دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و پنجم، فروردین و اردیبهشت 1401
شماره شاپا: 2588X-588

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

وجود نقاط ثابت برای نگاشت‌های α-پذیرفتنی گرختی تعمیم یافته و کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی

بابک محمدی[1*]، وحید پروانه[2]، فرهان گلکارمنش[3]

(1) استادیار گروه ریاضی، واحد مرند، دانشگاه آزاد اسلامی، مرند، ایران
(2) استادیار گروه ریاضی، واحد گیلان-غرب، دانشگاه آزاد اسلامی، گیلان-غرب، ایران
(3) استادیار گروه ریاضی، واحد سنندج، دانشگاه آزاد اسلامی، سنندج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/01/31 تاریخ پذیرش مقاله: 1400/02/07

چکیده:
اخیرا، سامت و همکاران تعمیم جالبی از اصل انقباض باناخ را ارائه کرده اند. در این مقاله با الهام گرفتن از ایده اصلی سامت و همکاران، نگاشت‌های گرختی α-پذیرفتنی $\alpha-\theta$ -تعمیم یافته در فضاهای متری را معرفی و چندین قضیه وجود و یکتایی نقطه ثابت در فضاهای متری کامل را برای چنین نگاشتهایی مطرح و ثابت می‌کنیم. نتایج بدست آمده در این پژوهش، بسیاری از نتایج موجود در این زمینه بخصوص نتایج موجود در مقاله جلیلی و همکاران و کار انجام شده توسط گرختی را تعمیم می‌دهد. در ادامه، با ارائه مثالی نشان می‌دهیم که نتایج ما تعمیم واقعی از نتایج موجود قبلی در این زمینه است. سپس، نتایج جدیدی در فضاهای متری مرتب جزئی و فضاهای متری گرافیک بدست می‌آوریم. در پایان، کاربردی از نتایج بدست آمده را در زمینه وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول غیر خطی و مسائل مقدار مرزی متناوب ارائه می‌دهیم.

واژه‌ی کلیدی: نقطه ثابت، فضاهای مرتب جزئی، نگاشت‌های گرختی، نگاشت α–پذیرفتنی، معادلات دیفرانسیل غیر خطی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:babakmohammadi28@yahoo.com

1. مقدمه

امروزه، نظریه نقطه ثابت در حل معادلات دیفرانسیل و مسایل مقدار مرزی دارای کاربرد فراوان است. اولین و مهمترین نتیجه‌ای که در زمینه نقطه ثابت مطرح شده است، اصل انقباض باناخ می باشد که در سال 1922 توسط ریاضیدان معروف لهستانی یعنی باناخ ارائه گردید. بعدها این نتیجه توسط مولفان زیادی تعمیم داده شد (مراجع [17-4] را ببینید). در سال 1974، گرختی [2] تعمیمی جذاب از اصل انقباض باناخ را منتشر کرد که نظر بسیاری از محققان را به خود جلب کرد.

فرض کنید $\mathfrak{P}$ مجموعه تمام توابع $\beta: (0,\infty) \to [0,1)$ باشد که به ازای هر دنباله $(\tau_n) \subseteq (0,\infty)$ در شرط زیر صدق کند:

$$\beta(\tau_n) \to 1 \Rightarrow \tau_n \to 0.$$

مثال: توابع زیر را بر بازه $(0,\infty)$ در نظر بگیرید

1) $\beta_1(t) = e^{-t}$

2) $\beta_2(t) = ke^{-t}, 0 \le k < 1$

3) $\beta_3(t) = \frac{1}{1+t}$.

در این صورت $\beta_i \in \mathfrak{P}, i = 1,2,3$.

قضیه 1-1:[2] فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و $T: X \to X$ یک نگاشت باشد. فرض کنید تابعی مانند $\beta\epsilon\mathfrak{P}$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x, y\epsilon\Omega$

$$d(Tx,Ty) \le \beta\big(d(x,y)\big)d(x,y).$$

در این صورت، T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

از سوی دیگر، در سال 2011، سامت و همکاران [3] نگاشت‌های α-پذیرفتنی را معرفی کردند و نشان دادند که بسیاری از نتایج موجود در فضاهای متری مرتب از این نگاشت‌ها نتیجه می‌شوند.

تعریف 1-1: [3] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. خود نگاشت $T: X \to X$ یک نگاشت α- پذیرفتنی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y\epsilon X$

$$\alpha(x,y) \ge 1 \Longrightarrow \alpha(Tx,Ty) \ge 1.$$

در سال 2014، جلیلی و همکاران [1] تعمیم جدیدی از اصل انقباض باناخ به صورت زیر ارائه کردند:

فرض کنید Θ مجموعه تمام توابع $\theta: (0,\infty) \to (1,\infty)$ باشدکه دارای خواص زیر است:

(θ1) تابع θ نانزولی باشد،

(θ2) به ازای هر دنباله $(t_n) \subseteq X$ داشته باشیم $\theta(t_n) \to 1 \Leftrightarrow t_n \to 0$.

(θ3) عددی حقیقی مانند $r \in (0,1)$ و عددی مانند $\ell \in (0,\infty]$ وجود داشته باشند به‌طوری که

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\theta(t)-1}{t^r} = \ell.$$

قضیه 1-2: [1] فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و $T: X \to X$ یک خود-نگاشت باشد. فرض کنید تابعی مانند $\theta \in \Theta$ و عددی مانند $k\epsilon(0,1)$ موجود باشند بطوری که برای هر $x, y\epsilon X$ با شرط $Tx \neq Ty$ داریم:

$$\theta(d(Tx,Ty)) \le \theta(d(x,y))^k.$$

در این صورت، نگاشت T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

در این مقاله، با الهام از کار جلیلی و همکاران نگاشت های گرختی $\alpha - \theta -$تعمیم یافته را تعریف و وجود و یکتایی نقطه ثابت در فضاهای متری کامل را برای چنین نگاشت‌هایی بررسی می‌کنیم.

2. نتایج اصلی

فرض کنید Θ' مجموعه تمام توابع $\theta: (0,\infty) \to (1,\infty)$ باشدکه علاوه بر شرایط (θ1) و (θ2) دارای خاصیت زیر بجای شرط (θ3) باشند:

'(θ3) تابع θ تابعی پیوسته باشد.

توجه کنید که دسته توابع Θ' متفاوت از خانواده توابع Θ می‌باشد. برای نمونه، تابع $\theta(t) = e^t$ متعلق به خانواده Θ' است اما متعلق به خانواده Θ

نمی‌باشد. همچنین تابع

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{\sqrt{t}}, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ e, & \frac{1}{2} \le t \end{cases}$$

متعلق به خانواده Θ است اما این تابع متعلق به خانواده توابع Θ' نمی‌باشد.

تعریف 2-1: فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد. نگاشت $T: X \to X$ را یک نگاشت گرختی $\alpha - \theta$-تعمیم یافته گوییم هرگاه توابع $\alpha: X \times X \to \infty$، $\beta \in \mathfrak{P}$ و $\theta \in \Theta'$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $x, y \epsilon X$ با شرایط $\alpha(x, y) \ge 1$، $Tx \ne Ty$، داشته باشیم

$$\theta\big(\alpha(x, y) d(Tx, Ty)\big) \le \Big(\theta\big(M(x, y)\big)\Big)^{\beta(d(x,y))}, \qquad (1)$$

که در آن

$$M(x, y) = max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Tx)\}.$$

فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد، $T: X \to X$ یک نگاشت و $\alpha: X \times X \to \infty$ یک تابع باشد. نگاشت T، α-پیوسته نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در X که به ازای هر n، $\alpha(x_n, x_{n+1}) \ge 1$ و

$$lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0,$$

نتیجه شود که

$$lim_{n\to\infty} d(Tx_n, Tz) = 0.$$

همچنین، فضای متری (X, d)، α-منظم نامیده می شود، هرگاه به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در X که به ازای هر n، $\alpha(x_n, x_{n+1}) \ge 1$ و

$$lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0$$

نتیجه شود که به ازای هر n، $\alpha(x_n, z) \ge 1$.

نگاشت T، α-پذیرفتنی مثلثی نامیده می‌شود هرگاه T، نگاشتی α-پذیرفتنی بوده و برای هر $x, y, z \epsilon X$،

$$\begin{cases} \alpha(x, y) \ge 1, \\ \alpha(y, z) \ge 1 \end{cases} \Longrightarrow \alpha(x, z) \ge 1.$$

قضیه 2-1: فرض کنید (X, d) یک فضای متری کامل و $T: X \to X$ یک نگاشت گرختی $\alpha - \theta$-تعمیم یافته باشد. علاوه بر این، فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

۱. عنصری مانند $x_0 \epsilon X$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha(x_0, Tx_0) \ge 1$.

۲. نگاشت T، α-پذیرفتنی مثلثی باشد.

۳. نگاشت T، α-پیوسته باشد یا فضای متری (X, d)، α-منظم باشد.

در این صورت، نگاشت T یک نقطه ثابت دارد. علاوه براین، اگر به ازای هر دو نقطه ثابت x, y داشته باشیم $\alpha(x, y) \ge 1$، آنگاه نقطه ثابت نگاشت T منحصر بفرد است.

اثبات: بنا به فرض عنصری مانند $x_0 \epsilon X$ وجود دارد به‌طوری که $\alpha(x_0, Tx_0) \ge 1$. دنباله $\{x_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ را به روش زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{n+1} = Tx_n, \ n \epsilon \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

چون نگاشت T، α-پذیرفتنی است، لذا به ازای هر $n \epsilon \mathbb{N} \cup \{0\}$، داریم $\alpha(x_n, x_{n+1}) \ge 1$. اگر به ازای حداقل یک $n \epsilon \mathbb{N} \cup \{0\}$ داشته باشیم

$$x_n = x_{n+1},$$

آنگاه، x_n یک نقطه ثابت نگاشت T است و چیزی برای اثبات نداریم. فرض کنید به ازای هر $n \epsilon \mathbb{N} \cup \{0\}$ داشته باشیم

$$x_n \ne x_{n+1}.$$

بنا به نامساوی (1)، به ازای هر $n \epsilon \mathbb{N} \cup \{0\}$ داریم:

$$\theta(d(x_{n+1}, x_{n+2})) \le \theta\big(\alpha(x_n, x_{n+1}) d(Tx_n, Tx_{n+1})\big)$$

$$\leq \left(\theta\left(M(x_n, x_{n+1})\right)\right)^{\beta(d(x_n,x_{n+1}))},$$

که در آن

$$M(x_n, x_{n+1}) = max\begin{Bmatrix} d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n) \\ , d(x_{n+1}, Tx_n) \end{Bmatrix} = d(x_n, x_{n+1}).$$

بنابراین، به ازای هر $n\epsilon\mathbb{N}\cup\{0\}$ داریم:

$$\theta\left(d(x_{n+1}, x_{n+2})\right) \leq \left(\theta\left(d(x_n, x_{n+1})\right)\right)^{\beta(d(x_n,x_{n+1}))} \leq \theta\left(d(x_n, x_{n+1})\right) \quad (3)$$

از نامساوی فوق نتیجه می‌شود که $\{\theta(d(x_n, x_{n+1}))\}$

یک دنباله نزولی است. بنابراین، عددی حقیقی مانند $r \geq 0$ وجود دارد به‌طوری که

$$lim_{n\to\infty}\theta(d(x_n, x_{n+1})) = r.$$

نشان می دهیم که $r = 1$. فرض کنید $r > 1$. با حد گیری از طرفین نامساوی (3) داریم

$$r \leq r^{limsup_{n\to\infty}\beta(d(x_n,x_{n+1}))}.$$

بنابراین،

$$limsup_{n\to\infty}\beta\left(d(x_n, x_{n+1})\right) = 1.$$

از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت که زیر دنباله‌ای مانند

$$\{d(x_{n_i}, x_{n_i+1})\}$$

وجود دارد بطوریکه

$$lim_{n\to\infty}\beta\left(d(x_{n_i}, x_{n_i+1})\right) = 1.$$

بنا به فرض‌های موجود در مورد β نتیجه می‌گیریم که

$$lim_{i\to\infty}d(x_{n_i}, x_{n_i+1}) = 0 \quad (4)$$

بنا به شرط $(\theta2)$،

$$lim_{i\to\infty}\theta\left(d(x_{n_i}, x_{n_i+1})\right) = 1. \quad (5)$$

که با $r > 1$ در تناقض است. لذا $r = 1$ و در نتیجه $lim_{i\to\infty}d(x_n, x_{n+1}) = 0$. حال نشان می‌دهیم که دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت، عددی حقیقی مانند $\varepsilon > 0$ و زیر دنباله

$$\{x_{n_i}\}$$

وجود دارند بطوریکه

$$\forall i \in \mathbb{N}: d\left(x_{n_i}, x_{m_i}\right) \geq \varepsilon. (5)$$

فرض کنید به ازای هر i، m_i کوچکترین اندیسی باشد که $m_i \geq n_i$ و به ازای ان رابطه (5) برقرار است. لذا،

$$\forall i \in \mathbb{N}:\ d\left(x_{n_i}, x_{m_i-1}\right) < \varepsilon.$$

حال، به ازای هر i،

$$\varepsilon \leq d\left(x_{n_i}, x_{m_i}\right) \leq d\left(x_{n_i}, x_{m_i-1}\right) + d\left(x_{m_i-1}, x_{m_i}\right) \leq \varepsilon + d\left(x_{m_i-1}, x_{m_i}\right).$$

با حد گیری از طرفین نامساوی فوق نتیجه می‌گیریم که

$$lim_{i\to\infty}d\left(x_{n_i}, x_{m_i+1}\right) = \varepsilon.$$

همچنین،

$$d\left(x_{n_i}, x_{m_i}\right) - d\left(x_{n_i}, x_{n_i+1}\right) - d\left(x_{m_i}, x_{m_i+1}\right) \leq d\left(x_{n_{i+1}}, x_{m_i+1}\right) \leq d\left(x_{n_i}, x_{n_i+1}\right) + d\left(x_{n_i}, x_{m_i}\right) + d\left(x_{m_i}, x_{m_i+1}\right).$$

با حدگیری از طرفین نامساوی فوق نتیجه می‌شود که

$$lim_{i\to\infty}d\left(x_{n_i+1}, x_{m_i+1}\right) = \varepsilon.$$

از طرفی،

$$\theta\left(d\left(x_{n_i+1}, x_{m_i+1}\right)\right)$$

$$\leq \left(\theta\left(d\left(x_{n_i}, x_{m_i}\right)\right)\right)^{\beta\left(d\left(x_{n_i}, x_{m_i}\right)\right)}.$$

با حد گیری از طرفین نامساوی فوق نتیجه می‌گیریم که

$$1 < \theta(\varepsilon) \leq \left(\theta(\varepsilon)\right)^{limsup_{i\to\infty}\beta\left(d\left(x_{n_i}, x_{m_i}\right)\right)}.$$

بنابراین،

$$limsup_{i\to\infty}\beta\left(d\left(x_{n_i}, x_{m_i}\right)\right) = 1.$$

از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت که زیر دنباله‌ای مانند

$$\{d\left(x_{n_{i_k}}, x_{m_{i_k}}\right)\}_{k\epsilon\mathbb{N}}$$

وجود دارد بطوریکه

$$lim_{k\to\infty}\beta\left(d\left(x_{n_{i_k}}, x_{m_{i_k}}\right)\right) = 1.$$

بنا به خواص تابع β نتیجه می‌شود که

$$lim_{k\to\infty}d\left(x_{n_{i_k}}, x_{m_{i_k}}\right) = 0.$$

مطلب فوق با رابطه (5) متناقض است. لذا، دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. چون فضای متری (x, D) کامل است، لذا عنصری مانند $z\epsilon X$ وجود دارد بطوریکه

$$lim_{n\to\infty}d(x_n, z) = 0.$$

نشان می‌دهیم که z یک نقطه ثابت نگاشت T است. اگر نگاشت T، α-پیوسته باشد، آنگاه

$$d(z, Tz) = lim_{n\to\infty}d(x_{n+1}, Tz) = lim_{n\to\infty}d(Tx_n, Tz) = 0.$$

فرض کنید X، α-منظم باشد. اگر $Tx_n \neq Tz$، آنگاه

$$\theta\left(d(Tx_n, Tz)\right) \leq \left(\theta\left(M(x_n, z)\right)\right)^{\beta\left(d(x_n, z)\right)} < \theta\left(M(x_n, z)\right).$$

و لذا

$$(Tx_n, Tz) < M(x_n, z).$$

اگر $Tx_n = Tz$، آنگاه

$$d(Tx_n, Tz) = 0 \leq M(x_n, z).$$

در هر حال، به ازای هر n، $d(Tx_n, Tz) \leq M(x_n, z)$. بنابراین،

$$d(z, Tz) = lim_{n\to\infty}d(x_{n+1}, Tz) = lim_{n\to\infty}d(Tx_n, Tz) \leq lim_{n\to\infty}M(x_n, z) = 0.$$

لذا، $z = Tz$ یکتایی نقطه ثابت به راحتی از رابطه (1) نتیجه می‌شود.

چون به ازای هر $x, y\epsilon X$ داریم $d(x, y) \leq M(x, y)$، بنابراین نتیجه زیر را داریم

نتیجه2-2: فرض کنید (X, d) یک فضای متری کامل و $T: X \to X$ یک نگاشت باشد به طوری که توابع $\alpha: X \times X \to \infty$، $\beta \in \mathfrak{P}$ و $\theta \in \Theta'$ وجود داشته باشند بطوریکه برای هر $x, y\epsilon X$ با شرایط $\alpha(x, y) \geq 1, Tx \neq Ty$

داشته باشیم

$$\theta\left(\alpha(x, y)d(Tx, Ty)\right) \leq \left(\theta\left(d(x, y)\right)\right)^{\beta\left(d(x, y)\right)}.$$

علاوه بر این، فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

1) عنصری مانند $x_0 \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$

2) T، α-پذیرفتنی مثلثی باشد،

3) T، α-پیوسته یا فضای X، α-منظم باشد.

در این صورت، نگاشت T یک نقطه ثابت دارد. علاوه بر این، اگر به ازای هر دو نقطه ثابت x, y داشته باشیم، $\alpha(x, y) \geq 1$، آنگاه نقطه ثابت نگاشت T منحصر بفرد است.

نتیجه2-3: فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و $T: X \to X$ یک نگاشت باشد به‌طوری که توابع $\beta \in \mathfrak{P}$ و $\theta \in \Theta'$ وجود داشته باشند بطوریکه برای هر $x, y \epsilon X$ با محدودیت $Tx \neq Ty$، داشته باشیم

$$\theta\big(d(Tx,Ty)\big) \le \Big(\theta\big(d(x,y)\big)\Big)^{\beta(d(x,y))}.$$

در این صورت T یک نقطه ثابت منحصر بفرد دارد.

اثبات: به ازای هر $x, y \in X$ نگاشت $\alpha(x,y) = 1$ را تعریف می‌کنیم و نتیجه 2-2 را بکار می‌بریم.

توجه کنید که اگر در نتیجه 2-3 قرار دهیم

$$\theta(t) = e^{t},$$

آنگاه قضیه 1-1 (قضیه گرختی) به دست می‌آید، یعنی، نتیجه ما تعمیمی از قضیه گرختی است. مثال زیر نشان می‌دهد که نتیجه ما تعمیمی واقعی از قضیه گرختی است.

مثال 2-2: فرض کنید $X = \{a,b,c\}$ متر d را به صورت زیر روی X در نظر می‌گیریم

$$d(a,a) = d(b,b) = d(c,c) = 0,$$
$$d(a,b) = \frac{1}{2}, d(b,c) = \frac{1}{3}, d(a,c) = \frac{5}{6}.$$

تابع $T: X \to X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & b \end{pmatrix}.$$

همچنین $\alpha: X \times X \to \infty$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \left\{ \begin{matrix} (b,b),(a,c) \\ ,(c,b),(a,b) \end{matrix} \right\}, \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که نگاشت T، α-

پذیرفتنی مثلثی است. توابع $\beta \in \mathfrak{P}$ و $\theta \in \Theta'$ را نیز به صورت

$$\beta(t) = e^{-\frac{3}{2}t},\ \theta(t) = 1 + t^2$$

در نظر بگیرید. حال فرض کنید $x, y \in X$ بطوریکه $\alpha(x,y) \ge 1,\ Tx \neq Ty$، در این صورت، $(x,y) = (a,b)$ یا (a,c). اگر $(x,y) = (a,b)$، آنگاه،

$$\theta\big(\alpha(x,y)d(Tx,Ty)\big) = \theta\big(d(Tx,Ty)\big) = \theta\big(d(Ta,Tb)\big) = \theta\big(d(c,b)\big) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \le (1 + (1/2)^2)^{e^{-\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}} \le \Big(\theta\big(d(a,b)\big)\Big)^{\beta(d(a,b))}.$$

اگر $(x,y) = (a,c)$، آنگاه

$$\theta\big(\alpha(x,y)d(Tx,Ty)\big) = \theta\big(d(Tx,Ty)\big) = \theta\big(d(Ta,Tc)\big) = \theta\big(d(c,b)\big) = 1 + (\tfrac{1}{3})^2 \le (1 + (\tfrac{5}{6})^2)^{e^{-(\frac{3}{2})(\frac{5}{6})}} \le \Big(\theta\big(d(a,c)\big)\Big)^{\beta(d(a,c))}.$$

همچنین، به ازای $x_0 = a$ داریم

$$\alpha(x_0, Tx_0) = \alpha(a,c) \ge 1.$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که فضای متری (X,d)، α-منظم است. لذا، تمام شرایط نتیجه 2-2 برقرار است. پس نگاشت T دارای یک نقطه ثابت منحصر بفرد است. ملاحظه می‌کنیم که $T(b) = b$؛ یعنی، نقطه b یک نقطه ثابت نگاشت T است. توجه کنید که در این مثال نمی‌توان نگاشت گرختی را مستقیماً بکار برد، زیرا به ازای $(x,y) = (a,b)$،

$$d(Ta,Tb) = d(c,b) = \frac{1}{3} > \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = d(a,b)\beta\big(d(a,b)\big).$$

۳. نتایج نقطه ثابت در فضاهای متری مرتب

اخیرا، بسیاری از محققان روی شرایط انقباضی مختلف در فضاهای متریک کامل مجهز به یک ترتیب جزئی تمرکز کرده و نتایج نقطه ثابت متفاوتی را در

چنین فضاهایی بدست آورده‌اند. برای جزئیات بیشتر در مورد نتایج نقطه ثابت، کاربردهای آنها، مقایسه شرایط انقباضی مختلف و نتایج وابسته دیگر در فضاهای متریک مرتب خواننده را به منابع [4-17] ارجاع می‌دهیم.

نتیجه3-1: فرض کنید $(X,d,\preccurlyeq)$ یک فضای متری مرتب جزئی کامل و $T: X \to X$ یک نگاشت باشد فرض کنید توابع $\beta \in \mathfrak{P}$ و $\theta \in \Theta'$ وجود داشته باشند بطوریکه برای هر $x,y\epsilon X$ با شرایط $x \preccurlyeq y$ و $Tx \neq Ty$ داشته باشیم

$$\theta\big(d(Tx,Ty)\big) \leq \Big(\theta\big(M(x,y)\big)\Big)^{\beta(d(x,y))}.$$

علاوه بر این، فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

1) عنصری مانند $x_0 \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $x_0 \preccurlyeq Tx_0$,

2) T، نگاشتی نانزولی باشد،

3) به ازای هر دنباله صعودی در X که $lim_{n\to\infty} x_n = z$ داشته باشیم $lim_{n\to\infty} Tx_n = Tz$.

در این صورت، نگاشت T یک نقطه ثابت دارد. علاوه براین، اگر هر دو نقطه ثابت نگاشت T قابل مقایسه باشند، آنگاه نقطه ثابت نگاشت T منحصر بفرد است.

نتیجه3-2: فرض کنید $(X,d,\preccurlyeq)$ یک فضای متری مرتب جزئی کامل و $T: X \to X$ یک نگاشت باشد. همچنین، فرض کنید توابع $\beta \in \mathfrak{P}$ و $\theta \in \Theta'$ وجود داشته باشند بطوریکه برای هر $x,y \in X$ با شرایط $x \preccurlyeq y$ و $Tx \neq Ty$ داشته باشیم

$$\theta\big(d(Tx,Ty)\big) \leq \Big(\theta\big(d(x,y)\big)\Big)^{\beta(d(x,y))}.$$

علاوه بر این، فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

1)عنصری مانند $x_0 \epsilon X$ وجود داشته باشد به طوری که $x_0 \preccurlyeq Tx_0$,

2) نگاشت T، نانزولی باشد،

3) به ازای هر دنباله صعودی در X که $lim_{n\to\infty} x_n = z$، آنگاه به ازای هر n داشته باشیم $x_n \preccurlyeq z$.

در این صورت، نگاشت T یک نقطه ثابت دارد. علاوه بر این، اگر هر دو نقطه ثابت T قابل مقایسه باشند، آنگاه نقطه ثابت نگاشت T منحصر بفرد است.

۴. کاربرد در فضاهای متریک گرافیک

همانند کار انجام شده توسط یاچیمسکی [11]، فرض کنید (X,d) یک فضای متری و Ω قطر حاصلضرب دکارتی $X \times X$ باشد. گراف مستقیم G را در نظر بگیرید که در آن $V(G) = X$. منظور از $V(G)$ مجموعه رئوس گراف G است. همچنین، فرض کنید $E(G)$ مجموعه یال‌های گراف G باشد که شامل تمام طوقه‌های گراف G نیز هست، یعنی، $\Omega \subseteq E(G)$. فرض کنید گراف G دارای هیچ یال موازی نباشد. بنابراین، گراف G را بصورت زوج مرتب $(V(G),E(G))$ در نظر می‌گیریم.

تعریف 5-1: فرض کنید (X,d) یک فضای متری گرافیک باشد. نگاشت $T: X \to X$ را یک نگاشت گرختی $G-\theta$-تعمیم یافته گوییم هرگاه توابع $\beta \in \mathfrak{P}$ و $\theta \in \Theta'$ وجود داشته باشند به‌طوری که برای هر $x,y\epsilon X$ با شرایط $Tx \neq Ty$ و $(x,y) \in E(G)$، داشته باشیم

$$\theta\big(d(Tx,Ty)\big) \leq \Big(\theta\big(M(x,y)\big)\Big)^{\beta(d(x,y))},$$

که در آن

$$M(x,y) = max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Tx)\}.$$

فرض کنید (X,d) یک فضای متری گرافیک، $T: X \to X$ یک نگاشت باشد. نگاشت T، G-پیوسته نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در X که به ازای هر n، $(x_n,x_{n+1}) \in E(G)$، داشته باشیم

$$lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad lim_{n\to\infty} d(Tx_n, Tz) = 0.$$

همچنین، فضای متر گرافیک (X, d)، G-منظم نامیده می شود، هرگاه به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در X که به ازای هر n، $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ و
$lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0,$

آنگاه، به ازای هر n ، $(x_n, z) \in E(G)$. نگاشت T، G-پذیرفتنی مثلثی نامیده می‌شود هرگاه نگاشت T، G-پذیرفتنی بوده و برای هر $x, y, z \in X$،

$$\begin{cases} (x, y) \in E(G), \\ (y, z) \in E(G) \end{cases} \Rightarrow (x, z) \in E(G).$$

قضیه 5-1: فرض کنید (X, d) یک فضای متری گرافیک کامل و $T: X \to X$ یک نگاشت گرختی $G - \theta$-تعمیم یافته باشد. علاوه براین، فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

۱. عنصری مانند $x_0 \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $(x_0, Tx_0) \in E(G)$،
۲. نگاشت T، G-پذیرفتنی مثلثی باشد،
۳. نگاشت T، G-پیوسته باشد یا فضای متری (X, d) ، G-منظم باشد.

در این صورت، نگاشت T یک نقطه ثابت دارد. علاوه بر این، اگر به ازای هر دو نقطه ثابت x, y داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$، آنگاه نقطه ثابت نگاشت T منحصر بفرد است.

اثبات: نگاشت $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y \in E(G) \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و قضیه 2-1 را بکار می‌بریم.

۵. کاربرد در حل مسائل مقدار مرزی متناوب

مسأله مقدار مرزی متناوب زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & x \in [0, T] \\ x(0) = x(T). \end{cases} \qquad (6)$$

فرض کنید $X = C([0, T], \mathbb{R})$ مجموعه تمام توابع حقیقی مقدار پیوسته با دامنه $I = [0, T]$ باشد. واضح است که X با متر $d(x, y) = \|x - y\|_\infty$ یک فضای متری کامل است. همچنین، می توان فضای X را با ترتیب جزئی زیر مجهز کرد.
$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x(t) \le y(t), \ \forall t \in [0, T].$

قضیه4-1: با نمادهای فوق فرض کنید اعداد حقیقی $\lambda > 0, \ \mu_1 > 0, \ \mu_2 > 0$ وجود دارند بطوریکه به ازای هر $x, y \in C([0, T], \mathbb{R})$ بامحدودیت $x \preccurlyeq y$ داشته باشیم

$$|f(t, x(t) + \lambda x(t) - f(t, y(t) - \lambda y(t)| \le \lambda[(1 + |x(t) - y(t)|^{\mu_1})^{e^{-\mu_2\|x-y\|}} - 1]^{\frac{1}{\mu_1}},$$

همچنین، فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

(1) عنصر $x_0 \epsilon X$ وجود دارد به‌طوری که
$$x_0(t) \le \int_0^T G(t, s) F\big(s, x_0(s)\big) ds$$

که در آن

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T - 1}}, & 0 \le s \le t \le T, \\ \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T - 1}}, & 0 \le t \le s \le T. \end{cases} \qquad (7)$$

(2) F نسبت به مولفه دوم نا نزولی است.
در این صورت مسأله (6) دارای یک جواب است.

اثبات: مسأله (6) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\begin{cases} x'(t) + \lambda x(t) = F(t, x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x(T). \end{cases}$$

که در آن

$F(t, x(t) = f(t, x(t) + \lambda x(t).$

از مرجع [22] می دانیم که $x(t)$ جواب معادله فوق است اگر و تنها اگر جوابی از معادله انتگرالی زیر باشد

$$x(t) = \int_0^T G(t, s)\, F(s, x(s) ds, \quad t \in [0, T] \qquad (8)$$

که در آن حال $G(t,s)$ مطابق مقدار داده شده در رابطه (7) است. نگاشت
$T: C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$Tx(t) = \int_0^T G(t,s)\, F(s,x(s)ds.$$

وجود جواب برای معادله (5) معادل وجود نقطه ثابت برای نگاشت T تعریف شده به صورت فوق است. توابع $\beta \in \mathfrak{P}$ و $\theta \in \Theta'$ را نیز به صورت
$$\beta(t) = e^{-\mu_2 t} \text{ و } \theta(t) = 1 + t^{\mu_1}$$

درنظر می‌گیریم. توجه کنید که $\int_0^T G(t,s)ds = \frac{1}{\lambda}$.
به ازای هر $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$ که $x \preccurlyeq y$ داریم:
$$(|Tx(t) - Ty(t)|)^{\mu_1} = \left|\int_0^T G(t,s)(F(s,x(s)) - F(s,y(s))ds\right|^{\mu_1} \leq (\int_0^T G(t,s)\left|F(s,x(s)) - F(s,y(s)\right|ds)^{\mu_1} \leq \left(\int_0^T G(t,s)ds\right)^{\mu_1} \lambda^{\mu_1}[(1 + (\|x(t) - y(t)\|)^{\mu_1})^{e^{-\mu_2\|x-y\|}} - 1] = \left(\theta(d(x,y))\right)^{\beta(d(x,y))} - 1.$$

با سوپریمم گرفتن از طرفین رابطه فوق روی $t \in [0,T]$. نتیجه می‌شود که
$$\|Tx - Ty\|^{\mu_1} \leq \left(\theta(d(x,y))\right)^{\beta(d(x,y))} - 1.$$

لذا،
$$\theta(d(Tx,Ty)) = 1 + \|Tx - Ty\|^{\mu_1} \leq \left(\theta(d(x,y))\right)^{\beta(d(x,y))}.$$

بنا به شرط (1)، عنصری مانند $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ همچنین بنا به شرط (2)، نگاشت T نانزولی است. همچنین، بنا به مرجع [6] شرط (3)، نتیجه 3-2 نیز برقرار است. لذا، تمام شرایط نتیجه 3-2 برقرار است. پس بنا به این نتیجه، نگاشت T دارای یک نقطه ثابت است که معادل با وجود جواب برای معادله (7) و در نتیجه معادله (6) است.

فهرست منابع

[1] M. Jleli, E. Karapinar and B. Samet, Further generalizations of the Banach contraction principle, J. Inequal. Appl., 2014, 2014:439.

[2] M. Geraghty, On contractive mappings, Proceedings of the American Mathematical Society, 40 (1973), 604-608.

[3] B. Samet, C. Vetro and P. Vetro, Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings, Nonlinear Analysis, 75 (2012), 2154-2165.

[4] J. Harjani and K. Sadarangani, Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partial ordered sets, Nonlinear analysis, 71 (2009) 3403-3410.

[5] A.C.M. Ran and M.C.B. Reurings, A fixed point theorem in partially ordered sets and some application to matrix equations, Proc. Amer. Math. Soc., 132 (2004), 1435-1443.

[6] J.J. Nieto and R.R. Lopez, Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Order, 22 (2005), 223-239.

[7] S. Czerwik, Contraction mappings in b-metric spaces, Acta Math. Inf. Univ. Ostrav., 1 (1993), 5-11.

[8] S. Czerwik, Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 46 (1998), 263-276.

[9] A. Aghajani, M. Abbas and J.R. Roshan, Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces, Math. Slovaca, 64(4) (2014) 941-960.

[10] N. Hussain, D. Doric, Z. Kadelburg and S. Radenovic, Suzuki-type fixed point results in metric type spaces, Fixed Point Theory Appl., 2012:126 (2012), doi:10.1186/1687-1812-2012-126.

[11] J. Jachymski, The contraction principle for mappings on a metric space with a graph, Proc. Amer. Math. Soc. 1(36) 2008, 1359-1373.

[12] J.R. Roshan, V. Parvaneh, S. Sedghi, N. Shobkolaei and W. Shatanawi, Common fixed points of almost generalized $(\psi-\varphi)_S$ -contractive mappings in ordered b-metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 2013, 2013:159.

[13] F. Bojor, Fixed point theorems for Reich type contraction on metric spaces with a graph, Nonlinear Anal., 75 (2012), 3895-3901.

[14] P. Salimi, A. Latif and N. Hussain, Modified $\alpha-\psi$-contractive mappings with applications, Fixed Point Theory Appl., 2013, 2013:151.

[15] E. Karapinar, P. Kumam and P. Salimi, On $\alpha-\psi$-Meir-Keeler contractive mappings, Fixed Point Theory Appl., 2013, 2013:94.

[16] N. Hussain, E. Karapinar, P. Salimi and F. Akbar, α-admissible mappings and related fixed point theorems, J. Inequalities Appl., 2013, 2013:114.

[17] N. Hussain, P. Salimi and A. Latif, Fixed point results for single and set-valued $\alpha-\eta-\psi$-contractive mappings, Fixed Point Theory Appl., 2013, 2013:212.

[18] P. Salimi and E. Karapinar, Suzuki-Edelstein type contractions via auxiliary

functions, Mathematical Problems in Engineering, 2013, Article ID 648528.

[19] T. Suzuki, A new type of fixed point theorem in metric spaces, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 71 (2009), 5313-5317.

[20] T. Suzuki, A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, Proc. Amer. Math. Soc., 136 (2008), 1861-1869.

[21] M. Jovanovic, Z. Kadelburg and S. Radenovic, Common Fixed Point Results in Metric-Type Spaces, Abstr. Applied Anal., 2010, Article ID 978121, 15 pages, doi:10.1155/2010/978121.

[22] M, Ozturk and M, Basarir, On some common fixed point theorems with rational expressions on cone metric spaces over a Banach algebra. Hacet. J. Math. Stat. 41 (2012), 211-222.

[23] B. Mohammadi, V. Parvaneh, H. Aydi, H. Isik, Extended Mizoguchi-Takahashi type fixed point theorems and their applications, Mathematics, 2019, 5, 575.