دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دهم، شماره پنجاه و یکم، آذر و دی ۱۴۰۳
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تعیین یا تخمین وزن شاخص‌های روش بهترین–بدترین با حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی یا برنامه‌ریزی خطی مختلط

مهدی عباسی [۱]*، محمدرضا دهقانی [۲]

(۱) گروه مهندسی صنایع، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران
(۲) کارشناس مدیریت کیفیت و بهبود روش‌های شرکت مدیریت بهره‌برداری تولید برق فارس، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۳۰

چکیده

روش بهترین-بدترین یکی از روش‌های جدید تعیین وزن شاخص‌ها در مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه بوده که در آن وزن‌های بهینه شاخص‌ها طی تشکیل و حل یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی تعیین می‌شود. کاملاً سازگار، سازگار یا ناسازگار بودن مسأله می‌تواند با محاسبه نرخ سازگاری و مقایسه آن با آستانه قابل قبول نرخ سازگاری مشخص گردد. با توجه به مشکلات حل مدل برنامه‌ریزی غیرخطی روش بهترین-بدترین، تلاش‌هایی جهت تعیین و تخمین وزن شاخص‌ها طی تشکیل و حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی و یا برنامه‌ریزی خطی مختلط صورت پذیرفته است. ارائه مدل برنامه‌ریزی خطی و همچنین روش تقریب تکه‌ای خطی SOS[۲]، از نتایج اصلی این تلاش‌ها می‌باشند. مدل برنامه‌ریزی خطی برای تعیین وزن شاخص‌های مسائل کاملاً سازگار مناسب است. در روش تقریب تکه‌ای خطی، تخمین وزن شاخص‌ها با حل تعدادی مدل برنامه‌ریزی خطی مختلط انجام می‌پذیرد. لزوم بکارگیری تقریب‌های تکه‌ای خطی و حل تعداد قابل توجه مدل‌های برنامه‌ریزی خطی مرتبط با تمامی مسائل از عیوب اصلی این روش می‌باشد. روش پیشنهادی مقاله حاضر از حل مدل برنامه‌ریزی خطی برای تعیین وزن شاخص‌های مسائل کاملاً سازگار و از حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی مختلط برای تخمین وزن شاخص‌های مسائل سازگار استفاده می‌کند. برای تخمین وزن شاخص‌ها، شرط توقف قرار گرفتن وزن‌ها در محدوده مشخص نیز بررسی می‌شود. برای مسائل ناسازگار نیز حل مسأله لازم نیست. نتایج حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهادی جهت تعیین و تخمین وزن شاخص‌های ۳۸۴ مسأله نمونه نشان می‌دهد که در ۷۹٪ مسائل، روش پیشنهادی عملکردی بهتر و در مابقی مسائل، عملکردی به خوبی روش تقریب تکه‌ای خطی داشته است.

واژه‌های کلیدی: روش بهترین-بدترین (BWM)، محدوده وزن شاخص‌ها، تقریب تکه‌ای خطی (PLA)، مدل برنامه‌ریزی خطی (LPM)، مدل برنامه‌ریزی خطی مختلط (MILPM).

*عهده‌دار مکاتبات: Email: abbasi.iau@gmail.com, me.abbasi@iau.ac.ir

۱- مقدمه

روش‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه (MADM[1]) مختلفی از جمله روش محبوب فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP[2]) برای حل مسائل مربوطه وجود دارد [۱]. روش بهترین-بدترین (BWM[3]) یکی از جدیدترین روش‌های حل مسائل MADM می‌باشد که رضایی (۲۰۱۵) آنرا به منظور تعیین وزن شاخص‌ها ارائه نمود. این روش نسبت به AHP به داده‌های مقایسه‌ای کمتر [۲] و همچنین زمان کمتر برای انجام مقایسات زوجی [۳] نیاز دارد. در BWM وزن شاخص‌ها با تشکیل و حل یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی (NLPM[4]) حاصل می‌شود. نرخ سازگاری NLPM (CR[5]) شاخصی است که به کمک آن می‌توان در خصوص قابل اعتماد بودن وزن‌های حاصل از BWM قضاوت نمود [۲]. به عبارت دیگر نتایج BWM در صورتی قابل اعتماد است که CR مربوط به NLPM در محدوده قابل قبول باشد. در این خصوص جداول آستانه قابل قبول نرخ سازگاری (CRT[6]) ارائه شده است [۴]. بنابراین با مقایسه مقدار CR محاسبه شده با CRT می‌توان مسائل را در سه دسته «کاملاً سازگار»، «سازگار» و «ناسازگار» قرار داد.

با توجه به مشکلات حل مدل‌های NLPM، تلاش‌هایی جهت تعیین و تخمین وزن‌های BWM طی تشکیل و حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی (LPM[7]) و یا برنامه‌ریزی خطی مختلط (MILPM[8]) صورت پذیرفته است. در این خصوص می‌توان به استفاده از LPM برای تعیین وزن‌ها در حالت کاملاً سازگار ([۵]) و ارائه MILPM تقریبی معادل با استفاده از تقریب تکه‌ای خطی[9] مبتنی بر مجموعه‌های منظم خاص (SOS[10]) نوع ۲ (SOS۲) ([۶]) و استفاده از تقریب تکه‌ای خطی SOS۲ برای تخمین وزن شاخص‌ها با خطای قابل قبول ([۷]) اشاره نمود. هر کدام از روش‌های ارائه شده دارای مزایا و معایبی هستند که در ادامه به آنها پرداخته می‌شود. مزیت اصلی مدل ارائه شده در [۵]، تعیین وزن‌های کاملاً درست با حل یک LPM بجای حل یک NLPM برای مسائل کاملاً سازگار می‌باشد. ایراد اصلی مدل مزبور را می‌توان عملکرد ضعیف مدل برای مسائل سازگار و ناسازگار ذکر نمود. در [۶]، MILPM معادل NLPM با استفاده از SOS۲ ارائه شده است. مزیت اصلی این مدل، تخمین وزن‌ها با حل یک MILPM بجای حل NLPM است. ایراد اصلی مدل را می‌توان عدم امکان حصول جواب با خطای دلخواه ذکر نمود. الگوریتم تخمین جواب NLPM روش BWM با میزان خطای قابل قبول ([۷]) روش یاد شده را بهبود داده است. روش مزبور (ارائه شده در [۷]) از طریق مدل‌سازی و حل یک یا چند MILPM با استفاده از SOS۲، جواب مدل غیرخطی را تخمین می‌زند. امکان استفاده برای مسائل کاملاً سازگار، سازگار و ناسازگار و همچنین امکان حل مدل غیرخطی با خطای مورد نظر از مزایای اصلی این روش است. نیاز به حل چندین MILPM در برخی شرایط و استفاده از تقریب خطی برای مسائل کاملاً سازگار و ناسازگار علاوه بر مسائل سازگار، از معایب اصلی این روش می‌باشد. بنابراین با توجه به نتایج بررسی سه تحقیق یافت شده جهت تعیین و تخمین وزن‌های BWM مسائل کاملاً سازگار و سازگار به ترتیب مدل‌های LPM ([۵]) و MILPM مبتنی بر SOS۲ با خطای قابل قبول ([۷]) بهترین عملکرد را داشته است. همچنین با توجه به قابل اعتماد نبودن وزن شاخص‌ها در مسائل ناسازگار ([۴]) نیاز به استفاده از مدل‌های

---

[1] MADM: Multiple Attribute Decision Making
[2] AHP: Analytic Hierarchy Process
[3] BWM: Best Worst Method
[4] NLPM: Non Linear Programming Model
[5] CR: Consistency Ratio
[6] CRT: Consistency Ratio Thresholds
[7] LPM: Linear Programming Model
[8] MILPM: Mixed-Integer Linear Programming Model
[9] PLA: Piecewise Linear Approximation
[10] SOS: Special Ordered Sets

مربوطه و حل این مسائل نمی‌باشد. ضمناً در روش‌های بررسی شده وضعیت سازگاری مسأله لحاظ نشده و از طرف دیگر هدف اصلی از حل BWM بدست آوردن وزن شاخص‌ها می‌باشد، ولی در روش‌های MILPM ارائه شده بیشتر تأکید بر مقدار تابع هدف مدل (ξ) بوده و به وزن شاخص‌ها کمتر اشاره گردیده است.

بنابراین نوآوری اصلی تحقیق حاضر، ارائه روشی مناسب برای تعیین و تخمین وزن شاخص‌های BWM با استفاده از حل مدل‌های LPM و MILPM متناسب با وضعیت سازگاری مسأله می‌باشد. روش پیشنهادی علاوه بر افزایش دقت و اطمینان نتایج باعث کاهش حجم محاسبات می‌گردد. در این راستا ابتدا مبانی نظری و پیشینه تحقیق آورده و سپس روش پیشنهادی ارائه می‌شود. در روش پیشنهادی با استفاده از CR و CRT، وضعیت سازگاری مسأله تعیین می‌گردد. سپس برای مسائل کاملاً سازگار، طی ارائه قضیه‌ای مبنی بر معادل بودن مدل‌های LPM و NLPM برای مسائل کاملاً سازگار، وزن شاخص‌ها طی حل LPM تعیین می‌شود. برای مسائل سازگار، به منظور کاهش تعداد مراحل حل MILPM، روش تقریب تکه‌ای خطی را با احتساب شرط توقف جدیدی علاوه بر شرط توقف قبلی بکار می‌بندد. در این خصوص، در محدوده قابل قبول بودن وزن کلیه شاخص‌ها به عنوان شرط توقف جدید به شرط توقف قبل اضافه می‌شود. همچنین با توجه به قابل اعتماد نبودن وزن‌ها برای مسائل ناسازگار، عدم نیاز به حل اینگونه مسائل توصیه می‌شود. در پایان ۱۲۸ نمونه‌ی سه و پنج شاخصه تولید شد. در ادامه طی حل ۳۸۴ مسأله (حل ۱۲۸ نمونه با سه خطای قابل قبول متفاوت)، عملکرد روش پیشنهادی با عملکرد الگوریتم تقریب تکه‌ای خطی ([۷]) جهت تعیین و تخمین وزن شاخص‌های BWM مقایسه می‌شود.

۲- مبانی نظری و پیشینه تحقیق

۲-۱- روش بهترین - بدترین

رضایی (۲۰۱۵) روش BWM را برای حل مسائل MADM ارائه نمود. گام‌های روش BWM به صورت زیر می‌باشد:

گام ۱: مجموعه شاخص‌های تصمیم‌گیری به صورت $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ تعریف می‌شود.

گام ۲: بهترین شاخص (B) و بدترین شاخص (W) مشخص می‌شود.

گام ۳: ارجحیت بهترین شاخص نسبت به سایر شاخص‌ها با اعداد ۱ تا ۹ مشخص می‌شود. a_{Bj} مقدار ارجحیت بهترین شاخص نسبت به سایر شاخص‌ها (j) را نشان می‌دهد.

گام ۴: ارجحیت همه شاخص‌ها نسبت به بدترین شاخص با اعداد ۱ تا ۹ مشخص می‌گردد. a_{jW} مقدار ارجحیت شاخص (j) را نسبت به بدترین شاخص نشان می‌دهد.

گام ۵: با تشکیل و حل مدل ۱ (NLPM)، مقادیر بهینه وزن شاخص‌ها $(w_1^* . w_2^* . \dots . w_n^*)$ محاسبه می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
&\min \xi \\
&s.t: \\
&\left|\frac{w_B}{w_j} - a_{Bj}\right| \le \xi, \forall j \\
&\left|\frac{w_j}{w_w} - a_{jw}\right| \le \xi, \forall j \\
&\sum_j w_j = 1 \\
&w_j \ge 0, \forall j
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

مقدار بهینه تابع هدف حاصل از حل مدل ۱، ξ^* می‌باشد. جهت اطمینان از نتایج BWM، شاخص CR ارائه شده است. با استفاده از مقادیر شاخص سازگاری (CI[1]) جدول ۱ و مقدار بهینه تابع هدف حاصل از مدل ۱، میزان CR طبق رابطه ۲ محاسبه می‌گردد. CR عددی بین صفر تا یک می‌باشد. هر چه CR به صفر نزدیکتر باشد، سازگاری مسأله بیشتر و جواب‌ها قابل اطمینان‌تر می‌باشد و برعکس هر چه به یک نزدیکتر باشد، سازگاری و اطمینان از نتایج کمتر می‌باشد [۲].

جدول (۱): شاخص‌های سازگاری (CI) روش BWM [۲]

a_{BW}	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
CI (max ξ)	۰/۰۰	۰/۴۴	۱/۰۰	۱/۶۳	۲/۳۰	۳/۰۰	۳/۷۳	۴/۴۷	۵/۲۳

$$CR = \frac{\xi^*}{CI} \qquad (۲)$$

اطمینان از وزن‌های حاصل از حل مدل ۱ منوط به قرار گرفتن CR در محدوده قابل قبول است. روش‌های مختلفی جهت تعیین و یا محاسبه آستانه قابل قبول ارائه شده است. به عنوان نمونه، آستانه قابل قبول در یک تحقیق ۰/۲ [۸] و در تحقیقی دیگر، ۰/۵[۹] در نظر گرفته شده است.

لیانگ و همکاران (۲۰۲۰) روش‌های بررسی سازگاری و محاسبه CRT را ارائه نمودند. آنها بیان نمودند که سازگاری می‌تواند مبتنی بر ورودی (CR^I[2]) و یا مبتنی بر خروجی (CR^O[3]) اندازه‌گیری شود. CR^O همان CR در مدل BWM اصلی می‌باشد. CR^I بر اساس ارجحیت‌های مقایسات زوجی محاسبه می‌گردد؛ بنابراین پس از جمع‌آوری اطلاعات مربوط به مقایسات زوجی، به تعداد شاخص‌های هر مسأله، CR^I را طبق رابطه ۳ محاسبه و ماکزیمم CR^I به عنوان CR^I آن مسأله لحاظ می‌گردد.

$$CR^I = \max_j CR_j^I \qquad (۳)$$
$$CR_j^I = \begin{cases} \dfrac{|a_{Bj} \times a_{jw} - a_{Bw}|}{a_{Bw} \times a_{Bw} - a_{Bw}} & a_{Bw} > 1 \\ 0 & a_{Bw} = 1 \end{cases}$$

ارائه بازخورد فوری از مزایای بکارگیری CR^I می‌باشد. بدین معنی که برای محاسبه آن نیاز به حل مدل ۱ نیست. لیانگ و همکاران (۲۰۲۰)، جهت اطمینان از وزن‌های حاصل از حل مدل ۱، مقادیر CRT را با توجه به تعداد شاخص‌ها و مقدار ارجحیت بهترین شاخص نسبت به بدترین شاخص (a_{BW}) ارائه نمودند. در این خصوص مقادیر CRT مربوط به CR^I و CR^O مطابق جداول ۲ و ۳ ارائه شده است. به منظور بررسی قابل اطمینان بودن نتایج، ابتدا نرخ سازگاری مسأله BWM مورد نظر با توجه به روابط ۲ و ۳ محاسبه می‌شود. سپس مقدار محاسبه شده با مقدار CRT مستخرج از جداول ۲ و ۳ مقایسه می‌گردد. در صورتی که نرخ سازگاری کوچکتر از CRT باشد، نتایج قابل قبول است؛ در غیر اینصورت نیاز به ارزیابی مجدد مقایسات زوجی می‌باشد. لازم به ذکر است که ضریب همبستگی بالایی بین CR^I و CR^O وجود دارد [۴].

[1] CI:Consistency Index
[2] CR^I:Input-based Consistency Ratio
[3] CR^O:Output-based Consistency Ratio

جدول (۲): آستانه قابل قبول ترکیبات مختلف اندازه‌گیری سازگاری مبتنی بر ورودی CR^{I} [۴]

شاخص‌ها / مقیاس‌ها	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۳	۰/۱۶۶۷	۰/۱۶۶۷	۰/۱۶۶۷	۰/۱۶۶۷	۰/۱۶۶۷	۰/۱۶۶۷	۰/۱۶۶۷
۴	۰/۱۱۲۱	۰/۱۵۲۹	۰/۱۸۹۸	۰/۲۲۰۶	۰/۲۵۲۷	۰/۲۵۷۷	۰/۲۶۸۳
۵	۰/۱۳۵۴	۰/۱۹۹۴	۰/۲۳۰۶	۰/۲۵۴۶	۰/۲۷۱۶	۰/۲۸۴۴	۰/۲۹۶۰
۶	۰/۱۳۳۰	۰/۱۹۹۰	۰/۲۶۴۳	۰/۳۰۴۴	۰/۳۱۴۴	۰/۳۲۲۱	۰/۳۲۶۲
۷	۰/۱۲۹۴	۰/۲۴۵۷	۰/۲۸۱۹	۰/۳۰۲۹	۰/۳۱۴۴	۰/۳۲۵۱	۰/۳۴۰۳
۸	۰/۱۳۰۹	۰/۲۵۲۱	۰/۲۹۵۸	۰/۳۱۵۴	۰/۳۴۰۸	۰/۳۶۲۰	۰/۳۶۵۷
۹	۰/۱۳۵۹	۰/۲۶۸۱	۰/۳۰۶۲	۰/۳۳۳۷	۰/۳۵۱۷	۰/۳۶۲۰	۰/۳۶۶۲

جدول (۳): آستانه قابل قبول ترکیبات مختلف اندازه‌گیری سازگاری مبتنی بر خروجی CR^{O} [۴]

شاخص‌ها / مقیاس‌ها	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۳	۰/۲۰۸۷	۰/۲۰۸۷	۰/۲۰۸۷	۰/۲۰۸۷	۰/۲۰۸۷	۰/۲۰۸۷	۰/۲۰۸۷
۴	۰/۱۵۸۱	۰/۲۳۵۲	۰/۲۷۳۸	۰/۲۹۲۸	۰/۳۱۰۲	۰/۳۱۵۴	۰/۳۲۷۳
۵	۰/۲۱۱۱	۰/۲۸۴۸	۰/۳۰۱۹	۰/۳۳۰۹	۰/۳۴۷۹	۰/۳۶۱۱	۰/۳۷۴۱
۶	۰/۲۱۶۴	۰/۲۹۲۲	۰/۳۵۶۵	۰/۳۹۲۴	۰/۴۰۶۱	۰/۴۱۶۸	۰/۴۲۲۵
۷	۰/۲۰۹۰	۰/۳۳۱۳	۰/۳۷۳۴	۰/۳۹۳۱	۰/۴۰۳۵	۰/۴۱۰۸	۰/۴۲۹۸
۸	۰/۲۲۶۷	۰/۳۴۰۹	۰/۴۰۲۹	۰/۴۲۳۰	۰/۴۳۷۹	۰/۴۵۴۳	۰/۴۵۹۹
۹	۰/۲۱۲۲	۰/۳۶۵۳	۰/۴۰۵۵	۰/۴۲۲۵	۰/۴۴۴۵	۰/۴۵۸۷	۰/۴۷۴۷

۲-۲-محدوده وزن بهینه شاخص‌ها در روش بهترین - بدترین

اگر مسأله‌ای کاملاً سازگار نبوده ($CR \neq 0$) و بیش از سه شاخص داشته باشد، ممکن است برای مدل ۱ جواب بهینه چندگانه وجود داشته باشد. در این شرایط به جای یک وزن بهینه منحصر به فرد برای هر شاخص، وزن‌ها دارای فاصله بهینه‌اند [۱۰]. به منظور تعیین حداقل و حداکثر وزن بهینه شاخص‌ها، ابتدا با حل مدل ۱ مقدار ξ^* محاسبه می‌شود؛ سپس دو مدل برنامه‌ریزی خطی ۴ و ۵ برای هر شاخص تهیه و حل می‌شود. محدوده قابل قبول جهت وزن هر شاخص بصورت $[w_j^{min*}, w_j^{max*}]$ مشخص می‌گردد [۵ و ۱۰].

$$
\begin{aligned}
& \min w_j \\
& s.t.: \\
& |w_B - a_{Bj} w_j| \le \xi^* w_j, \forall j \\
& |w_j - a_{jw} w_w| \le \xi^* w_w, \forall j \\
& \sum_j w_j = 1 \\
& w_j \ge 0, \forall j
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

$$\begin{aligned}
& \max w_j \\
& s.t: \\
& |w_B - a_{Bj} w_j| \le \xi^* w_j, \forall j \\
& |w_j - a_{jw} w_w| \le \xi^* w_w, \forall j \\
& \sum_j w_j = 1 \\
& w_j \ge 0, \forall j
\end{aligned} \tag{۵}$$

۲-۳-مدل برنامه‌ریزی ریاضی خطی روش بهترین - بدترین

رضایی (۲۰۱۶) مدل ۶ را به عنوان LPM ارائه داد. این مدل اولین مدل خطی متناظر با NLPM روش BWM می‌باشد. همچنین بیان گردید که هر چه مقدار تابع هدف LPM (ξ^L) به صفر نزدیکتر باشد، سازگاری در نتایج بیشتر است [۵].

$$\begin{aligned}
& \min \xi^L \\
& s.t: \\
& |w_B - a_{Bj} w_j| \le \xi^L, \forall j \\
& |w_j - a_{jw} w_w| \le \xi^L, \forall j \\
& \sum_j w_j = 1 \\
& w_j \ge 0, \forall j
\end{aligned} \tag{۶}$$

جواب‌های مدل ۶ تخمینی برای جواب‌های مدل ۱ بوده؛ بنابراین ممکن است با جواب‌های مدل ۱ متفاوت باشد. از اینرو نمی‌توان همواره به جواب‌های حاصل از LPM اطمینان نمود [۶]. به عبارت دیگر با توجه به اینکه ممکن است مقدار تابع هدف LPM با NLPM متفاوت باشد امکان محاسبه CR^{O} و در نتیجه اطمینان از نتایج وجود ندارد.
مدل‌های خطی دیگری بر مبنای LPM ارائه شده است که در اینجا به ۲ مورد اشاره می‌شود. دولبا و همکاران (۲۰۲۱) برای بدست آوردن نتایج قابل اطمینان از LPM در یک مطالعه موردی مسأله حمل و نقل، با استفاده از ترکیب مدل ۶ با CR^{I} و CRT اقدام نموده‌اند [۱۱]. فیروزآبادی و همکاران (۲۰۱۹) با مبنا قرار دادن مدل ۶ یک مدل تصمیم‌گیری جدید خطی گروهی BWM و کاربرد آن برای مشکلات مدیریتی ارائه نمودند [۱۲].

۲-۴-تخمین جواب روش بهترین - بدترین با استفاده از حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی مختلط

بیل و توملین (۱۹۷۰) تقریب‌های SOS را برای جایگزینی توابع غیرخطی با تقریب‌های تکه‌ای خطی ارائه نمودند [۱۳]. بسته به بُعد توابع غیرخطی روش‌های مختلفی در این زمینه وجود دارد [۱۴]. SOS نوع ۱ (SOS۱) و SOS نوع ۲ (SOS۲) دو نوع متغیر تقریب SOS متداول مرتبط با مسائل برنامه‌ریزی ریاضی می‌باشند [۱۵]. SOS۱ مجموعه منظمی از اعداد است که حداکثر یک متغیر می‌تواند غیرصفر باشد [۱۶]. SOS۲ مجموعه منظمی از اعداد است که حداکثر دو متغیر همسایه (یا پشت سر هم) می‌تواند غیرصفر باشد [۱۷].

بیم استربوئر و همکاران (۲۰۱۸) یک MILPM برای تقریب NLPM روش BWM با استفاده از تغییر متغیرهای x و y و تقریب SOS۲ ارائه دادند. ایشان ابتدا با اعمال تغییر متغیرهای $x_j = \frac{\xi + w_j}{۲}$ و $y_j = \frac{\xi - w_j}{۲}$، مدل ۷ را به عنوان مدل معادل NLPM پیشنهاد کردند:

$$\begin{aligned}
&\min \xi \\
&s.t: \\
&\left| w_B - a_{Bj} w_j \right| \le x_j^2 - y_j^2, \forall j \\
&\left| w_j - a_{jw} w_w \right| \le x_w^2 - y_w^2, \forall j \\
&x_j = \frac{\xi + w_j}{2} \quad , \quad y_j = \frac{\xi - w_j}{2} \\
&\sum_j w_j = 1 \\
&w_j \ge 0, \forall j
\end{aligned} \tag{۷}$$

سپس با استفاده از روش SOS۲، مدل تقریبی MILPM متناظر با مدل غیرخطی ۷ را ارائه نمودند. در این خصوص جهت جملات غیرخطی مدل ۷، نقاط شکست $\{X_1=0, X_2, \ldots, X_n\}$ جهت بازه متغیر x و نقاط شکست $\{Y_1=-0.5, Y_2, \ldots, Y_m\}$ جهت بازه متغیر y لحاظ گردید و تقریب‌های تکه‌ای خطی جهت هر جمله غیرخطی بصورت روابط ۸ ارائه گردید. در روابط ۸، λ_{bj} و μ_{bj} متغیرهای SOS۲ می‌باشند.

$$\begin{aligned}
&x_j^2 \approx \varphi_1(x_j) := \sum_{b=1}^{n} \lambda_{bj} X_b^2 \;, x_j = \sum_{b=1}^{n} \lambda_{bj} X_b \quad \lambda \in S, \\
&y_j^2 \approx \varphi_2(y_j) := \sum_{b=1}^{m} \mu_{bj} Y_b^2 \;, y_j = \sum_{b=1}^{m} \mu_{bj} Y_b \quad \mu \in S. \\
&S = \left\{ \sum_j w_j = 1, w_j \ge 0, j = 1 \cdots n \right\}
\end{aligned} \tag{۸}$$

در ادامه با حل و مقایسه نتایج حل ۶۴ مسأله سه شاخصه از طریق مدل‌های LPM، NLPM و مدل پیشنهادی MILPM نشان دادند که وزن محاسبه شده شاخص‌ها توسط MILPM در همه حالات با NLPM یکسان می‌باشد، ولی در بیشتر مواقع با LPM یکسان نیست. نویسندگان این نتیجه را به معنی عدم اطمینان از نتایج به دست آمده از LPM تفسیر نمودند. همچنین سهولت حل توسط نرم‌افزارهای استاندارد بالاخص در مواقعی که مسأله بیش از سه شاخص داشته باشد و حصول جواب‌های منحصر به فرد اولیه جهت NLPM را به عنوان مزایای اصلی بکارگیری MILPM بجای NLPM برشمردند [۶].

از جمله ایرادات وارده به مدل پیشنهادی ارائه شده در [۶] این است که تصمیم‌گیرنده نمی‌تواند خطای مورد نظر خود را به مدل اعلام نماید، از اینرو ممکن است مدل جوابی با خطای غیرقابل قبول ارائه نماید. جهت رفع این ایراد، الگوریتمی جهت تخمین جواب NLPM با استفاده از حل یک یا تعدادی MILPM با استفاده از تقریب تکه‌ای خطی SOS۲ با خطای قابل قبول طی چهار قدم بصورت زیر ارائه شد:

قدم ۰: اخذ پارامترهای NLPM و میزان خطای قابل قبول (خطای قابل قبول میزان اختلاف مقدار تابع هدف MILPM و NLPM بوده که به عنوان شرط توقف الگوریتم می‌باشد).

قدم ۱: احتساب مقداردهی اولیه تقریب SOS۲ و تشکیل MILPM: در این قدم بصورت پیش فرض تعداد ۱۸ نقطه شکست جهت متغیرهای x و y مشخص می‌گردد؛ این نقاط به فاصله‌های مساوی از یکدیگر و بصورت صعودی قرار دارند. بازه x بین عدد صفر تا $\frac{\xi max+۱}{۲}$ و بازه y بین عدد ۰/۵- تا $\frac{\xi max}{۲}$ می‌باشد. سپس به منظور انجام درون‌یابی‌ها، با استفاده از روابط ۸ قسمت اول MILPM تعریف می‌شود. در ادامه، با احتساب محدودیت‌های متغیرهای مشترک درون‌یابی‌های روابط ۸ در مدل ۷، MILPM طبق مدل ۹ تعریف می‌شود.

در صورت ایده‌آل بودن تقریب‌های خطی، مدل تلفیقی ۸ و ۹ بگونه‌ای عمل می‌کند که مقدار بهینه با احتساب درون‌یابی‌ها تعیین شوند. لازم به ذکر است به هر بار تشکیل و حل MILPM یک مرحله گفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\min \xi \\
&s.t: \\
&\left|w_B - a_{Bj} w_j\right| \le \varphi_1(x_j) - \varphi_2(y_j), \forall j \\
&\left|w_j - a_{jw} w_w\right| \le \varphi_1(x_w) - \varphi_2(y_w), \forall j \\
&\xi = (2\times x_j) - w_j \\
&\xi = (2\times y_j) + w_j \\
&\sum_j w_j = 1 \\
&w_j, x_j \ge 0, \forall j
\end{aligned} \qquad (۹)$$

قدم ۲: حل MILPM در هر مرحله با استفاده از نرم‌افزارهای استاندارد (مانند لینگو)؛

قدم ۳: بررسی شرط توقف: اگر خطای بدست آمده کمتر از خطای قابل قبول باشد مقدار تابع هدف (ξ) و وزن‌های به دست آمده مربوط به شاخص‌ها جواب نهایی می‌باشد، پایان. در غیر این صورت برو به قدم ۴.

قدم ۴: تعریف و بروزرسانی نقاط شکست تقریب SOS۲: در این قدم مقادیر x و yهایی که از حل مسأله در مرحله قبل به دست آمده را به نقاط شکست مسأله اضافه کرده و مقادیر را بصورت صعودی مرتب می‌شود. سپس الگوریتم از قدم ۲ ادامه می‌یابد.

در ادامه به منظور بررسی اعتبار الگوریتم، روشی جهت تولید نمونه‌های پوشش دهنده حالت‌های مختلف یک مسأله پیشنهاد شد. سپس با استفاده از روش مزبور، تعداد ۱۲۸ نمونه‌ی سه و پنج شاخصه تولید و با استفاده از حل آنها، اعتبار الگوریتم پیشنهادی مشخص گردید [۷].

پیش‌بینی می‌گردد که بروزرسانی نقاط شکست به دقیق‌تر شدن تقریب خطی NLPM مسأله منجر شده و همگرایی به جواب بهینه با سرعت بیشتری انجام شود [۷ و ۱۴].

۳- روش پیشنهادی

در این مقاله با توجه به کاملاً سازگار، سازگار یا ناسازگار بودن مسأله، روشی جهت تعیین و تخمین وزن شاخص‌های NLPM با استفاده از LPM و MILPM طی ۳ قدم به شرح زیر ارائه می‌شود:

قدم ۰: آماده‌سازی و اخذ پارامترهای NLPM

در این قدم پارامترهای مسأله از جمله مقدار تابع هدف NLPM، ارجحیت‌های شاخص‌ها نسبت به بهترین و بدترین شاخص، میزان خطای قابل قبول (اختلاف مقدار تابع هدف MILPM و NLPM) و تعداد رقم اعشار قابل قبول وزن شاخص‌ها از تصمیم‌گیرنده اخذ می‌گردد.

قدم ۱: بررسی وضعیت سازگاری مسأله

در این قدم با استفاده از مقدار تابع هدف NLPM و جدول ۱ از طریق رابطه ۲ نسبت به محاسبه $\mathrm{CR^O}$ مسأله اقدام می‌گردد. سپس با مقایسه مقدار $\mathrm{CR^O}$ محاسبه شده و مقدار CRT استخراج شده از جدول ۳ ([۴])، وضعیت سازگاری مسأله مشخص می‌شود. در صورتی که $CR^o = ۰$ باشد (مسأله کاملاً سازگار باشد)، الگوریتم از قدم ۲ ادامه پیدا می‌کند؛ در صورتی که $۰ < CR^o < CRT$ (مسأله سازگار باشد) الگوریتم از قدم ۳ ادامه پیدا می‌کند؛ در صورتی که $CR^o > CRT$ (مسأله ناسازگار باشد)، نیاز به حل مسأله نمی‌باشد، پایان.

قدم ۲: تعیین وزن مسائل کاملاً سازگار

ابتدا با بیان قضیه زیر نشان داده می‌شود که در این شرایط مدل‌های (۱) و (۶) معادل یکدیگر می‌باشند.

قضیه: اگر مسأله کاملاً سازگار باشد، مدل‌های (۱) و (۶) معادل‌اند.

برهان: اگر مسأله کاملاً سازگار باشد، مقدار تابع هدف مدل (۱) صفر می‌باشد ($\xi = ۰$). با ضرب مجموعه محدویت‌های اول مدل در $\mathrm{w_j} \neq ۰$ و مجموعه محدویت‌های دوم مدل در $\mathrm{w}_W \neq ۰$ و احتساب $\xi = ۰$ در مدل (۱)، دستگاه معادلات خطی (۱۰) حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} &\left| w_B - a_{Bj} w_j \right| \le 0, \forall j \\ &\left| w_j - a_{jw} w_w \right| \le 0, \forall j \\ &\sum_j w_j = 1 \\ &w_j \ge 0, \forall j \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

از طرف دیگر اگر مسأله کاملاً سازگار باشد، مقدار تابع هدف مدل (۶) صفر می‌باشد ($\xi^\mathrm{L} = ۰$). با احتساب $\xi^\mathrm{L} = ۰$ در مدل (۶) نیز دستگاه معادلات خطی (۱۰) حاصل خواهد شد. بنابراین اگر مسأله کاملاً سازگار باشد، دو مدل (۱) و (۶) معادل دستگاه معادلات خطی (۱۰) بوده و از اینرو با هم معادل‌اند (پایان برهان).

کاربرد قضیه: وزن شاخص‌های مسائل کاملاً سازگار را می‌توان با حل مدل (۶) بدست آورد.

با استفاده از کاربرد قضیه، در این قدم از طریق حل LPM نسبت به تعیین وزن شاخص‌ها اقدام می‌شود. بنابراین با استفاده از ارجحیت‌های شاخص‌های مسأله نسبت به مدل‌سازی مسأله طبق مدل ۶ و حل توسط نرم‌افزارهای استاندارد مانند لینگو اقدام می‌گردد. وزن شاخص‌های بدست آمده، جواب‌های نهایی مسأله است، پایان.

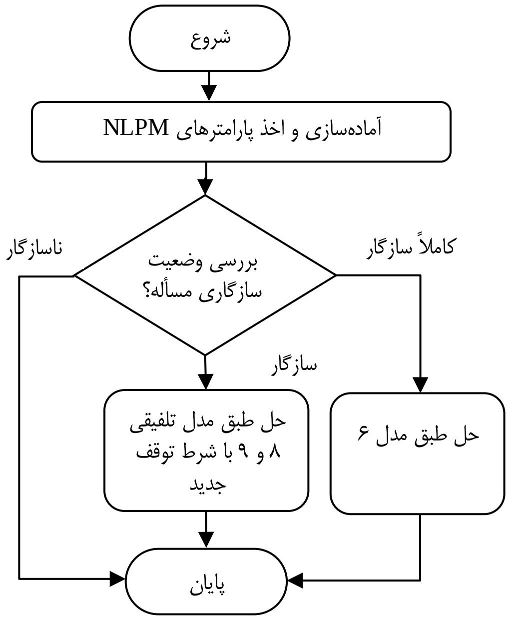
قدم ۳: تخمین وزن مسائل سازگار

در حالتی که مساله کاملاً سازگار نباشد، ممکن است مدل ۱ دارای جواب بهینه چندگانه بوده و فاصله بهینه وجود داشته باشد [۱۰]. در این قدم از طریق بهبود الگوریتم MILPM با استفاده از تقریب تکه‌ای خطی SOS[۲] با خطای قابل قبول (طبق موارد تشریح شده بند ۲-۴)، با احتساب شرط توقف جدیدی علاوه بر شرط توقف قبلی نسبت به تخمین وزن شاخص‌ها اقدام می‌گردد. در این راستا با استفاده از مدل‌های ۴ و ۵ نسبت به محاسبه محدوده قابل قبول وزن هر یک از شاخص‌های مسأله به عنوان شرط توقف جدید الگوریتم اقدام می‌گردد.

سپس در قدم بررسی شرط توقف الگوریتم MILPM بهبود یافته در صورتی که حداقل یکی از شرط‌های توقف برقرار باشد، یعنی «مقادیر بدست آمده وزن کلیه شاخص‌ها در محدوده قابل قبول محاسبه شده باشد» یا «میزان

اختلاف مقدار تابع هدف MILPM با NLPM کمتر از خطای قابل قبول باشد»، جواب‌های بدست آمده تخمین مناسبی از وزن شاخص‌ها بوده و حل مسأله پایان پذیرفته است.

با توجه به توضیحات داده شده، روش پیشنهادی مطابق شکل ۱ می‌باشد.



شکل (۱): فلوچارت روش پیشنهادی

۴- یافته‌های پژوهش

در این قسمت به منظور تشریح عملکرد روش پیشنهادی، ابتدا ۱۲۸ نمونه سه و پنج شاخصه تولید و کاملاً سازگار، سازگار و ناسازگار بودن آنها مشخص می‌شود. سپس برای حل نمونه‌های مسائل کاملاً سازگار، سازگار و ناسازگار با سه خطای قابل قبول، روش پیشنهادی اجرا و نتایج حاصله با الگوریتم ارائه شده در [۷] مقایسه می‌شود.

۴-۱-تولید مسائل نمونه

در این قسمت به منظور تهیه ۱۲۸ نمونه سه و پنج شاخصه مطابق مقاله [۷] اقدام می‌گردد. در این خصوص جهت تولید ۶۴ نمونه سه شاخصه، ابتدا مسأله سه شاخصه کاملاً سازگار بر اساس جدول ۴ که در آن C_3 بهترین شاخص و C_1 بدترین شاخص می‌باشد را به عنوان مسأله مبنا در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه حداکثر مقدار a_{BW} جهت این مسأله برابر ۸ می‌باشد، با جایگذاری اعداد ۱ تا ۸ به جای مقادیر ارجحیت a_{21} و a_{32}، ۶۴ نمونه سه شاخصه تولید می‌شود که از حالت کاملاً سازگار تا کاملاً ناسازگار را در بر می‌گیرد (جدول ۵).

وضعیت سازگاری ۶۴ نمونه سه شاخصه تولید شده بر اساس مقدار تابع هدف NLPM و با استفاده از محاسبه CR^O و مقایسه با CRT با لحاظ خطای قابل قبول ۰/۰۱٪ طبق جدول ۵ مشخص شده است. با توجه به جدول ۵، تعداد مسائل کاملاً سازگار، سازگار و ناسازگار سه شاخصه به ترتیب ۴، ۲۷ و ۳۳ می‌باشد.

جدول(۴): مسأله مبنا جهت تولید ۶۴ نمونه سه شاخصه

	C_1	C_2	C_3
$a_{Bj}=a_{2j}$	۸	۴	۱
$a_{jW}=a_{j1}$	۱	۲	۸

جدول (۵): وضعیت سازگاری ۶۴ مسأله نمونه سه شاخصه با خطای قابل قبول ۰/۰۱٪

CRT=۰/۲۲۶۷			a_{21}: ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
a_{32}	۱	ξ^{NLPM}	۱/۵۴۱۴	۱/۱۶۲۳	۰/۸۵۴۱	۰/۶۰۵۶	۰/۴۰۵۱	۰/۲۴۲۶	۰/۱۰۹۸	۰/۰۰۰۰
		CR^{O}	۰/۳۴۴۸	۰/۲۶۰۰	۰/۱۹۱۱	۰/۱۳۵۵	۰/۰۹۰۶	۰/۰۵۴۳	۰/۰۲۴۶	۰/۰۰۰۰
	۲	ξ^{NLPM}	۱/۱۶۲۳	۰/۷۰۱۶	۰/۳۱۶۶	۰/۰۰۰۰	۰/۲۵۸۳	۰/۴۶۸۹	۰/۶۴۱۱	۰/۷۸۳۰
		CR^{O}	۰/۲۶۰۰	۰/۱۵۶۹	۰/۰۷۰۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۵۷۸	۰/۱۰۴۹	۰/۱۴۳۴	۰/۱۷۵۲
	۳	ξ^{NLPM}	۰/۸۵۴۱	۰/۳۱۶۶	۰/۱۴۵۹	۰/۵۳۵۹	۰/۸۵۹۹	۱/۱۲۷۰	۱/۳۴۶۷	۱/۵۲۷۹
		CR^{O}	۰/۱۹۱۱	۰/۰۷۰۸	۰/۰۳۲۶	۰/۱۱۹۹	۰/۱۹۲۴	۰/۲۵۲۱	۰/۳۰۱۳	۰/۳۴۱۸
	۴	ξ^{NLPM}	۰/۶۰۵۶	۰/۰۰۰۰	۰/۵۳۵۹	۱/۰۰۰۰	۱/۳۹۴۴	۱/۷۲۵۱	۲/۰۰۰۰	۲/۲۲۸۰
		CR^{O}	۰/۱۳۵۵	۰/۰۰۰۰	۰/۱۱۹۹	۰/۲۲۳۷	۰/۳۱۲۰	۰/۳۸۵۹	۰/۴۴۷۴	۰/۴۹۸۴
	۵	ξ^{NLPM}	۰/۴۰۵۱	۰/۲۵۸۳	۰/۸۵۹۹	۱/۳۹۴۴	۱/۸۵۹۹	۲/۲۵۸۳	۲/۵۹۴۹	۲/۸۷۶۹
		CR^{O}	۰/۰۹۰۶	۰/۰۵۷۸	۰/۱۹۲۴	۰/۳۱۲۰	۰/۴۱۶۱	۰/۵۰۵۲	۰/۵۸۰۵	۰/۶۴۳۶
	۶	ξ^{NLPM}	۰/۲۴۲۶	۰/۴۶۸۹	۱/۱۲۷۰	۱/۷۲۵۱	۲/۲۵۸۳	۲/۷۲۵۱	۳/۱۲۷۰	۳/۴۶۸۹
		CR^{O}	۰/۰۵۴۳	۰/۱۰۴۹	۰/۲۵۲۱	۰/۳۸۵۹	۰/۵۰۵۲	۰/۶۰۹۶	۰/۶۹۹۶	۰/۷۷۶۰
	۷	ξ^{NLPM}	۰/۱۰۹۸	۰/۶۴۱۱	۱/۳۴۶۷	۲/۰۰۰۰	۲/۵۹۴۹	۳/۱۲۷۰	۳/۵۹۴۹	۴/۰۰۰۰
		CR^{O}	۰/۰۲۴۶	۰/۱۴۳۴	۰/۳۰۱۳	۰/۴۴۷۴	۰/۵۸۰۵	۰/۶۹۹۶	۰/۸۰۴۲	۰/۸۹۴۹
	۸	ξ^{NLPM}	۰/۰۰۰۰	۰/۷۸۳۰	۱/۵۲۷۹	۲/۲۲۸۰	۲/۸۷۶۹	۳/۴۶۸۹	۴/۰۰۰۰	۴/۴۶۸۹
		CR^{O}	۰/۰۰۰۰	۰/۱۷۵۲	۰/۳۴۱۸	۰/۴۹۸۴	۰/۶۴۳۶	۰/۷۷۶۰	۰/۸۹۴۹	۰/۹۹۹۷

توضیح: رنگ پس زمینه سبز، زرد و قرمز به ترتیب نشان‌دهنده مسائل کاملاً سازگار، سازگار و ناسازگار می‌باشد.

قابل توجه آنکه در صورتی که اعداد جدول ۵ را با ۳ و ۲ رقم اعشار در نظر بگیریم، جداول وضعیت سازگاری ۶۴ مسأله نمونه سه شاخصه با خطای قابل قبول ۰/۱٪ و ۱٪ حاصل خواهد شد. بنابراین تعداد کل مسائل سه شاخصه جهت بررسی با لحاظ ۳ نوع خطای قابل قبول، ۱۹۲ مسأله می‌باشد.

بصورت مشابه جهت مسأله پنج شاخصه، ابتدا نمونه پنج شاخصه کاملاً سازگار بر اساس جدول ۶ که در آن C_2 بهترین شاخص و C_5 بدترین شاخص می‌باشد را به عنوان مسأله مبنا در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه حداکثر مقدار a_{BW} جهت این مسأله برابر ۸ می‌باشد، با جایگذاری اعداد ۱ تا ۸ به جای مقادیر ارجحیت a_{24} و a_{45}، ۶۴ نمونه پنج شاخصه تولید می‌شود که از حالت کاملاً سازگار تا کاملاً ناسازگار را در بر می‌گیرد (جدول ۷).

وضعیت سازگاری ۶۴ نمونه پنج شاخصه تولید شده بر اساس مقدار تابع هدف NLPM و با استفاده از محاسبه CR^{O} و مقایسه با CRT با لحاظ خطای قابل قبول ۰/۰۱٪ طبق جدول ۷ مشخص شده است. با توجه به جدول ۷، تعداد مسائل کاملاً سازگار، سازگار و ناسازگار پنج شاخصه به ترتیب ۴، ۴۰ و ۲۰ می‌باشد.

در اینجا نیز اگر اعداد جدول ۷ را با ۳ و ۲ رقم اعشار در نظر بگیریم، جداول وضعیت سازگاری ۶۴ مسأله نمونه پنج شاخصه با خطای قابل قبول ۰/۱٪ و ۱٪ حاصل خواهد شد. بنابراین تعداد کل مسائل پنج شاخصه جهت بررسی با لحاظ ۳ نوع خطای قابل قبول ۱۹۲ مسأله می‌باشد.

جدول(۶):مسأله مبنا جهت تولید ۶۴ نمونه پنج شاخصه

	$C_{۱}$	$C_{۲}$	$C_{۳}$	$C_{۴}$	$C_{۵}$
$a_{Bj}=a_{۲j}$	۲	۱	۴	۲	۸
$a_{jW}=a_{j۵}$	۴	۸	۲	۴	۱

جدول (۷): وضعیت سازگاری ۶۴ مساله نمونه پنج شاخصه با خطای قابل قبول ۰/۰۱٪

CRT=۰/۴۰۲۹			$a_{۴۵}$							
			۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$a_{۲۴}$	۱	ξ^{NLPM}	۱/۵۴۱۴	۱/۱۶۲۳	۰/۸۵۴۱	۰/۶۰۵۶	۰/۴۰۵۱	۰/۲۴۲۶	۰/۱۰۹۸	۰/۰۰۰۰
		CR^{O}	۰/۳۴۴۸	۰/۲۶۰۰	۰/۱۹۱۱	۰/۱۳۵۵	۰/۰۹۰۶	۰/۰۵۴۳	۰/۰۲۴۶	۰/۰۰۰۰
	۲	ξ^{NLPM}	۱/۱۶۲۳	۰/۷۰۱۶	۰/۳۱۶۶	۰/۰۰۰۰	۰/۲۵۸۳	۰/۴۶۸۹	۰/۶۴۱۱	۰/۷۸۳۰
		CR^{O}	۰/۲۶۰۰	۰/۱۵۶۹	۰/۰۷۰۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۵۷۸	۰/۱۰۴۹	۰/۱۴۳۴	۰/۱۷۵۲
	۳	ξ^{NLPM}	۰/۸۵۴۱	۰/۳۱۶۶	۰/۱۴۵۹	۰/۵۳۵۹	۰/۸۵۹۹	۱/۱۲۷۰	۱/۳۴۶۷	۱/۵۲۷۹
		CR^{O}	۰/۱۹۱۱	۰/۰۷۰۸	۰/۰۳۲۶	۰/۱۱۹۹	۰/۱۹۲۴	۰/۲۵۲۱	۰/۳۰۱۳	۰/۳۴۱۸
	۴	ξ^{NLPM}	۰/۶۰۵۶	۰/۰۰۰۰	۰/۵۳۵۹	۱/۰۰۰۰	۱/۳۹۴۴	۱/۷۲۵۱	۲/۰۰۰۰	۲/۲۲۸۰
		CR^{O}	۰/۱۳۵۵	۰/۰۰۰۰	۰/۱۱۹۹	۰/۲۲۳۷	۰/۳۱۲۰	۰/۳۸۵۹	۰/۴۴۷۴	۰/۴۹۸۴
	۵	ξ^{NLPM}	۰/۴۰۵۱	۰/۲۵۸۳	۰/۸۵۹۹	۱/۳۹۴۴	۱/۸۵۹۹	۲/۲۵۸۳	۲/۵۹۴۹	۲/۸۷۶۹
		CR^{O}	۰/۰۹۰۶	۰/۰۵۷۸	۰/۱۹۲۴	۰/۳۱۲۰	۰/۴۱۶۱	۰/۵۰۵۲	۰/۵۸۰۵	۰/۶۴۳۶
	۶	ξ^{NLPM}	۰/۲۴۲۶	۰/۴۶۸۹	۱/۱۲۷۰	۱/۷۲۵۱	۲/۲۵۸۳	۲/۷۲۵۱	۳/۱۲۷۰	۳/۴۶۸۹
		CR^{O}	۰/۰۵۴۳	۰/۱۰۴۹	۰/۲۵۲۱	۰/۳۸۵۹	۰/۵۰۵۲	۰/۶۰۹۶	۰/۶۹۹۶	۰/۷۷۶۰
	۷	ξ^{NLPM}	۰/۱۰۹۸	۰/۶۴۱۱	۱/۳۴۶۷	۲/۰۰۰۰	۲/۵۹۴۹	۳/۱۲۷۰	۳/۵۹۴۹	۴/۰۰۰۰
		CR^{O}	۰/۰۲۴۶	۰/۱۴۳۴	۰/۳۰۱۳	۰/۴۴۷۴	۰/۵۸۰۵	۰/۶۹۹۶	۰/۸۰۴۲	۰/۸۹۴۹
	۸	ξ^{NLPM}	۰/۰۰۰۰	۰/۷۸۳۰	۱/۵۲۷۹	۲/۲۲۸۰	۲/۸۷۶۹	۳/۴۶۸۹	۴/۰۰۰۰	۴/۴۶۸۹
		CR^{O}	۰/۰۰۰۰	۰/۱۷۵۲	۰/۳۴۱۸	۰/۴۹۸۴	۰/۶۴۳۶	۰/۷۷۶۰	۰/۸۹۴۹	۰/۹۹۹۷

توضیح: رنگ پس زمینه سبز، زرد و قرمز به ترتیب نشان‌دهنده مسائل کاملاً سازگار، سازگار و ناسازگار می‌باشد.

در ادامه نسبت به پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی برای مسائل نمونه کاملاً سازگار (۲۴ مسأله)، سازگار (۲۰۱ مسأله) و ناسازگار (۱۵۹ مسأله) یعنی در مجموع ۳۸۴ مسأله سه و پنج شاخصه و مقایسه نتایج با الگوریتم ارائه شده در [۷] اقدام می‌گردد.

۴-۲-بررسی مسائل کاملاً سازگار

در این زیربند، پیاده سازی الگوریتم پیشنهادی و مقایسه نتایج حاصله با الگوریتم ارائه شده در [۷] برای ۲۴ مسأله سه و پنج شاخصه کاملاً سازگار مد نظر است. در این خصوص ابتدا با حل سه مسأله سه شاخصه کاملاً سازگار به ترتیب با تعداد ۲، ۳ و ۴ رقم اعشار قابل قبول وزن شاخص‌ها (خطای قابل قبول ۱٪، ۰/۱٪ و ۰/۰۱٪)، همان جدول ۴ ($a_{۲۱}=۲$ و $a_{۳۲}=۴$)، با مقدار تابع هدف NLPM برابر صفر روش پیشنهادی در حالت کاملاً سازگار تشریح می‌گردد. سپس CR^{O} مسأله محاسبه شد؛ چون مقدار CR^{O} برابر صفر است، مسأله کاملاً سازگار بوده (مطابق جدول ۵) و با استفاده از LPM مسأله حل می‌شود. بنابراین با استفاده از داده‌های مربوط به ارجحیت‌های شاخص‌های مسأله نسبت به مدل‌سازی مسأله طبق مدل ۱۱ اقدام و طی یکبار حل در نرم‌افزارهای استاندارد مانند لینگو وزن شاخص‌ها محاسبه گردید.

$$
\begin{aligned}
&\min \xi^L \\
&s.t: \\
&|w_3 - 8w_1| \le \xi^L \\
&|w_3 - 4w_2| \le \xi^L \\
&|w_2 - 2w_1| \le \xi^L \\
&w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\
&w_j \ge 0, \forall j
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

وزن‌های بدست آمده به عنوان وزن نهایی شاخص‌های هر ۳ مسأله بوده و حل مسأله پایان پذیرفته است. مقایسه وزن شاخص‌های بدست آمده با استفاده از روش پیشنهادی و الگوریتم قبلی ([۷]) در جدول ۸ آورده شده است. با توجه به نتیجه قضیه ذکر شده، وزن تمامی شاخص‌های حاصل از روش پیشنهادی در جدول ۸ کاملاً درست است اما نتایج الگوریتم [۷] دقیق نیست.

جدول(۸): مقایسه نتایج وزن شاخص‌های نمونه کاملاً سازگار با خطای قابل قبول ۰/۰۱٪

پارامترها	روش پیشنهادی	الگوریتم [۷]
ξ	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
$\mathbf{w_1}$	۰/۰۹۰۹	۰/۰۹۰۰
$\mathbf{w_2}$	۰/۱۸۱۸	۰/۱۸۰۰
$\mathbf{w_3}$	۰/۷۲۷۳	۰/۷۳۰۰

استفاده از LPM جهت تعیین وزن شاخص‌های مسائل کاملاً سازگار باعث شده تا نیاز به حل مسائل MILPM و تعریف نقاط شکست جهت تقریب تکه‌ای خطی SOS۲ برای این دسته مسائل نباشد. بنابراین استفاده از روش پیشنهادی در مسائل کاملاً سازگار علاوه بر بدست آوردن وزن دقیق شاخص‌ها، به دلیل عدم استفاده از تقریب تکه‌ای خطی SOS۲ باعث کاهش حجم محاسبات بصورت چشمگیری نسبت به الگوریتم [۷] شده است.

مشابه موارد تشریح شده نسبت به مدل‌سازی و حل LPM جهت تعیین وزن شاخص‌ها برای ۹ مسأله سه شاخصه کاملاً سازگار دیگر و ۱۲ مسأله پنج شاخصه کاملاً سازگار اقدام گردید. در این خصوص در ۲۴ مسأله کاملاً سازگار سه و پنج شاخصه (۶٪ از کل مسائل) حل شده عملکرد روش پیشنهادی نسبت به الگوریتم [۷] عملکرد کاملاً بهتری داشته است.

۴-۳- بررسی مسائل سازگار

در این زیربند، پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی و مقایسه نتایج حاصله با الگوریتم ارائه شده در [۷] برای ۲۰۱ مسأله سه و پنج شاخصه مد نظر است. در این خصوص با حل سه نمونه پنج شاخصه سازگار، روش پیشنهادی در حالت سازگار تشریح می‌گردد. برای اینکار با جایگذاری $a_{24}=3$ و $a_{45}=3$ در جدول ۶، یک نمونه سازگار که همان مثال ۲ ارائه شده در [۵]، با مقدار تابع هدف NLPM برابر ۰/۱۴۵۹ تشکیل گردید. شرط توقف الگوریتم جهت مسأله اول، دوم و سوم تشکیل شده به ترتیب خطای قابل قبول ۰/۱٪، ۰/۰۱٪ و ۰/۰۰۱٪ یا تعداد رقم اعشار قابل قبول وزن شاخص‌ها برابر ۲، ۳ و ۴ مشخص گردید.

سپس مقدار CR^{O} مسأله برابر ۰/۰۳۲۶ محاسبه شد. با توجه به اینکه تعداد شاخص‌های مسأله برابر ۵ و a_{BW} برابر ۸ می‌باشد مقدار CRT از جدول ۳ برابر ۰/۴۰۲۹ استخراج گردید. چون $0 < CR^{o} < 0/4029$ می‌باشد، مسأله در حالت سازگار بوده و نسبت به حل آن با استفاده از الگوریتم MILPM بهبود یافته اقدام شد.

ابتدا با استفاده از مدل‌های خطی ۴ و ۵ جهت هر کدام از شاخص‌های مسأله یکبار مدل‌های ۱۲ و ۱۳ را تشکیل داده و در نرم‌افزارهای استاندارد مانند لینگو حل شد تا محدوده قابل قبول وزن هر شاخص (ماکزیمم و مینیمم وزن هر شاخص) به عنوان یکی از شرط‌های توقف الگوریتم مشخص گردید (جدول ۹).

$$
\begin{aligned}
&\min w_j\\
&s.t:\\
&|w_2-2w_1|\le 0.1459w_1\\
&|w_2-4w_3|\le 0.1459w_3\\
&|w_2-3w_4|\le 0.1459w_4\\
&|w_2-8w_5|\le 0.1459w_5\\
&|w_1-4w_5|\le 0.1459w_5\\
&|w_3-2w_5|\le 0.1459w_5\\
&|w_4-3w_5|\le 0.1459w_5\\
&w_1+w_2+w_3+w_4+w_5=1\\
&w_j\ge 0,\forall j
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max w_j\\
&s.t:\\
&|w_2-2w_1|\le 0.1459w_1\\
&|w_2-4w_3|\le 0.1459w_3\\
&|w_2-3w_4|\le 0.1459w_4\\
&|w_2-8w_5|\le 0.1459w_5\\
&|w_1-4w_5|\le 0.1459w_5\\
&|w_3-2w_5|\le 0.1459w_5\\
&|w_4-3w_5|\le 0.1459w_5\\
&w_1+w_2+w_3+w_4+w_5=1\\
&w_j\ge 0,\forall j
\end{aligned}
\tag{۱۳}
$$

در ادامه با استفاده از روابط ۸ جهت متغیرهای x_1، x_3، x_4، x_5، y_1، y_3، y_4 و y_5 تقریب تکه‌ای خطی SOS۲ تشکیل گردید. سپس ۱۸ نقطه شکست با فاصله مساوی از یکدیگر جهت این متغیرها لحاظ شد. با توجه به مقدار a_{BW}، حداکثر مقدار ξ جهت این مسأله مطابق جدول ۱ برابر ۴/۴۷ می‌باشد. بنابراین بایستی متغیرهای x در بازه بین صفر تا ۲/۷۳۵ و متغیرهای y در بازه بین ۰/۵- تا ۲/۲۳۵ قرار گیرند. سپس مقادیر به دست آمده از تقریب خطی SOS۲ مربوط به $\varphi_1(x_j)$ و $\varphi_2(y_j)$ در مدل ۹ جایگذاری شده و MILPM مسأله به صورت مدل ۱۴ تشکیل گردید.

$$
\begin{aligned}
&\min \xi \\
&s.t: \\
&|w_2 - 2w_1| \le \varphi_1(x_1) - \varphi_2(y_1) \\
&|w_2 - 4w_3| \le \varphi_1(x_3) - \varphi_2(y_3) \\
&|w_2 - 3w_4| \le \varphi_1(x_4) - \varphi_2(y_4) \\
&|w_2 - 8w_5| \le \varphi_1(x_5) - \varphi_2(y_5) \\
&|w_1 - 4w_5| \le \varphi_1(x_5) - \varphi_2(y_5) \\
&|w_3 - 2w_5| \le \varphi_1(x_5) - \varphi_2(y_5) \\
&|w_4 - 3w_5| \le \varphi_1(x_5) - \varphi_2(y_5) \\
&\xi = (2 \times x_1) - w_1 \\
&\xi = (2 \times x_3) - w_3 \\
&\xi = (2 \times x_4) - w_4 \\
&\xi = (2 \times x_5) - w_5 \\
&\xi = (2 \times y_1) + w_1 \\
&\xi = (2 \times y_3) + w_3 \\
&\xi = (2 \times y_4) + w_4 \\
&\xi = (2 \times y_5) + w_5 \\
&w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 1 \\
&w_1 \ge 0, w_2 \ge 0, w_3 \ge 0, w_4 \ge 0, w_5 \ge 0 \\
&x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

سپس روابط تقریب SOS۲ و مدل ۱۴ ایجاد شده را در یک نرم‌افزار استاندارد مانند لینگو برنامه‌نویسی کرده و با استفاده از نقاط شکست تعریف شده MILPM را حل می‌کنیم. سپس شرط‌های تعریف شده جهت توقف الگوریتم بررسی می‌گردد. در اولین بار حل MILPM یا مرحله یک، مقدار خطای قابل قبول (اختلاف مقدار تابع هدف MILPM با NLPM) کمتر از ۱٪ و بیش از ۰/۱٪ می‌باشد ولی وزن شاخص‌ها در محدوده ۲، ۳ و ۴ رقم اعشار قرار گرفته است؛ پس جهت مسأله اول هر ۲ شرط توقف برقرار گردیده و در ۲ مسأله دیگر حداقل یکی از شرط‌های توقف یعنی در محدوده بودن وزن شاخص‌ها برقرار شده است. بنابراین وزن‌های بدست آمده به عنوان تخمین مناسبی از وزن شاخص‌های NLPM بوده و حل هر ۳ مسأله پایان پذیرفته است. وزن شاخص‌های بدست آمده با استفاده از NLPM، روش پیشنهادی و الگوریتم [۷] در جدول ۹ آورده شده است.

جدول(۹): مقایسه نتایج وزن شاخص‌های نمونه سازگار با خطای قابل قبول ۰/۰۱٪ (مثال ۲ ارائه شده در [۵])

پارامترها	NLPM	روش پیشنهادی			الگوریتم [۷]
		min w_j	max w_j	نتیجه مرحله ۱	نتیجه نهایی مرحله ۳
ξ	۰/۱۴۵۹	--	--	۰/۱۵۳۹	۰/۱۴۵۹
w_1	۰/۲۱۴۵	۰/۲۱۴۵	۰/۲۲۸۹	۰/۲۲۷۱	۰/۲۱۶۳
w_2	۰/۴۵۳۴	۰/۴۴۶۱	۰/۴۵۷۱	۰/۴۴۶۲	۰/۴۵۷۱
w_3	۰/۱۱۷۶	۰/۱۰۸۵	۰/۱۱۷۶	۰/۱۱۵۷	۰/۱۱۰۳
w_4	۰/۱۵۸۸	۰/۱۵۶۳	۰/۱۶۰۲	۰/۱۵۶۳	۰/۱۶۰۲
w_5	۰/۰۵۵۷	۰/۰۵۴۸	۰/۰۵۶۱	۰/۰۵۴۸	۰/۰۵۶۱

تعداد مراحل حل با استفاده از روش پیشنهادی نسبت به الگوریتم [۷] (مطابق جدول ۱۰) در مسأله اول (خطای قابل قبول ۱٪ یا ۲ رقم اعشار وزن شاخص‌ها) تغییری نکرده، در مسأله دوم (خطای قابل قبول ۰/۱٪ یا ۳ رقم اعشار وزن شاخص‌ها) و مسأله سوم (خطای قابل قبول ۰/۰۱٪ یا ۴ رقم اعشار وزن شاخص‌ها) به میزان ۶۷٪ کاهش داشته که نشان‌دهنده عملکرد مناسب روش پیشنهادی نسبت به الگوریتم [۷] می‌باشد.

مشابه موارد تشریح شده نسبت به مدل‌سازی و حل براساس الگوریتم MILPM جهت تخمین وزن شاخص‌ها برای ۱۱۷ مسأله پنج شاخصه سازگار دیگر و ۸۱ مسأله سه شاخصه سازگار اقدام گردید. نتایج مربوط به تعداد مراحل حل توسط روش پیشنهادی و الگوریتم [۷] و همچنین تعداد و درصد کاهش مراحل حل مربوط به ۲۰۱ مسأله سازگار حل شده در جدول ۱۰ آورده شده است.

جدول (۱۰): مقایسه نتایج حاصل از حل مسائل نمونه‌های سازگار توسط روش پیشنهادی و الگوریتم ارائه شده در [۷]

تعداد شاخص	نمونه	a_{21}/a_{45}	a_{31}/a_{44}	خطای قابل قبول ۱٪ یا محدوده ۲ رقم اعشار W: الگوریتم [۷]	روش پیشنهادی	کاهش مراحل	درصد کاهش مراحل	خطای قابل قبول ۰/۱٪ یا محدوده ۳ رقم اعشار W: الگوریتم [۷]	روش پیشنهادی	کاهش مراحل	درصد کاهش مراحل	خطای قابل قبول ۰/۰۱٪ یا محدوده ۴ رقم اعشار W: الگوریتم [۷]	روش پیشنهادی	کاهش مراحل	درصد کاهش مراحل
سه شاخصه	۱	۱	۳	۲	۲	۰	٪۰	۳	۳	۰	٪۰	۴	۳	۱	٪۲۵
	۲	۱	۴	۱	۱	۰	٪۰	۲	۲	۰	٪۰	۳	۲	۱	٪۳۳
	۳	۱	۵	۲	۱	۱	٪۵۰	۳	۱	۲	٪۶۷	۴	۳	۱	٪۲۵
	۴	۱	۶	۲	۱	۱	٪۵۰	۲	۱	۱	٪۵۰	۳	۳	۰	٪۰
	۵	۱	۷	۳	۱	۲	٪۶۷	۳	۱	۲	٪۶۷	۴	۳	۱	٪۲۵
	۶	۲	۲	۲	۱	۱	٪۵۰	۳	۲	۱	٪۳۳	۴	۳	۱	٪۲۵
	۷	۲	۳	۱	۱	۰	٪۰	۲	۱	۱	٪۵۰	۳	۲	۱	٪۳۳
	۸	۲	۵	۲	۱	۱	٪۵۰	۲	۲	۰	٪۰	۳	۲	۱	٪۳۳
	۹	۲	۶	۲	۱	۱	٪۵۰	۳	۱	۲	٪۶۷	۳	۱	۲	٪۶۷
	۱۰	۲	۷	۱	۱	۰	٪۰	۲	۲	۰	٪۰	۲	۱	۱	٪۵۰
	۱۱	۲	۸	۳	۱	۲	٪۶۷	۳	۱	۲	٪۶۷	۳	۳	۰	٪۰
	۱۲	۳	۱	۲	۱	۱	٪۵۰	۳	۳	۰	٪۰	۳	۳	۰	٪۰
	۱۳	۳	۲	۱	۱	۰	٪۰	۲	۲	۰	٪۰	۳	۳	۰	٪۰
	۱۴	۳	۳	۱	۱	۰	٪۰	۱	۱	۰	٪۰	۳	۲	۱	٪۳۳
	۱۵	۳	۴	۳	۱	۲	٪۶۷	۳	۳	۰	٪۰	۴	۴	۰	٪۰
	۱۶	۳	۵	۳	۱	۲	٪۶۷	۳	۳	۰	٪۰	۴	۴	۰	٪۰
	۱۷	۴	۱	۱	۱	۰	٪۰	۳	۱	۲	٪۶۷	۴	۴	۰	٪۰
	۱۸	۴	۳	۲	۲	۰	٪۰	۳	۲	۱	٪۳۳	۳	۳	۰	٪۰
	۱۹	۴	۴	۲	۱	۱	٪۵۰	۳	۳	۰	٪۰	۴	۴	۰	٪۰
	۲۰	۵	۱	۲	۱	۱	٪۵۰	۳	۳	۰	٪۰	۳	۳	۰	٪۰
	۲۱	۵	۲	۲	۱	۱	٪۵۰	۳	۳	۰	٪۰	۴	۴	۰	٪۰
	۲۲	۵	۳	۲	۱	۱	٪۵۰	۳	۳	۰	٪۰	۳	۳	۰	٪۰
	۲۳	۶	۱	۲	۲	۰	٪۰	۳	۲	۱	٪۳۳	۳	۳	۰	٪۰
	۲۴	۶	۲	۱	۱	۰	٪۰	۱	۱	۰	٪۰	۳	۲	۱	٪۳۳
	۲۵	۷	۱	۲	۲	۰	٪۰	۳	۲	۱	٪۳۳	۳	۳	۰	٪۰
	۲۶	۷	۲	۱	۱	۰	٪۰	۳	۲	۱	٪۳۳	۴	۳	۳	٪۲۵
	۲۷	۸	۲	۱	۱	۰	٪۰	۲	۲	۰	٪۰	۳	۳	۰	٪۰
چ	۲۸	۱	۱	۳	۱	۲	٪۶۷	۴	۲	۲	٪۵۰	۶	۳	۳	٪۵۰

تعداد شاخص	نمونه	$a_{21}\backslash a_{40}$	$a_{31}\backslash a_{42}$	خطای قابل قبول ۰/۰۱٪ یا محدوده ۴ رقم اعشار W				خطای قابل قبول ۰/۱٪ یا محدوده ۳ رقم اعشار W				خطای قابل قبول ۱٪ یا محدوده ۲ رقم اعشار W			
				درصد کاهش مراحل	کاهش مراحل	روش پیشنهادی	الگوریتم [7]	درصد کاهش مراحل	کاهش مراحل	روش پیشنهادی	الگوریتم [7]	درصد کاهش مراحل	کاهش مراحل	روش پیشنهادی	الگوریتم [7]
	۲۹	۱	۲	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۰	۰	۳	۳	٪۶۷	۲	۱	۳
	۳۰	۱	۳	٪۰	۰	۴	۴	٪۷۵	۳	۱	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۳۱	۱	۴	٪۳۳	۱	۲	۳	٪۵۰	۱	۱	۲	٪۰	۰	۱	۱
	۳۲	۱	۵	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۷۵	۳	۱	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۳۳	۱	۶	٪۵۰	۲	۲	۴	٪۶۷	۲	۱	۳	٪۶۷	۲	۱	۳
	۳۴	۱	۷	٪۴۰	۲	۳	۵	٪۷۵	۳	۱	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۳۵	۲	۱	٪۴۰	۲	۳	۵	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۳۶	۲	۲	٪۴۰	۲	۳	۵	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۳۷	۲	۳	٪۳۳	۱	۲	۳	٪۳۳	۱	۲	۳	٪۰	۰	۱	۱
	۳۸	۲	۵	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۰	۰	۳	۳	٪۶۷	۲	۱	۳
	۳۹	۲	۶	٪۶۷	۲	۱	۳	٪۶۷	۲	۱	۳	٪۰	۰	۱	۱
	۴۰	۲	۷	٪۶۷	۲	۱	۳	٪۵۰	۱	۱	۲	٪۰	۰	۱	۱
	۴۱	۲	۸	٪۶۷	۲	۱	۳	٪۶۷	۲	۱	۳	٪۰	۰	۱	۱
	۴۲	۳	۱	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۰	۰	۳	۳	٪۶۷	۲	۱	۳
	۴۳	۳	۲	٪۳۳	۱	۲	۳	٪۰	۰	۲	۲	٪۰	۰	۱	۱
	۴۴	۳	۳	٪۶۷	۲	۱	۳	٪۶۷	۲	۱	۳	٪۰	۰	۱	۱
	۴۵	۳	۴	٪۴۰	۲	۳	۵	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۴۶	۳	۵	٪۴۰	۲	۳	۵	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۴۷	۳	۶	٪۵۰	۳	۳	۶	٪۷۵	۳	۱	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۴۸	۳	۷	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۷۵	۳	۱	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۴۹	۳	۸	٪۴۰	۲	۳	۵	٪۵۰	۲	۲	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۵۰	۴	۱	٪۳۳	۱	۲	۳	٪۵۰	۱	۱	۲	٪۰	۰	۱	۱
	۵۱	۴	۳	٪۲۰	۱	۴	۵	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۵۲	۴	۴	٪۶۰	۳	۲	۵	٪۵۰	۲	۲	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۵۳	۴	۵	٪۳۳	۲	۴	۶	٪۰	۰	۴	۴	٪۶۷	۲	۱	۳
	۵۴	۴	۶	٪۷۵	۳	۱	۴	٪۶۷	۲	۱	۳	٪۶۷	۲	۱	۳
	۵۵	۵	۱	٪۰	۰	۳	۳	٪۳۳	۱	۲	۳	٪۰	۰	۱	۱
	۵۶	۵	۲	٪۵۰	۲	۲	۴	٪۳۳	۱	۲	۳	٪۵۰	۱	۱	۲
	۵۷	۵	۳	٪۴۰	۲	۳	۵	٪۰	۰	۳	۳	٪۶۷	۲	۱	۳
	۵۸	۵	۴	٪۲۵	۱	۳	۴	٪۶۷	۲	۱	۳	٪۵۰	۱	۱	۲
	۵۹	۶	۱	٪۰	۰	۳	۳	٪۰	۰	۲	۲	٪۰	۰	۱	۱
	۶۰	۶	۲	٪۰	۰	۱	۱	٪۰	۰	۱	۱	٪۰	۰	۱	۱
	۶۱	۶	۳	٪۵۰	۲	۲	۴	٪۵۰	۱	۱	۲	٪۰	۰	۱	۱
	۶۲	۶	۴	٪۵۰	۲	۲	۴	٪۳۳	۱	۲	۳	٪۰	۰	۱	۱
	۶۳	۷	۱	٪۰	۰	۳	۳	٪۳۳	۱	۲	۳	٪۰	۰	۱	۱
	۶۴	۷	۲	٪۳۳	۱	۲	۳	٪۰	۰	۲	۲	٪۰	۰	۱	۱
	۶۵	۷	۳	٪۰	۰	۳	۳	٪۰	۰	۲	۲	٪۰	۰	۱	۱
	۶۶	۸	۲	٪۰	۰	۲	۲	٪۰	۰	۱	۱	٪۰	۰	۱	۱
	۶۷	۸	۳	٪۷۵	۳	۱	۴	٪۰	۰	۱	۱	٪۰	۰	۱	۱

جدول ۱۰ نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در مسائل سه شاخصه سازگار، حداکثر طی ۲ مرحله مسأله به جواب با خطای قابل قبول ۱٪ یا محدوده ۲ رقم اعشار وزن شاخص‌ها می‌رسد و در مسائل پنج شاخصه سازگار، حداکثر طی یک مرحله مسأله به جواب با خطای قابل قبول ۱٪ یا محدوده ۲ رقم اعشار وزن شاخص‌ها می‌رسد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت استفاده از MILPM بهبود یافته باعث می‌گردد به جای حل طی حداکثر سه مرحله (مطابق الگوریتم [۷])، طی حداکثر دو مرحله وزن شاخص‌های مسأله با حداکثر ۱٪ خطا یا تعداد ۲ رقم اعشار محاسبه می‌گردد. بنابرین این امر باعث کاهش ۳۳٪ تعداد مراحل حل جهت تخمین وزن شاخص‌ها با حداکثر ۱٪ خطا یا تعداد ۲ رقم اعشار شده است.

در ادامه جهت ۸۱ مسأله سه شاخصه سازگار و ۱۲۰ مسأله پنج شاخصه سازگار حل شده آنالیز میانگین، حداکثر، حداقل تعداد و درصد کاهش مراحل هر مسأله و همچنین تعداد و درصد مسائلی که با روش پیشنهادی نسبت به الگوریتم [۷] کاهش داشته است در جدول ۱۱ آورده شده است. از جمله بهبودهای روش پیشنهادی جهت ۲۰۱ مسأله سه و پنج شاخصه سازگار حل شده نسبت به الگوریتم [۷] بصورت زیر می‌باشد:

۱- استفاده از MILPM بهبود یافته پیشنهادی جهت تخمین وزن شاخص‌های مسائل سازگار، باعث کاهش تعداد مراحل حل ۳۸ مسأله سه شاخصه (۴۷٪ از مسائل سه شاخصه) و ۸۳ مسأله پنج شاخصه (۶۹٪ از مسائل پنج شاخصه) سازگار گردیده و در بقیه موارد تعداد مراحل تغییری نکرده است. بنابراین در مجموع تعداد مراحل ۱۲۱ مسأله سه و پنج شاخصه (۶۰٪ از مسائل سه و پنج شاخصه) سازگار حل شده کاهش داشته است.

۲- استفاده از MILPM بهبود یافته پیشنهادی جهت تخمین وزن شاخص‌های مسائل سازگار، باعث بهبود عملکرد ۳۲٪ کل مسائل حل شده (۱۲۱ مسأله سه و پنج شاخصه سازگار) گردیده است.

جدول (۱۱):خلاصه نتایج حاصل از مقایسه حل مسائل نمونه‌های سازگار توسط روش پیشنهادی و الگوریتم ارائه شده در [۷]

۸۱ مسأله سه شاخصه/ ۱۲۰ مسأله پنج شاخصه		خطای قابل قبول ۰/۰۱٪ یا محدوده ۴ رقم اعشار W		خطای قابل قبول ۰/۱٪ یا محدوده ۳ رقم اعشار W		خطای قابل قبول ۱٪ یا محدوده ۲ رقم اعشار W		نوع آنالیز	تعداد شاخص
درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد		
۲۲٪	۰/۶	۱۵٪	۰/۵	۲۲٪	۰/۶	۲۸٪	۰/۷	میانگین کاهش مراحل در هر مسأله	سه شاخصه
۶۷٪	۲	۶۷٪	۲	۶۷٪	۲	۶۷٪	۲	حداکثر کاهش مراحل در یک مسأله	
۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	حداقل کاهش مراحل در یک مسأله	
۴۷٪	۳۸	۴۴٪	۱۲	۴۴٪	۱۲	۵۲٪	۱۴	مسائلی که مراحل آن کاهش یافته	
۳۶٪	۱/۲	۳۶٪	۱/۵	۳۵٪	۱/۲	۳۶٪	۱/۰	میانگین کاهش مراحل در هر مسأله	پنج شاخصه
۷۵٪	۳	۷۵٪	۳	۷۵٪	۳	۶۷٪	۲	حداکثر کاهش مراحل در یک مسأله	
۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	حداقل کاهش مراحل در یک مسأله	
۶۹٪	۸۳	۸۳٪	۳۳	۷۰٪	۲۸	۵۵٪	۲۲	مسائلی که مراحل آن کاهش یافته	

توضیح: جهت هر نوع خطا به ترتیب ۲۷ و ۴۰ مسأله سه و پنج شاخصه سازگار حل شده است.

۳- حداقل کاهش مراحل حل ۲۰۱ مسأله سه و پنج شاخصه سازگار حل شده برابر صفر مرحله (۰٪) می‌باشد. همچنین حداکثر تعداد کاهش مراحل حل مسأله سه و پنج شاخصه سازگار به ترتیب برابر ۲ مرحله (۶۷٪) و ۳ مرحله (۷۵٪) می‌باشد.

۴- عملکرد روش پیشنهادی در ۴۷٪ مسائل سه شاخصه سازگار (۳۸ مسأله از ۸۱ مسأله) و ۶۹٪ مسائل پنج شاخصه سازگار (۸۳ مسأله از ۱۲۰ مسأله) نسبت به الگوریتم [۷] بهبود داشته است؛ به عبارت دیگر با افزایش تعداد شاخص‌ها تعداد مسائل بیشتری مراحل حل آنها کاهش یافته است. همچنین حداکثر تعداد کاهش مراحل در یک نمونه سه شاخصه در حالت سازگار برابر ۲ مرحله (۶۷٪) و حداکثر تعداد کاهش مراحل در یک نمونه پنج شاخصه در حالت سازگار برابر ۳ مرحله (۷۵٪) می‌باشد. بنابراین اینگونه استنباط می‌شود که با بزرگتر شدن مسأله عملکرد روش پیشنهادی نسبت به الگوریتم [۷] بهبود بیشتری می‌یابد.

۴-۴- بررسی مسائل ناسازگار

در این زیربند، پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی و مقایسه نتایج حاصله با الگوریتم ارائه شده در [۷] برای ۱۵۹ مسأله سه و پنج شاخصه مد نظر است. در این قدم با حل سه نمونه پنج شاخصه ناسازگار به ترتیب با تعداد ۲، ۳ و ۴ رقم اعشار قابل قبول وزن شاخص‌ها (خطای قابل قبول ۱٪، ۰/۱٪ و ۰/۰۱٪)، روش پیشنهادی در حالت ناسازگار تشریح می‌گردد. بنابراین با جایگذاری $a_{24}=4$ و $a_{45}=7$ درجدول ۶، یک نمونه ناسازگار با مقدار تابع هدف NLPM برابر ۲/۰۰۰۰ تشکیل گردید. سپس مقدار CR^{O} مسأله برابر ۰/۴۴۷۴ محاسبه شد. مقدار CRT مسأله از جدول ۳ برابر عدد ۰/۴۰۲۹ استخراج گردید. چون CR^{O} مسأله بیشتر از CRT می‌باشد، مسأله در حالت ناسازگار بوده و نیاز به حل ندارد، پایان.

مشابه موارد تشریح شده، ۵۷ مسأله پنج شاخصه ناسازگار دیگر و ۹۹ مسأله سه شاخصه ناسازگار نیاز به حل ندارند. یعنی در مجموع ۴۱٪ از کل مسائل (۱۵۹ مسأله از ۳۸۴ مسأله) حل نگردیده است. بنابراین قابل اعتماد نبودن وزن‌ها در حالت ناسازگار باعث عدم حل مسائل ناسازگار گردیده که به عنوان یکی از بهبودهای مهم روش پیشنهادی می‌باشد.

۴-۵-جمع‌بندی

نتایج حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهادی جهت تعیین و تخمین وزن شاخص‌های ۳۸۴ مسأله سه و پنج شاخصه نشان می‌دهد که در ۷۹٪ مسائل، روش پیشنهادی عملکردی بهتر و در مابقی مسائل، عملکردی به خوبی روش تقریب تکه‌ای خطی SOS۲ داشته است؛ یعنی عملکرد روش پیشنهادی به ترتیب جهت حل تعداد ۱۲، ۳۸ و ۹۹ مسأله سه شاخصه کاملاً سازگار، سازگار و ناسازگار و همچنین به ترتیب جهت حل تعداد ۱۲، ۸۳ و ۶۰ مسأله پنج شاخصه کاملاً سازگار، سازگار و ناسازگار بهبود داشته است. پس روش پیشنهادی علاوه بر افزایش دقت و اطمینان نتایج باعث کاهش حجم محاسبات نسبت به الگوریتم [۷] شده است. بنابراین عملکرد روش پیشنهادی مناسب ارزیابی می‌گردد.

۵ – بحث

۱- در روش پیشنهادی جهت تخمین وزن شاخص‌های مسائل سازگار از MILPM بهبود یافته با برقراری حداقل ۲ شرط توقف، در محدوده قابل قبول بودن وزن کلیه شاخص‌ها یا برقراری خطای قابل قبول، استفاده گردید. با توجه به نتایج بدست آمده، در ۹۸٪ از مسائل سه شاخصه سازگار (۷۹ مسأله) و در ۱۰۰٪ از مسائل پنج شاخصه سازگار (۱۲۰ مسأله) حل شده، شرط توقف در محدوده قابل قبول بودن وزن کلیه شاخص‌ها زودتر برقرار گردیده است. به عبارت دیگر در ۹۹٪ از ۲۰۱ مسأله سازگار حل شده شرط مذکور زودتر برقرار گردیده است. بنابراین احتساب این

شرط توقف به تنهایی در مسائل پنج شاخصه کفایت می‌کند. همچنین احتساب این شرط به تنهایی در ۹۸٪ مسائل سه شاخصه باعث طولانی شدن مراحل حل نسبت به وضعیتی که هر دو شرط بررسی شود نخواهد شد.

۲- همبستگی بالایی بین CR^I و CR^O (بیش از ۹۵٪) وجود دارد [۴]. با استفاده از CRT، شاخص‌های CR^I و CR^O وضعیت سازگاری ۶ نمونه از ۶۴ نمونه سه شاخصه تولید شده در این مقاله را متفاوت نشان داده‌اند یعنی یکی سازگار و دیگری مسأله را ناسازگار نشان داده است؛ ولی شاخص‌های CR^I و CR^O وضعیت سازگاری همه ۶۴ نمونه پنج شاخصه تولید شده در این مقاله را یکسان نشان داده‌اند. بنابراین با توجه به نتایج بدست آمده، ضریب همبستگی بالای بین CR^I و CR^O و مزایای بکارگیری CR^I (تشریح شده در بند ۲-۱) می‌توان در روش پیشنهادی به جای CR^O از CR^I جهت مشخص کردن سازگاری مسائل استفاده کرد.

۳-در مسائل سه شاخصه سازگار حل شده، تخمین وزن بدترین شاخص فقط با یک مرحله حل روش پیشنهادی تا ۴ رقم اعشار محاسبه شده است. در مسائل پنج شاخصه سازگار حل شده، تخمین وزن بدترین شاخص فقط با یک مرحله حل روش پیشنهادی تا ۳ رقم اعشار محاسبه شده است. همچنین در ۸۳٪ مسائل پنج شاخصه سازگار حل شده تخمین وزن بدترین شاخص فقط با یک مرحله حل روش پیشنهادی تا ۴ رقم اعشار محاسبه شده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در صورتی که تصمیم‌گیرنده فقط نیاز به دانستن وزن بدترین شاخص یک مسأله سازگار را داشته باشد فقط با یک مرحله حل MILPM تخمین وزن آنرا تا ۳ رقم اعشار بدست خواهد آورد.

۴-در تمام مسائل سازگار حل شده فقط با یک مرحله حل MILPM تخمین وزن شاخص‌های NLPM با یک رقم اعشار بدست می‌آید. بنابراین می‌توان استنباط نمود که در همه مسائل چند شاخصه سازگار نیز فقط با یک مرحله حل MILPM تخمین وزن شاخص‌های NLPM در محدوده یک رقم اعشار بدست می‌آید.

۵- نتایج بدست آمده از حل مسأله‌های سه شاخصه سازگار، نشان‌دهنده این است که حد بالا و پایین شاخص‌های محاسبه شده در این مسائل بر اساس مدل‌های خطی ۴ و ۵ یکی می‌باشد (یعنی وزن بهینه شاخص مورد نظر منحصر به فرد است). از طرف دیگر زمانی مدل ۱ دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد که مسأله بیش از سه شاخص داشته و مسأله کاملاً سازگار نباشد [۱۰]. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت زمانی که مسأله سه شاخصه و سازگار باشد؛ در قدم ۳ روش پیشنهادی می‌توان به جای استفاده کامل از الگوریتم MILPM بهبود یافته، وزن هر کدام از شاخص‌های مسأله را فقط با مدل‌سازی و حل یکی از مدل‌های خطی ۴ و ۵ محاسبه کرد.

۶ – نتیجه‌گیری

BWM از روش‌های جدید تعیین وزن شاخص‌ها در مسائل MADM بوده که در آن وزن بهینه شاخص‌ها طی تشکیل و حل یک NLPM تعیین می‌شود. با توجه به مشکلات حل مدل‌های NLPM، تلاش‌هایی جهت تعیین و تخمین وزن‌های BWM طی تشکیل و حل مدل‌های LPM و MILPM صورت پذیرفته است. وضعیت سازگاری مسائل در این روش‌های ارائه شده لحاظ نگردیده است. همچنین هر کدام از روش‌های ارائه شده جهت حل هر کدام از مسائل کاملاً سازگار، سازگار و ناسازگار عملکرد بهتری دارند. بنابراین استفاده از CR و CRT در روش پیشنهادی باعث مشخص کردن وضعیت سازگاری مسأله و استفاده متناسب از مدل‌های LPM و MILPM و جلوگیری از حل مسائل ناسازگار به دلیل عدم اطمینان از جواب‌های این مسائل می‌شود.

عدم حل مسائل ناسازگار باعث بهبود در حل ۴۱٪ از کل مسائل تعریف شده این مقاله گردیده است. استفاده از LPM در روش پیشنهادی جهت حل مسائل کاملاً سازگار علاوه بر تعیین دقیق وزن شاخص‌ها باعث جلوگیری از تعریف نقاط شکست جهت تقریب تکه‌ای خطی SOS[۲] و استفاده از الگوریتم MILPM و بهبود در حل ۶٪ از کل

مسائل شده است. همچنین استفاده از MILPM بهبود یافته جهت تخمین وزن شاخص‌های مسائل سازگار تا هر رقم اعشار (حداکثر تا ۴ رقم اعشار)، باعث کاهش مراحل حل ۶۰٪ از مسائل سازگار و ۳۲٪ از کل مسائل حل شده گردیده است. از طرف دیگر با استفاده از MILPM بهبود یافته تخمین وزن شاخص‌ها طی حداکثر ۲ مرحله با حداکثر ۰.۱٪ خطا یا تعداد ۲ رقم اعشار بدست می‌آید؛ بنابراین MILPM بهبود یافته باعث کاهش ۳۳٪ تعداد مراحل حل جهت تخمین وزن شاخص‌ها با حداکثر ۰.۱٪ خطا یا تعداد ۲ رقم اعشار نسبت به الگوریتم [۷] شده است. پس در مجموع در ۷۹٪ از مسائل حل شده، روش پیشنهادی عملکردی بهتر و در مابقی مسائل، عملکردی به خوبی روش تقریب تکه‌ای خطی SOS۲ ([۷]) داشته است؛ بنابراین روش پیشنهادی برای تعیین و تخمین وزن شاخص‌های BWM با استفاده از LPM و MILPM عملکرد مطلوب و بهتری از الگوریتم [۷] دارد.

پیشنهاد می‌شود جهت تحقیقات آتی با استفاده از دیگر روش‌های تقریب جهت خطی کردن NLPM بهره گرفت. همچنین معرفی و استفاده از شاخص‌های دیگر به همراه CR جهت اطمینان از نتایج بدست آمده می‌تواند مفید باشد.

فهرست منابع

[۱] اصغرپور، محمدجواد. تصمیم‌گیری‌های چند معیاره، چاپ هفدهم، انتشارات دانشگاه تهران. (۱۳۹۸).

[۲] Rezaei, J. (۲۰۱۵). Best-worst multi-criteria decision-making method. Omega, ۵۳, ٤۹-۵۷.

[۳] Mi, X., Tang, M., Liao, H., Shen, W., and Lev, B. (۲۰۱۹). The state-of-the-art survey on integrations and applications of the best worst method in decision making: Why, what, what for and what's next?, Omega, Vol. ۸۷, pp. ۲۰۵-۲۲۵.

[٤] Liang, F., Brunelli, M., and Rezaei, J. (۲۰۲۰). Consistency issues in the best worst method: Measurements and thresholds, Omega, Vol. ۹٦, pp. ۱-۱۱.

[۵] Rezaei, J. (۲۰۱٦). Best-worst multi-criteria decision-making method: Some properties and a linear model. Omega, ٦٤, ۱۲٦-۱۳۰.

[٦] Beemsterboer, D. J. C., Hendrix, E. M. T., & Claassen, G. D. H. (۲۰۱۸). On solving the best-worst method in multi-criteria decision-making. IFAC-PapersOnLine, ۵۱(۱۱), ۱٦٦۰-۱۶۶۵.

[۷] دهقانی، محمدرضا. عباسی، مهدی. (۱۴۰۰). تخمین جواب مدل برنامه‌ریزی غیرخطی روش بهترین-بدترین با استفاده از حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی مختلط. پژوهش‌های نوین در ریاضی.

[۸] Liao, H., Mi, X., Yu, Q., & Luo, L. (۲۰۱۹). Hospital performance evaluation by a hesitant fuzzy linguistic best worst method with inconsistency repairing. Journal of Cleaner Production, ۲۳۲, ٦۵۷-٦۷۱.

[۹] Chitsaz, N., & Azarnivand, A. (۲۰۱۷). Water scarcity management in arid regions based on an extended multiple criteria technique. Water Resources Management, ۳۱(۱), ۲۳۳-۲۵۰.

[۱۰] Rezaei, J. (۲۰۲۰). A concentration ratio for nonlinear best worst method. International Journal of Information Technology & Decision Making, ۱۹(۰۳), ۸۹۱-۹۰۷.

[۱۱] Duleba, S., Moslem, S., & Esztergár-Kiss, D. (۲۰۲۱). Estimating commuting modal split by using the Best-Worst Method. European Transport Research Review, ۱۳(۱), ۱-۱۲.

[۱۲] Firouzabadi, S. K., Ghahremanloo, M., Keshavarz-Ghorabaee, M., & Saparauskas, J. (۲۰۱۹). A new group decision-making model based on bwm and its application to managerial problems. Transformations in Business & Economics, ۱۸(۲), ٤۷.

[۱۳] Beale, E. M. L., & Tomlin, J. A. (۱۹۷۰). Special facilities in a general mathematical programming system for non-convex problems using ordered sets of variables. OR, ٦۹(٤٤۷-٤۵٤), ۹۹.

[۱۴] انصاری، محمدرضا. حسنی‌فرد، فاطمه. (۱۳۹۶). حل یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی، عدد صحیح و غیرمحدب با استفاده از روش‌های محدب‌سازی مبتنی بر مجموعه منظم خاص. فصلنامه سیستم‌های مختلط و غیرخطی, ۱(۱), ۷۱-۸۵.

[۱۵] MirHassani, S. A., &Hooshmand, F. (۲۰۱۹). Methods and Models in Mathematical Programming. Springer International Publishing.

[۱٦] Akbari-Dibavar, A.,Mohammadi-Ivatloo, B., & Zare, K. (۲۰۲۰). Optimal stochastic bilevel scheduling of pumped hydro storage systems in a pay-as-bid energy market environment. Journal of Energy Storage, ۳۱, ۱۰۱٦۰۸.

[۱۷] Huchette, J., & Vielma, J. P. (۲۰۱۹). A combinatorial approach for small and strong formulations of disjunctive constraints. Mathematics of Operations Research, ٤٤(۳), ۷۹۳-۸۲۰.