{u}, k_n) \leq D_f(\hat{u}, x_n) - \beta_n(1 - \beta_n)\rho_{r_2}^*(\|\nabla f(w_n) - \nabla f(Sw_n)\|).$$

لذا، بنابر (۱۳) و (۱۴)، داریم

$$\begin{aligned} D_f(\hat{u}, x_{n+1}) &\leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, x_n) \\ &\quad - (1 - \alpha_n) \gamma_{n,2} \gamma_{n,3} \rho_{r_1}^*(\|\nabla f(z_n) - \nabla f(Sz_n)\|). \end{aligned} \quad (۱۶)$$

همچنین از (۸)، (۱۵) و قسمت (پ) لم ۶.۲، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} D_f(\hat{u}, x_{n+1}) &\leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, k_n) \\ &\leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, x_n) \\ &\quad - (1 - \alpha_n) \beta_n (1 - \beta_n) \rho_{r_r}^* (\|\nabla f(w_n) - \nabla f(Sw_n)\|). \end{aligned}$$

بنابر (۸)، لم ۱۰.۲ و غیرانبساطی بودن S روی C داریم

$$\begin{aligned} D_f(y, w_n) &\leq \gamma_{n,1} D_f(\hat{u}, x_n) + \gamma_{n,2} D_f(\hat{u}, z_n) + \gamma_{n,3} D_f(\hat{u}, Sw_n) \\ &\leq \gamma_{n,1} D_f(\hat{u}, x_n) + \gamma_{n,2} D_f(\hat{u}, z_n) + \gamma_{n,3} D_f(\hat{u}, z_n) \\ &= \gamma_{n,1} D_f(\hat{u}, x_n) + (\gamma_{n,2} + \gamma_{n,3}) D_f(\hat{u}, z_n) \\ &\leq \gamma_{n,1} D_f(\hat{u}, x_n) + (\gamma_{n,2} + \gamma_{n,3}) (D_f(\hat{u}, x_n) \\ &\quad - (1 - \lambda_n c_1) D_f(y_n, x_n) - (1 - \lambda_n c_r) D_f(z_n, y_n)) \\ &= D_f(\hat{u}, x_n) - (\gamma_{n,2} + \gamma_{n,3}) ((1 - \lambda_n c_1) D_f(y_n, x_n) \\ &\quad + (1 - \lambda_n c_r) D_f(z_n, y_n)). \end{aligned} \quad (۱۸)$$

از (۱۳) و (۱۸)، داریم

$$\begin{aligned} D_f(\hat{u}, x_{n+1}) &\leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, w_n) \\ &\leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + (1 - \alpha_n) [D_f(\hat{u}, x_n) \\ &\quad - (\gamma_{n,2} + \gamma_{n,3}) ((1 - \lambda_n c_1) D_f(y_n, x_n) \\ &\quad + (1 - \lambda_n c_r) D_f(z_n, y_n))]. \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_n) (\gamma_{n,2} + \gamma_{n,3}) (1 - \lambda_n c_1) D_f(y_n, x_n) \\ \leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + D_f(\hat{u}, x_n) \\ - D_f(\hat{u}, x_{n+1}) - (1 - \alpha_n) (1 - \lambda_n c_r) D_f(z_n, y_n) \end{aligned} \quad (۱۹)$$

قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} h_n &:= \nabla f^*(\alpha_n \nabla f(u) + (1 - \alpha_n) (\beta_n \nabla f(w_n) + (1 - \beta_n) \nabla f(Sw_n))). \\ \text{اکنون با استفاده از (۶)، (۷)، (۸)، (۱۲)، قسمت (پ) لم ۶.۲ و اینکه } S \text{ روی } C \text{ غیرانبساطی برگمن است، داریم} \\ D_f(\hat{u}, x_{n+1}) &\leq D_f(\hat{u}, \nabla f^*(\alpha_n \nabla f(u) + (1 - \alpha_n) \nabla f(k_n))) \\ &= V_f(\hat{u}, \alpha_n \nabla f(u) + (1 - \alpha_n) \nabla f(k_n)) \\ &\leq V_f(\hat{u}, \nabla f^*(\alpha_n \nabla f(u) + (1 - \alpha_n) \nabla f(k_n)) - \alpha_n (\nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}))) \\ &\quad + \alpha_n \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \\ &= V_f(\hat{u}, (1 - \alpha_n) \nabla f(k_n) + \alpha_n \nabla f(\hat{u}) + \alpha_n \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle) \\ &= D_f(\hat{u}, \nabla f^*(\alpha_n \nabla f(\hat{u}) + (1 - \alpha_n) \nabla f(k_n))) + \alpha_n \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \\ &\leq \alpha_n D_f(\hat{u}, \hat{u}) + (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, k_n) + \alpha_n \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \\ &= (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, \nabla f^*(\beta_n \nabla f(w_n) + (1 - \beta_n) \nabla f(Sw_n))) \\ &\quad + \alpha_n \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_n) (\beta_n D_f(\hat{u}, w_n) + (1 - \beta_n) D_f(\hat{u}, Sw_n)) + \alpha_n \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_n) (\beta_n D_f(\hat{u}, w_n) + (1 - \beta_n) D_f(\hat{u}, w_n)) + \alpha_n \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \\ &= (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, w_n) + \alpha_n \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, x_n) + \alpha_n \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \end{aligned} \quad (۲۰)$$

همچنین، بنابر (۸)،

$$\begin{aligned} D_f(w_n, h_n) &\leq \alpha_n D_f(w_n, u) + (1 - \alpha_n)(\beta_n D_f(w_n, w_n) + (1 - \beta_n) D_f(w_n, Sw_n)) \\ &\leq \alpha_n D_f(w_n, u) + (1 - \alpha_n)(1 - \beta_n) D_f(w_n, Sw_n) \end{aligned} \quad (21)$$

اکنون دو حالت ممکن زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که برای هر $n \geq n_0$ دنباله‌ای غیر صعودی باشد. بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_f(\hat{u}, x_n) \text{ موجود است و } D_f(\hat{u}, x_n) - D_f(\hat{u}, x_{n+1}) \rightarrow 0$$

از (۱۹)، شرایط (الف)، (ب) و (پ)، نتیجه می‌گیریم $D_f(y_n, x_n) \rightarrow 0$. پس بنا بر لم ۲.۲ و کرانداري $\{x_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = 0. \quad (22)$$

و به روشی مشابه، بنابر (۱۹)، داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - y_n\| = 0. \quad (23)$$

با استفاده از (۲۲) و (۲۳)،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = 0. \quad (24)$$

از (۲۲) نتیجه می‌شود که $\{y_n\}$ کراندار است. اکنون بنابر (۱۶) و شرط (الف)،

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_n) \gamma_{n,2} \gamma_{n,3} \rho_{r_1}^* (\|\nabla f(z_n) - \nabla f(Sz_n)\|) \\ \leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + (1 - \alpha_n) D_f(\hat{u}, x_n) - D_f(\hat{u}, x_{n+1}) \\ \leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + D_f(\hat{u}, x_n) - D_f(\hat{u}, x_{n+1}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (25)$$

لذا، از شرط (ب) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{r_1}^* (\|\nabla f(z_n) - \nabla f(Sz_n)\|) = 0.$$

بعلاوه، ادعا می‌کنیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla f(z_n) - \nabla f(Sz_n)\| = 0$ ، اگر چنین نباشد، یک زیر دنباله $\{n_m\}$ از $\{n\}$ و عدد مثبت ϵ_1 وجود دارد به طوری که $\|\nabla f(z_{n_m}) - \nabla f(Sz_{n_m})\| \geq \epsilon_1$ بنابرین برای هر $m \in \mathbb{N}$

در $m \rightarrow \infty$ فرض کنیم. زیرا $\rho_{r_1}^* (\|\nabla f(z_{n_m}) - \nabla f(Sz_{n_m})\|) \geq \rho_{r_1}^* (\epsilon_1)$ نتیجه $\rho_{r_1}^* (\epsilon_1) \leq 0$ ، که با محدب یکنواخت بودن f^* روی زیر مجموعه‌های کراندار X^* در تناقض است. لذا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla f(z_n) - \nabla f(Sz_n)\| = 0.$$

پیوسته یکنواخت نرم-نرم است. بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - Sz_n\| = 0. \quad (26)$$

از (۱۷)، شرط (ت) و روشی مشابه بالا، داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - Sw_n\| = 0. \quad (27)$$

اکنون چون $\{x_n\}$ کراندار و X انعکاسی است، لذا با استفاده از [۲۸، قضیه ۱.۲.۱۴]، یک زیر دنباله $\{x_{n_m}\}$ از $\{x_n\}$ و یک نقطه $q \in X$ وجود دارد به طوری که $x_{n_m} \rightarrow q$ بنابر (۲۴)، $z_{n_m} \rightarrow q$ از این رو از (۲۶)، نتیجه می‌گیریم $q \in \hat{F}(S) = F(S)$.

اکنون، نشان می‌دهیم $q \in EP(g)$. برای این منظور، فرض کنیم $x, y \in \text{int dom } f$

ثابت می‌کنیم $\nabla f(x) - \nabla f(y) \in \partial_1 D_f(x, y)$ که $\partial_1 D_f(x, y)$ زیر دیفرانسیلی از $D_f(x, y)$ در مولفه

اول است. قرار می‌دهیم $\vartheta := \nabla f(x) - \nabla f(y)$. توجه می‌کنیم که برای هر $z \in \text{dom } f$

$$\begin{aligned} \cdot &\geq -D_f(z, x) = f(x) - f(z) - \langle x - z, \nabla f(x) \rangle \\ &= f(x) - f(z) - \langle x - z, \nabla f(y) \rangle - \langle x - z, \vartheta \rangle \\ &= f(x) - f(z) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle - \langle y - z, \nabla f(y) \rangle - \langle x - z, \vartheta \rangle \\ &= f(x) - f(y) - \langle x - y, \nabla f(y) \rangle + f(y) - f(z) - \langle y - z, \nabla f(y) \rangle - \langle x - z, \vartheta \rangle \\ &= D_f(x, y) - D_f(z, y) - \langle x - z, \vartheta \rangle. \end{aligned}$$

لذا برای هر $z \in \text{dom } f$

$$D_f(x, y) + \langle x - z, \vartheta \rangle \leq -D_f(z, y).$$

بنابراین، $\nabla f(x) - \nabla f(y) = \vartheta \in \partial_1 D_f(x, y)$ از طرف دیگر، با استفاده از این واقعیت که $D_f(\cdot, x)$ روی $\text{int dom } f$ محدب، دیفرانسیل پذیر و نیم پیوسته پایین است، از گزاره ۱ نتیجه می‌شود $\partial_1 D_f(x, y) = \{\nabla f(x) - \nabla f(y)\}$ چون

$$y_n = \text{argmin}\{\lambda_n g(x_n, y) + D_f(y, x_n) : y \in C\}$$

$$\begin{aligned} \cdot &\in \partial\{\lambda_n g(x_n, y_n) + D_f(y_n, x_n) : y \in C\} + N_C(y_n) \\ &= \lambda_n \partial_\tau g(x_n, y_n) + \partial_1 D_f(y_n, x_n) + N_C(y_n). \end{aligned}$$

پس $\xi_n \in \partial_\tau g(x_n, y_n)$ و $\eta_n \in N_C(y_n)$ وجود دارند به طوری که

$$\lambda_n \xi_n + \nabla f(y_n) - \nabla f(x_n) + \eta_n = 0. \quad (28)$$

چون $\eta_n \in N_C(y_n)$ بنابراین برای هر $z \in C$

$$\langle y_n - z, \eta_n \rangle \geq 0. \quad (29)$$

از (۲۸) و (۲۹)، نتیجه می‌گیریم برای هر $z \in C$

$$\begin{aligned} \langle y_n - z, -\lambda_n \xi_n - \nabla f(y_n) + \nabla f(x_n) \rangle \\ = \lambda_n \langle y_n - z, \xi_n \rangle - \langle y_n - z, \nabla f(y_n) - \nabla f(x_n) \rangle \end{aligned}$$

از این رو

$$\langle y_n - z, \nabla f(y_n) - \nabla f(x_n) \rangle \leq \lambda_n \langle y_n - z, \xi_n \rangle. \quad (30)$$

علاوه بر این، چون $\xi_n \in \partial_\tau g(x_n, y_n)$ لذا برای هر $z \in C$

$$g(x_n, y_n) - g(x_n, z) \leq \langle y_n - z, \xi_n \rangle. \quad (31)$$

اکنون، بنابر (۳۰) و (۳۱)، برای هر $z \in C$

$$\frac{1}{\lambda_n} [\langle y_n - z, \nabla f(y_n) - \nabla f(x_n) \rangle] \leq g(x_n, z) - g(x_n, y_n).$$

حال با جایگزینی n_m به جای n در نامساوی بالا، نتیجه می‌گیریم برای هر $z \in C$

$$\frac{1}{\lambda_{n_m}} [\langle y_{n_m} - z, \nabla f(y_{n_m}) - \nabla f(x_{n_m}) \rangle] \leq g(x_{n_m}, z) - g(x_{n_m}, y_{n_m}). \quad (32)$$

از (۲۲)، (۳۲)، لم ۱.۲، شرایط (پ)، (۴B) و این واقعیت که $x_{n_m} \rightarrow q$ وقتی $n \rightarrow \infty$ نتیجه می‌شود که برای هر $z \in C$ ، $g(q, z) \geq 0$ بنابر (۲B)، برای هر $z \in C$ ، $g(q, z) \leq 0$ یعنی $g(q, z) = 0$ بنابرین $q \in \Omega$.

توجه داریم که $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کراندارند و ∇f^* و ∇f به ترتیب روی زیر مجموعه‌های کراندار X و X^* کراندار هستند. پس $\{w_n\}$ کراندار است. به طور مشابه، نتیجه می‌گیریم که $\{k_n\}$ و $\{h_n\}$ کراندارند.

از لم ۴.۲، نابرابری های (۲۴)، (۲۶) و (۲۷)، داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_f(z_n, x_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} D_f(z_n, Sz_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} D_f(w_n, Sw_n) = 0. \quad (۳۳)$$

همچنین بنابر (۸)،

$$D_f(z_n, w_n) \leq \gamma_{n,1} D_f(z_n, x_n) + \gamma_{n,2} D_f(z_n, z_n) + \gamma_{n,3} D_f(z_n, Sz_n).$$

لذا (۳۳) ایجاب می کند $\lim_{n \rightarrow \infty} D_f(z_n, w_n) = 0$ بنابر لم ۲.۲،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - w_n\| = 0. \quad (۳۴)$$

حال با توجه به رابطه (۲۱) داریم

$$D_f(w_n, h_n) \leq \alpha_n D_f(w_n, u) + (1 - \alpha_n)(1 - \beta_n) D_f(w_n, Sw_n)$$

پس، چون $\{D_f(w_n, u)\}$ کراندار است، از شرایط (الف)، (ت) و (۳۳) نتیجه می شود $\lim_{n \rightarrow \infty} D_f(w_n, h_n) = 0$

چون $\{h_n\}$ کراندار است، بنابر لم ۲.۲، $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - h_n\| = 0$ بنابرین از (۲۴) و (۳۴)، داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - h_n\| = 0. \quad (۳۵)$$

اکنون، نشان می دهیم که $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \leq 0$ چون $\{x_n\}$ کراندار است، نتیجه

می گیریم که زیر دنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد که

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_{n_k} - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle.$$

چون $\{x_{n_k}\}$ کراندار است، لذا یک زیر دنباله $\{x_{n_{k_i}}\}$ از $\{x_{n_k}\}$ وجود دارد که به یک نقطه $\kappa \in \Omega$ همگرایی

ضعیف است. بدون این که از کلیت مطلب کاسته شود، می توان فرض کرد که $x_{n_{k_i}} \rightarrow \kappa$ بنابرین از لم ۶.۲، نتیجه می شود

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle = \langle \kappa - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle. \quad (۳۶)$$

اکنون از (۳۵) و (۳۶)،

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle h_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle = \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \leq 0. \quad (۳۷)$$

لذا، بنابر (۲۰)، (۳۷) و لم ۱۱.۲، $\lim_{n \rightarrow \infty} D_f(\hat{u}, x_n) = 0$ بنابرین از لم ۲.۲ بدست می آوریم، $x_n \rightarrow \hat{u}$

حالت ۲ فرض کنیم زیر دنباله $\{n_j\}$ از $\{n\}$ وجود دارد که برای هر $j \in \mathbb{N}$ ، $D_f(\hat{u}, x_{n_j+1}) \leq D_f(\hat{u}, x_{n_j})$

لذا، از لم ۱۲.۲، زیر دنباله $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$ موجود است که $m_k \rightarrow \infty$ و ویژگی های زیر برقرارند:

برای هر $k \in \mathbb{N}$

$$D_f(\hat{u}, x_{m_k}) \leq D_f(\hat{u}, x_{m_k+1}), \quad D_f(\hat{u}, x_k) \leq D_f(\hat{u}, x_{m_k+1}).$$

از (۱۹)، برای هر $k \in \mathbb{N}$

$$(1 - \alpha_{m_k})(\gamma_{m_k,2} + \gamma_{m_k,3})(1 - \lambda_{m_k} c_1) D_f(y_{m_k}, x_{m_k})$$

$$\leq \alpha_n D_f(\hat{u}, u) + D_f(\hat{u}, x_{m_k})$$

$$- D_f(\hat{u}, x_{m_k+1}) - (1 - \alpha_{m_k})(\gamma_{m_k,2} + \gamma_{m_k,3})(1 - \lambda_{m_k} c_1) D_f(z_{m_k}, y_{m_k}),$$

بنابرین با استفاده از (۳۸)، شرایط (الف)، (ب) و (پ) نتیجه می گیریم که وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $D_f(y_{m_k}, x_{m_k}) \rightarrow 0$

پس به کمک لم ۲.۲ و کرانداری $\{x_{m_k}\}$ بدست می آوریم $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{m_k} - x_{m_k}\| = 0$ به روشی مشابه،

از حالت ۱، داریم $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{m_k} - z_{m_k}\| = 0$ اکنون با همان استدلال حالت ۱ نتیجه می شود

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle h_{m_k} - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle = \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle x_{m_k} - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle$$

$$\leq 0. \quad (۳۹)$$

همچنین بنابر (۲۰) و (۳۸)،

$$\begin{aligned} D_f(\hat{u}, x_{m_k+1}) &\leq (1 - \alpha_{m_k})D_f(\hat{u}, x_{m_k}) + \alpha_{m_k}\langle h_{m_k} - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_{m_k})D_f(\hat{u}, x_{m_k+1}) + \alpha_{m_k}\langle h_{m_k} - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle, \\ &\text{پس } D_f(\hat{u}, x_{m_k+1}) \leq \langle h_{m_k} - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle. \text{ لذا، بنابر (۳۸)،} \\ D_f(\hat{u}, x_k) &\leq D_f(\hat{u}, x_{m_k+1}) \leq \langle h_{m_k} - \hat{u}, \nabla f(u) - \nabla f(\hat{u}) \rangle. \quad (۴۰) \end{aligned}$$

بنابر (۳۹) و (۴۰)، $\lim_{k \rightarrow \infty} D_f(\hat{u}, x_k) = 0$. لذا بنابر لم ۲.۲، وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $x_k \rightarrow \hat{u}$ و این اثبات را کامل می‌کند.

کاربردی از نابرابری تغییراتی

در این قسمت مسئله تعادل زیر را مطرح می‌کنیم که متناظر با تابع g تعریف شده است، برای هر $x, y \in C$ $g(x, y) = \langle y - x, Ax \rangle$ با عملگر $A: C \rightarrow X^*$. حال مسئله نابرابری تغییراتی زیر را تعریف می‌کنیم:

یافتن $z \in C$ به طوری که برای هر $y \in C$

$$\langle y - x, Ax \rangle \geq 0.$$

لم ۱.۴ [۱۳] فرض کنیم C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته و کراندار از فضای باناخ انعکاسی X ، $A: C \rightarrow X^*$ یک نگاشت و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع لژاندر باشد. در این صورت برای هر $x \in X$ ، $y \in C$ و $\lambda \in (0, +\infty)$

$$\leftarrow \text{Proj}_C^f(\nabla f^*[\nabla f(x) - \lambda A(y)]) = \operatorname{argmin}_{w \in C} \{ \lambda \langle w - y, A(y) \rangle + D_f(w, x) \}.$$

فضای p -محدب یکنواخت^{۱۷}، متریک و فاصله برگمن در رابطه زیر صدق می‌کند [۲۵].

$$c_p \|x - y\|^p \leq D_{\frac{1}{p}\|\cdot\|}^{\frac{1}{p}\|\cdot\|}(x, y) \leq \langle x - y, J_p(x) - J_p(y) \rangle,$$

که $c_p > 0$ یک عدد ثابت است. برای $p = 2$ ، نگاشت دوگان J_p را با J نشان می‌دهیم.

فرض کنیم X یک فضای باناخ هموار یکنواخت و محدب یکنواخت باشد و $\frac{1}{p}\|\cdot\|$ ، $f(\cdot) = \frac{1}{p}\|\cdot\|^p$ بنابرین $\nabla f = J$.

$$\leftarrow \text{Proj}_C^{\frac{1}{p}\|\cdot\|} = \Pi_C \text{ و } D_{\frac{1}{p}\|\cdot\|}^{\frac{1}{p}\|\cdot\|}(x, y) = \frac{1}{p}\phi(x, y)$$

همچنین اگر X یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $\nabla f = I$ و $D_{\frac{1}{p}\|\cdot\|}^{\frac{1}{p}\|\cdot\|}(x, y) = \frac{1}{p}\|x - y\|^2$ و

$$\leftarrow \text{Proj}_C^{\frac{1}{p}\|\cdot\|} = P_C \text{ که } P_C \text{ تصویر متریک است.}$$

با توجه به مطالب بالا قضیه زیر را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۴ فرض کنیم C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته و محدب از یک فضای باناخ هموار یکنواخت و 2 -محدب یکنواخت X است و $A: C \rightarrow X^*$ یک نگاشت یکنوا و پیوسته L -لیپ شیتس است. $S: C \rightarrow C$ را یک نگاشت غیرانبساطی در نظر می‌گیریم که $F(S) = \hat{F}(S) \neq \emptyset$ و $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$ و $\Omega = F(S)$ دنباله $\{x_n\}$ تولید شده با $x_1 \in C$

$$\begin{cases} y_n = \Pi_C[J^{-1}J(x_n) - \lambda_n A(x_n)], \\ z_n = \Pi_C[J^{-1}J(x_n) - \lambda_n A(y_n)], \\ w_n = J^{-1}(\gamma_{n,1}J(x_n) + \gamma_{n,2}J(z_n) + \gamma_{n,3}J(Sz_n)), \\ x_{n+1} = \Pi_C[J^{-1}(\alpha_n J(u) + (1 - \alpha_n)(\beta_n J(w_n) + (1 - \beta_n)J(Sw_n))). \end{cases}$$

است، که $\{\alpha_n\}$ ، $\{\beta_n\}$ و $\{\gamma_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

^{۱۷} p-uniformly convex

(الف) $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$

(ب) $\{\gamma_{n,i}\} \subset (0, 1)$ و $\gamma_{n,1} + \gamma_{n,2} + \gamma_{n,3} = 1$ و برای هر i و $1 \leq i, j \leq 3$ و $i \neq j$ $\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_{n,i} \gamma_{n,j} > 0$

(پ) $\{\lambda_n\} \subset [a, b] \subset (0, \frac{rc_p}{L})$ که (۴۱) داده شده است.

(ت) $\{\beta_n\} \subset (0, 1)$ و $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$

آنگاه دنباله $\{x_n\}$ همگرایی قوی به $\Pi_C u$ است.

اثبات :

فرض کنیم برای هر $x, y \in C$ $g(x, y) := \langle y - x, Ax \rangle$ اکنون نشان می‌دهیم تابع دو متغیره g در شرایط $(B5) - (B1)$ صدق می‌کند.

$(B1)$ g یکنوا است: g برای هر $x, y \in C$

$$g(x, y) + g(y, x) = \langle y - x, Ax \rangle + \langle x - y, Ay \rangle = -\langle x - y, Ax - Ay \rangle \leq 0.$$

$(B2)$ برای هر $x, y \in C$ g شبه-یکنوا است. زیرا g یکنوا است.

$(B3)$ بنابر (۴۱) و با استفاده از اینکه عملگر A پیوسته L -لیپ شیتس است، داریم

$$\begin{aligned} g(x, y) + g(y, z) - g(x, z) &= \langle y - x, Ax \rangle + \langle z - y, Ay \rangle \\ &= \langle y - z, Ax \rangle + \langle z - y, Ay \rangle \\ &= -\langle y - z, Ay - Ax \rangle \\ &\geq -\|Ay - Ax\| \|y - z\| \\ &\geq -L \|y - x\| \|y - z\| \\ &\geq -\frac{L}{2} \|y - x\|^2 - \frac{L}{2} \|y - z\|^2 \\ &\geq -\frac{L}{4c_p} \phi(y, x) - \frac{L}{4c_p} \phi(z, y). \end{aligned}$$

بنابراین g تابعی پیوسته از نوع برگمن لیپ شیتس است و نسبت به $\frac{1}{2} \|\cdot\|^2$ ، $f(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|^2$ ، $c_1 = c_2 = \frac{L}{4c_p}$.

$(B4)$ فرض کنیم $x, y \in C$ و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در C باشند که به ترتیب به نقاط x و y همگرایی ضعیف هستند،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n - x_n, Ax_n \rangle = \langle y - x, Ax \rangle = g(x, y).$$

$(B5)$ برای هر نقطه ثابت $x \in C$ ، $g(x, \cdot) = \langle \cdot - x, Ax \rangle$ ، $g(x, \cdot)$ محدب، نیم پیوسته پایین و زیر دیفرانسیل پذیر روی C است.

$(B6)$ برای هر $x, y, z \in C$

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} g(tx + (1-t)y, z) &= \limsup_{t \rightarrow 0} \langle z - tx - (1-t)y, A(tx + (1-t)y) \rangle \\ &= \langle z - y, Ay \rangle = g(y, z). \end{aligned}$$

لذا، به کمک لم ۱.۴ و قضیه ۱.۳ نتیجه دلخواه به دست می‌آید.

۴- نتایج عددی

فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ ، $C = [0, 2]$ و $f(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|^2$ تابع دو متغیره

$g: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای هر $x, y, z \in C$

$$g(x, y) := 16y^2 + 9xy - 25x^2.$$

بدیهی است که g به صورت زیر در شرایط (B۵) - (B۱) صدق می‌کند:

(B۱) g یکنوا است. برای هر $x, y \in C$

$$g(x, y) + g(y, x) = ۱۶y^۲ + ۹xy - ۲۵x^۲ + ۱۶x^۲ + ۹xy - ۲۵y^۲ \\ = -۹(x - y)^۲ \leq ۰.$$

(B۲) برای هر $x, y \in C$ شبه-یکنوا است، زیرا g یکنوا است.

(B۲) g پیوسته از نوع لیپ شیتس است با $c_۱ = c_۲ = ۹$:

$$g(x, y) + g(y, z) - g(x, z) \\ = ۱۶y^۲ + ۹xy - ۲۵x^۲ + ۱۶z^۲ + ۹yz - ۲۵y^۲ - ۱۶z^۲ - ۹xz + ۲۵x^۲ \\ = -۹(y^۲ - xy - yz + xz) \\ = -\frac{۹}{۲}(y^۲ - ۲xy + x^۲ + y^۲ - ۲yz + z^۲ - x^۲ + ۲xz - z^۲) \\ = -۹D_f(x, y) - ۹D_f(y, z) + ۹D_f(x, z) \\ \geq -D_f(x, y) - ۹D_f(y, z). \quad (۴۳)$$

(B۴) فرض کنیم $x, y \in C$ و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در C باشند که به ترتیب به نقاط x و y همگرایی ضعیف هستند (همگرایی ضعیف و قوی در $\mathbb{R}$ معادل است).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ۱۶y_n^۲ + ۹x_n y_n - ۲۵x_n^۲ = ۱۶y^۲ + ۹xy - ۲۵x^۲ = g(x, y).$$

(B۵) به وضوح برای هر نقطه ثابت $x \in C$ ، $g(x, \cdot)$ محدب، نیم پیوسته پایین و زیر دیفرانسیل پذیر روی C است.

(B۶) برای هر $x, y, z \in C$

$$\limsup_{t \rightarrow ۰} g(tx + (۱ - t)y, z) = \limsup_{t \rightarrow ۰} [۱۶z^۲ + ۹(tx + (۱ - t)y)z \\ - ۲۵(tx + (۱ - t)y)^۲] = g(y, z). \quad (۴۴)$$

نگاشت $S: C \rightarrow C$ را برای هر $x \in C$ به صورت $S(x) = \frac{x}{۳}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین، $F(S) = \{۰\}$ و برای هر $x, y \in C$

$$D_f(Sx, Sy) = D_f\left(\frac{x}{۳}, \frac{y}{۳}\right) \\ = f\left(\frac{x}{۳}\right) - f\left(\frac{y}{۳}\right) - \left\langle \frac{x}{۳} - \frac{y}{۳}, \frac{y}{۳} \right\rangle \\ = \frac{x^۲}{۱۸} - \frac{y^۲}{۱۸} - \frac{xy}{۹} + \frac{y^۲}{۹} \\ = \frac{۱}{۱۸}(x - y)^۲ \leq \frac{۱}{۲}(x - y)^۲ \\ = D_f(x, y),$$

لذا S غیرانبساطی برگمن است. فرض کنیم $p \in \hat{F}(S)$ ، آنگاه C شامل یک دنباله $\{x_n\}$ است به طوری که $x_n \rightarrow p$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (Sx_n - x_n) = ۰$ ، بنابراین $p = ۰$. پس $\hat{F}(S) = \{۰\} = F(S)$. اکنون، اگر $\mathcal{A}_n = \frac{۱}{۳۳}$ با استفاده از تعریف y_n در الگوریتم (۱۱)، داریم

$$y_n = \operatorname{argmin} \left\{ \frac{۱}{۳۳} g(x_n, y) + D_f(y, x_n) : y \in C \right\},$$

بنابراین، $y_n = \frac{۲۳}{۶۴} x_n$ به طور مشابه

$$z_n = \operatorname{argmin} \left\{ \frac{۱}{۳۳} g(y_n, y) + D_f(y, x_n) : y \in C \right\},$$

لذا، $z_n = \frac{1841}{(64)^2} x_n$ همچنین $w_n = \gamma_{n,1} x_n + \gamma_{n,2} z_n + \gamma_{n,3} z_n$ و

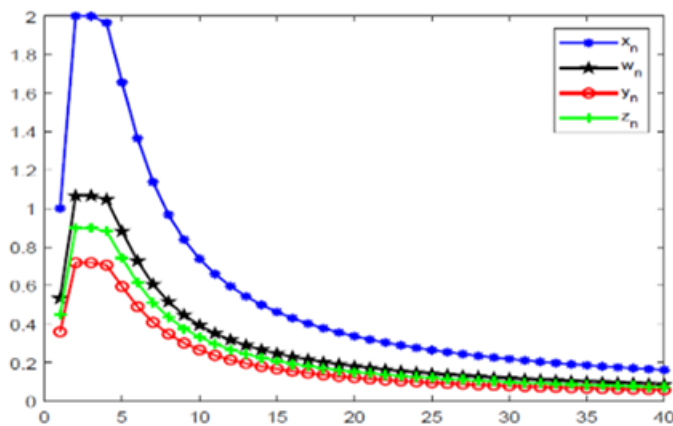
$$x_{n+1} = P_C(\alpha_n u + (1 - \alpha_n)(\beta_n w_n + (1 - \beta_n) \frac{w_n}{3}))$$

$$= P_C\left(\alpha_n u + (1 - \alpha_n)\left(\frac{2}{3}\beta_n + \frac{1}{3}\right)w_n\right).$$

اکنون با انتخاب $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ، $\beta_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ و $\gamma_{n,1} = \gamma_{n,2} = \gamma_{n,3} = \frac{1}{3}$ ، مقادیر جدول ۱ و شکل ۱ را با نقطه آغازین $x_1 = 5$ برای دنباله $\{x_n\}$ داریم.

جدول ۱: نتایج عددی از همگرایی برای $x_1 = 1$ و $u = 4$ در مثال ۵.

i	x_n	y_n	z_n	w_n
۱	۱,۰۰۰	۰,۳۵۹۴	۰,۴۴۹۵	۰,۵۳۳۱
۲	۲,۰۰۰	۰,۷۱۸۸	۰,۸۹۸۹	۱,۰۶۶۲
۳	۲,۰۰۰	۰,۷۱۸۸	۰,۸۹۸۹	۱,۰۶۶۲
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۹۹۸	۰,۰۰۶۲	۰,۰۰۲۲	۰,۰۰۲۸	۰,۰۰۳۳
۹۹۹	۰,۰۰۶۲	۰,۰۰۲۲	۰,۰۰۲۸	۰,۰۰۳۳
۱۰۰۰	۰,۰۰۶۲	۰,۰۰۲۲	۰,۰۰۲۸	۰,۰۰۳۳
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۱۹۹۸	۰,۰۰۳۱	۰,۰۰۱۱	۰,۰۰۱۴	۰,۰۰۱۷
۱۹۹۹	۰,۰۰۳۱	۰,۰۰۱۱	۰,۰۰۱۴	۰,۰۰۱۷
۲۰۰۰	۰,۰۰۳۱	۰,۰۰۱۱	۰,۰۰۱۴	۰,۰۰۱۷



شکل ۱: رفتار همگرایی دنباله تولید شده در مثال ۴

فهرست منابع

- [۱] R. P. Agarwal, D. Oregan, and D. R. Sahu, "Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications," vol. ۶, *Springer, New York.*, ۲۰۰۹.
- [۲] A. Ambrosetti, G. Prodi, "A Primer of Nonlinear Analysis" *Cambridge University Press, Cambridge.*, ۱۹۹۳.
- [۳] P.N. Anh, "A hybrid extragradient method for pseudomonotone equilibrium problems and fixed point problems," *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. ۳۶, no. ۱, pp. ۱۰۷-۱۱۶, ۲۰۱۳.
- [۴] H. H. Bauschke, J. M. Borwein, "On projection algorithms for solving convex feasibility problems," *SIAM Rev.*, vol. ۳۸, pp. ۳۶۷-۴۲۶, ۱۹۹۶.
- [۵] H. H. Bauschke, J. M. Borwein, and P. L. Combettes, "Essential smoothness, essential strict convexity, and Legendre functions in Banach spaces," *Communications in Contemporary Mathematics.*, vol. ۳, pp. ۶۱۵-۶۴۷, ۲۰۰۱.
- [۶] J. F. Bonnans, A. Shapiro, "Perturbation Analysis of Optimization Problems," *Springer, New York.*, ۲۰۰۰.
- [۷] L.M. Bregman, "A relaxation method for finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming," *USSR Comput. Math. Math. Phy.*, vol. ۷, pp. ۲۰۰-۲۱۷, ۱۹۶۷.
- [۸] D. Butnariu, A. N. Iusem, and C. Zalinescu, "On uniform convexity, total convexity and convergence of the proximal point and outer Bregman projection algorithms in Banach spaces," *J. Convex Anal.*, vol. ۱۰, pp. ۳۵-۶۱, ۲۰۰۳.
- [۹] D. Butnariu, A. N. Iusem, "Totally Convex Functions for Fixed Points Computation and Infinite Dimensional Optimization," *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.*, ۲۰۰۰.
- [۱۰] D. Butnariu, E. Resmerita, "Bregman distances, totally convex functions and a method for solving operator equations in Banach spaces," *Abstr. Appl. Anal. Art.*, ID ۸۴۹۱۹, pp. ۱-۳۹, ۲۰۰۶.
- [۱۱] Y. Censor, S. Reich, "Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization," *Optimization.*, vol. ۳۷, pp. ۳۲۳-۳۳۹, ۱۹۹۶.
- [۱۲] I. Cioranescu, "Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems," *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.*, ۱۹۹۰.
- [۱۳] G.Z. Eskandani, M. Raeisi, and T. M. Rassias, "A hybrid extragradient method for solving pseudomonotone equilibrium problems using Bregman distance," *J. Fixed Point Theory Appl.*, vol. ۲۰, no. ۱۳۲, ۲۰۱۸.

- [۱۴] M. Ghadampour, E. Soori, R. P. Agarwal and D. O' Regan, "Two generalized strong convergence algorithms for variational inequality problems in Banach spaces," *Fixed Point Theory*, vol. ۲۰, no. ۱, pp. ۱۴۳-۱۶۲, ۲۰۲۴.
- [۱۵] M. Ghadampour, D. O' Regan, E. Soori, and R. P. Agarwal, "A strong convergence algorithm in the presence of errors for variational inequality problems in Hilbert spaces," *Journal of Function Spaces*, ۲۰۲۱. <https://doi.org/10.1155/2021/9911241>
- [۱۶] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemarchal, "C Grundlehren der mathematischen Wissenschaften," *Convex Analysis and Minimization Algorithms II. Springer, Berlin*, ۱۹۹۳.
- [۱۷] L. O. Jolaoso, A. Taiwo, and T. O. Alakoya, "A Strong Convergence Theorem for Solving Pseudomonotone Variational Inequalities Using Projection Methods," *J Optim Theory Appl.*, vol. ۱۸۵, pp. ۷۴۴-۷۶۶, ۲۰۲۰.
- [۱۸] F. Kohsaka, W. Takahashi, "Proximal point algorithm with Bregman functions in Banach spaces," *J. Nonlinear Convex Anal.*, vol. ۶, pp. ۵۰۵-۵۲۳, ۲۰۰۵.
- [۱۹] P. E. Maingé, "Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization," *Set-valued Anal.*, vol. ۱۶, pp. ۸۹۹-۹۱۲, ۲۰۰۸.
- [۲۰] E. Naraghirad, J. C. Yao, "Bregman weak relatively nonexpansive mappings in Banach spaces," *Fixed Point Theory Appl.*, ۲۰۱۳. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-141>
- [۲۱] D. Reem, S. Reich, A. De Pierro, "Re-examination of Bregman functions and new properties of their divergences," *Optimization*, vol. ۶۸, pp. ۲۷۹-۳۴۸, ۲۰۱۹.
- [۲۲] S. Reich, "A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances," *Theory and applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type*, pp. ۳۱۳-۳۱۸, ۱۹۹۶.
- [۲۳] S Reich, S. Sabach, "A strong convergence theorem for proximal type- algorithm in reflexive Banach spaces," *J. Nonlinear Convex Anal.*, vol. ۱۰, pp. ۴۷۱-۴۸۵, ۲۰۰۹.
- [۲۴] S. Sabach, "Products of finitely many resolvents of maximal monotone mappings in reflexive banach spaces," *SIAM J. Optim.*, vol. ۲۱, pp. ۱۲۸۹-۱۳۰۸, ۲۰۱۱.
- [۲۵] F. Schopfer, T. Schuster, "Louis, A.K: An iterative regularization method for the solution of the split feasibility problem in Banach spaces," *Inverse Probl.*, vol. ۲۴, no. ۵, pp. ۰۵۵-۰۰۸, ۲۰۰۸.
- [۲۶] N. Shahzad, H. Zegeye, "Convergence theorem for common fixed points of a finite family of multi-valued Bregman relatively nonexpansive mappings," *Fixed Point Theory Appl.*, ۲۰۱۴.
- [۲۷] A. Tada, W. Takahashi, "Strong convergence theorem for an equilibrium problem and a nonexpansive mapping," *Nonlinear Analysis and Convex Analysis. Yokohama Publishers., Yokohama*, ۲۰۰۶.

- [۲۸] W. Takahashi, "Nonlinear Functional Analysis," *Yokohama Publishers, Yokohama*, ۲۰۰۰.
- [۲۹] D. V. Thong, V. T. Dung, and Y. J. Cho, "A new strong convergence for solving split variational inclusion Problems," *Numer Algor.*, vol. ۸۶, pp. ۵۶۵-۵۹۱, ۲۰۲۱.
- [۳۰] J. V. Tiel, "Convex Analysis: An introductory text," *Wiley, New York*., ۱۹۸۴.
- [۳۱] H. K. Xu, "Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings," *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. ۶۵, pp. ۱۰۹-۱۱۳, ۲۰۰۲.
- [۳۲] J. C. Yao, "Variational inequalities with generalized monotone operators," *Math. Oper. Res.*, vol. ۱۹, pp. ۶۹۱-۷۰۵, ۱۹۹۴.
- [۳۳] C. Zălinescu, "Convex analysis in general vector spaces," *World Scientific Publishing, Singapore*., ۲۰۰۲.
- [۳۴] X. Zhao, M. A. Kobis and Y. Yao, "A Projected Subgradient Method for Nondifferentiable Quasiconvex Multiobjective Optimization Problems," *J Optim Theory Appl.*, ۲۰۲۱.