دسترسی در سایت http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دهم، شماره چهل و هفتم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۳
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

کارائی مدل لجستیک تصادفی در پیش‌بینی جمعیت مبتلا به ویروس ایدز در ایران

صاحبه آقابابایی[۱]، رمضان رضائیان[۱]*، سیدصالح محسنی[۲]، سمیرا علا [۱]

(۱) گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، واحد نور، دانشگاه آزاد اسلامی، نور، ایران
(۲) گروه الکترونیک، دانشکده مهندسی، واحد نور، دانشگاه آزاد اسلامی، نور، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۰۸

چکیده

مطالعه رشد جمعیت و پیش‌بینی جمعیت یک مشکل اصلی در زیست‌شناسی است. از آنجائیکه نرخ رشد نسبت به زمان کاملا مشخص و معلوم نیست و به عوامل محیطی که کاملا تصادفی می‌باشند، بستگی دارد پس همه جمعیت‌های زیستی(ویروس، انسان، باکتری و ...) نوعی رفتار تصادفی یا نویزی دارند. چنین نویزهایی به طور کلی به عنوان یک فرآیند تصادفی معرفی می‌شود. هدف این مقاله پیش‌بینی تعداد افراد مبتلا به ویروس ایدز در ایران بر اساس مدل لجستیک تصادفی و مقایسه آن با مدل غیرتصادفی(قطعی) می‌باشد. برای مطالعه موردی هم برای پیش‌بینی تعداد بیماران مبتلا به ویروس ایدز در ایران، جمعیت مبتلایان را طی سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۴ مد نظر قرار دادیم و به کمک برنامه متلب تعداد بیماران را برای سال‌های آتی شبیه‌سازی نمودیم. مقایسه نتایج بدست آمده با مقادیر واقعی و نتایج حاصل از مدل‌های دیگر، نشان از دقت و کارائی بالای مدل لجستیک تصادفی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: مدل لجستیک تصادفی، پیش‌بینی، انتگرال ایتو، ویروس ایدز.

* عهده‌دار مکاتبات: Email:r.rezaeyan@gmail.com

۱- مقدمه

مدل‌بندی رشد جمعیت موضوع مهمی در جهان واقعی است. یکی از این جمعیت‌های خاص، جمعیت مبتلا به ویروس ایدز می‌باشد. پژوهش‌های ژنتیکی نشان می‌دهند که ویروس اچ ای وی در اصل در اوایل قرن بیستم میلادی در غرب آفریقا جهش یافته و پدیدار شده است و بسرعت در دیگر نقاط جهان پخش گردیده و خیلی از کشورها در حال حاضر درگیر مشکلات مربوط به انتشار ویروس در بین افراد بوده و در صدد برنامه‌ریزی برای پیشگیری از انتشار آن و درمان افراد مبتلا به آن می‌باشند. برای رسیدن به این هدف باید آمار دقیقی از بیماران مبتلا به این ویروس و هم چنین پیش بینی دقیقی از تعداد آنها در سال های آتی داشته باشیم.

اصولا پیش بینی عنصر کلیدی برای تصمیم‌گیری‌های مدیریتی است چراکه پیش‌بینی، برآورد پیشامدهای آینده است و هدف از پیش‌بینی کاهش ریسک در یک تصمیم‌گیری است. لذا قادر به حذف کامل ریسک در پیش‌بینی نیستیم و در یک تصمیم صحیح که مجموعی از تصمیم‌گیری بر اساس صحت پیش‌بینی و خطای ناشی از آن می-باشد، باید بتوانیم برآورد دقیقتری بر اساس اطلاعات موجود داشته باشیم تا بتوانیم تصمیم صحیح‌تری بگیریم.

در این زمینه در اکثر کشورها مطالعات زیادی صورت گرفته و به نتایجی هم دست یافتند که در این مطالعات، مدل‌هائی هم ارائه کردند که تقریبا تمام این مدل‌ها بر اساس مدل‌های ریاضی و آمار می‌باشد. ریاضیات و آمار نقش مهمی در مدل‌بندی پدیده‌های طبیعی و غیرطبیعی دارند. مدل‌های حاصل معمولاً به فرم‌های قطعی (غیرتصادفی)، تصادفی و مدل‌های تصادفی پیوسته مختلط می‌باشند.

تقریبا تا سال ۱۹۵۰ میلادی به دلیل نبود کامپیوترهای توانمند و روش‌های عددی مناسب از عامل‌های تصادفی در این مدل‌ها صرف‌نظر می‌کردند که بعد از رفع این مشکلات عامل‌های تصادفی را هم به این مدل‌ها اضافه نمودند. در نهایت مدل‌های غیرتصادفی به تصادفی تبدیل گشته و اکثر این مدل‌ها به معادلات دیفرانسیل تصادفی منجر گردیده است.

شبیه‌سازی عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی معمولی برای مدل‌های زیست ریاضی توسط کارلتی و همکارانش بیان گردید[۱]. آنها اثرات جایگشت نویز سفید و رنگی را در مدل‌های مربوط به رشد جمعیت در نظر گرفتند و به روش عددی مدل تصادفی مربوطه را شبیه‌سازی کردند. آندریاس در سال ۲۰۰۵ مدل نرخ رشد جمعیت را بصورت نمائی در نظر گرفت[۲]. سپس خدابین، مالک نژاد و همکاران مدل تصادفی رشد جمعیت نمائی را به روش تحلیلی و عددی شبیه‌سازی نمودند[۳]. ماتیسا و همکاران مدل رشد جمعیت لجستیک تصادفی را برای نرخ زاد و مرگ در نظر گرفته و جواب تحلیلی مدل مربوطه را بدست آوردند[۴]. رضائیان و جعفری یک فاصله اطمینان برای مدل رشد جمعیت نمایی تصادفی با نویز مخلوط را ارائه کرده‌اند[۵].

آنچه که در مدل معادله دیفرانسیل لجستیک تصادفی مهم است، برآورد پارامترهای مدل می‌باشد. در سال ۲۰۰۹ میلادی رحمان و همکارانش به برآورد پارامترهای مدل لجستیک تصادفی پرداختند[۹].

در این مقاله قصد داریم با مدل لجستیک تصادفی که زنگ و همکارانش در [۱۰] برای انتشار ویروس در ۲۰۱۷ در نظر گرفتند، بر اساس جمعیت افراد مبتلا به ویروس ایدز در ایران طی سال های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۴، تعداد مبتلایان به این ویروس را برآورد و تعداد افراد مبتلا به این ویروس را در سال‌های بعد پیش‌بینی نماییم.

برای این منظور مقاله را به چهار بخش تقسیم می‌نماییم: در بخش اول مفاهیم اولیه ارایه می‌شود در بخش بعد حسابان تصادفی را شرح خواهیم داد. سپس به شبیه سازی عددی می‌پردازیم و در نهایت نتیجه‌گیری خواهیم نمود.

۲- مفاهیم اولیه

حسابان تصادفی مربوط به مطالعه فرآیندهای تصادفی، انتگرالهای تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌باشد. برای مطالعه این موضوعات، نیاز به مباحث نظریه احتمال و فرآیندهای تصادفی داریم. هدف از این بخش، مروری بر تعاریف اساسی و نتایج اصلی مربوط به حسابان تصادفی شامل نظریه احتمال و فرآیندهای تصادفی می‌باشد.

۲-۱- متغیر تصادفی:

فرض کنید (Ω, F, P) یک فضای احتمال باشد. $X:\Omega \to R$ را یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال (Ω, F, P) گوئیم.

۲-۲- فرآیند تصادفی:

در بسیاری از کاربردهای فیزیکی، یک دنباله از متغیرهای تصادفی اغلب می‌تواند بعنوان توصیف ساده‌ای از ریشه‌یابی یک سیستم احتمالاتی روی لحظه‌های گسسته زمان در نظر گرفته شود. از این رو رفتار چنین سیستمی می‌تواند توسط یک خانواده از متغیرهای تصادفی که منجر به یک فرآیند تصادفی می‌شود، توصیف گردد.
یک فرآیند تصادفی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی $X(t,\omega)$ از دو متغیر $t \in T$ و $\omega \in \Omega$، روی فضای مشترک (Ω, F, P) است که مقادیر آن حقیقی فرض شده و بعنوان تابعی از ω برای هر t ی ثابت می‌باشد. پارامتر t بعنوان زمان در مجموعه زمان T تعبیر می‌شود. برای هر t ی ثابت $X(t,.)$ یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال Ω می‌باشد و برای هر ω ی ثابت $X(.,\omega)$ یک مسیر نمونه یا مسیر فرآیند تصادفی نامیده می‌شود. اگر مجموعه زمان T گسسته فرض شود آنگاه $X(t,\omega)$ یک فرآیند تصادفی زمان گسسته فرض می‌شود، مادامی‌که اگر مجموعه زمان T یک بازه کراندار یا بیکران باشد آنگاه $X(t,\omega)$ یک فرآیند تصادفی زمان پیوسته نامیده می‌شود. بطور شهودی اگر t بعنوان زمان و ω بعنوان یک ذره(یا آزمایش) فرض شده باشند آنگاه $X(t,\omega)$ می‌تواند بعنوان نمایش مکان (یا نتیجه) یک ذره(یا آزمایش) در زمان t تعبیر شود. برای هر ω ی ثابت فرآیند تصادفی $X(t,\omega)$ را با $X(t)$ نشان می‌دهیم، لذا در این مقاله، هرگاه صحبت از فرآیند تصادفی $X(t)$ می‌شود، منظور فرآیند تصادفی $X(t,\omega)$ بازای ω ثابت است.

۲-۳- فرآیند وینر:

فرآیند $\{W_t : t \ge 0\}$ را فرآیند وینر گوئیم هرگاه

۱) $P((W(0)=0))=1$

۲) $\{W_t\}$ یک فرآیند با نموهای مستقل باشد. یعنی W_{t_0}, $W_{t_1}-W_{t_0}$ و ... و $W_{t_n}-W_{t_{n-1}}$ مستقل از هم باشند.

۳) $\Delta W_t = W_{t+h} - W_t \to N(0,h)$

اگر بازای هر $T>0$، ثابتهای مثبت D,β,α وجود داشته باشند بطوری که فرآیند تصادفی $X(t)$ در شرط:

$$E(\left|X(t)-X(s)\right|^{\alpha}) \le D\left|t-s\right|^{\beta+1},$$

به‌ازای هر $s,t \in [0,T]$ صدق کند، آنگاه فرآیند تصادفی $X(t)$ دارای یک نسخه پیوسته خواهد بود. چون برای فرآیند وینر $W(t)$؛ $E(|W(t)-W(s)|^4)=3(t-s)^2$، به‌ازای هر $s,t \in T$ است، بنابراین فرآیند وینر $W(t)$ در

شرط کولموگورف فوق با انتخاب $\alpha = 4$ ، $D = 3, \beta = 1$، صدق می‌کند و در نتیجه فرآیند وینر $W(t)$ دارای یک نسخه پیوسته خواهد بود[۶]. حال چند ویژگی اساسی فرآیند وینر را بیان می‌کنیم:

۲-۴- چند خصوصیت مهم فرآیند وینر

الف- فرآیند وینر دارای مسیرهای نمونه ای پیوسته است.
ب- حرکت براونی تقریباً در هیچ نقطه‌ای از مسیر مشتق ندارد.
ج- حرکت براونی دارای خاصیت مارکفی است.
د- حرکت براونی دارای خاصیت مارتینگلی است.
ه- مسیر براونی در هیچ بازه ای یکنوا نمی‌باشد.
برای اثبات خواص فوق می‌توانید به منبع [۷] مراجعه نمائید.

۳- حسابان تصادفی

در محاسبات تصادفی به انتگرال هائی برخورد می‌نمائیم که با انتگرال‌های معمولی، تفاوت فاحشی دارد چراکه در انتگرال تصادفی. در این فصل قصد داریم چنین انتگرال‌های تصادفی را تعریف نمائیم، خواص آن را بیان کنیم و سپس هم به روش مستقیم یعنی به کمک تعریف آن و گسسته‌سازی توسط افراز روی بازه زمانی و هم بکمک فرمول زنجیره‌ای تصادفی حاصل انتگرال تصادفی را بدست آوریم.

۳-۱- انتگرال ایتو

فرض کنید β سیگما بورل در $F,[0, \infty[$ سیگما جبر روی Ω و $\nu = \nu(S,T)$ تابعی از کلاس $f(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega \to R$ باشد، در این صورت $(t, \omega) \to f(t, \omega)$ اندازه‌پذیر روی $\beta \times F$ هستند و $E\ [\int_S^T f^2(t,\omega)dt] < \infty.$ [۶] را ببینید.

تعریف: فرض کنید $f \in \nu(S, T)$. انتگرال ایتو f از S تا T بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_S^T \varphi_n(t,\omega)dB_t(\omega).$$

وقتی که φ_n دنباله‌ای از توابع باشد که در شرط زیر صدق نمایند:

$E\ [(\int_S^T (f(t,\omega) - \varphi_n(t,\omega))^2 dt\ ] \to 0,\ n \to \infty.$ [۶] را ببینید.

قضیه ۱ (خاصیت ایزومتری ایتو):

فرض کنید $f \in \nu(S, T)$، در این صورت:

$$E\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)\right)^2\right] = E\left[\int_S^T f^2(t,\omega)dt\right]$$

برای اثبات به صفحه ۲۹ اوکسندال [۶] مراجعه نمائید.

۳-۲- خواص انتگرال ایتو:

فرض کنید $F,g \in V(0,T)$ و $0 \le S \le U \le T$ در این صورت:

۱) $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$

۲) $\int_S^T (cf + g) dB_t = c\int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$

۳) $E\left(\int_S^T dB_t\right) = 0$

۴) فرمول ایتو (قاعده زنجیره ای ایتو) در حالت یک بعدی: فرض کنید

$g(t,x) \in C^2([0,\infty)\times R)$ و $Y(t) = g(t,X(t))$،

$$dY(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X(t))dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X(t))dX(t) + $$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X(t))(dX(t))^2$$

وقتی که:

$(dX(t))^2 = dX(t).dX(t),$ و

$dt.dt = dt.dX(t) = dX(t).dt = 0,$ و

$dB_t.dB_t = dt.$

به [۶] مراجعه شود.

۳-۳- مدل رشد لجستیک تصادفی

مدل رشد جمعیت زیر را در نظر بگیرید که در آن $N(t)$ تعداد افراد جمعیت در زمان t، $N(0)$ جمعیت اولیه در زمان $t=0$ که غیر تصادفی است، k گنجایش محیط مورد نظر (اندازه ماکزیمم جمعیت) و $\frac{N(t)}{k}$ نسبت پایداری جمعیت می‌باشد:

$$\frac{dN(t)}{dt} = a(t)N(t)\left(1-\frac{N(t)}{k}\right), t \ge 0$$

جواب این معادله دیفرانسیل معمولی بفرم زیر است ([۶] را ببینید):

$$N(t) = \frac{kN(0)}{N(0)+(k-N(0))e^{-\int_0^t r(t)dt}}$$

با فرض $r(t)=r$ (r مقدار ثابت)، نتیجه می‌شود:

$$N(t)=\frac{kN(0)}{N(0)+\left(k-N(0)\right)e^{-rt}}$$

از آنجائیکه نرخ رشد کاملا مشخص نمی‌باشد و به عوامل تصادفی وابسته است، پس در مدل رشد لجستیک قطعی عامل نرخ رشد را به صورت زیر در نظر می‌گیرند:

$$a(t)=r(t)+\text{``}noise\text{''} \quad (۱)$$

که $r(t)$ تابعی غیرتصادفی از متغیر زمان است. بنابراین:

$$a(t)=r(t)+\alpha(t)W(t),$$

وقتی که $W(t)=\frac{dB(t)}{dt}$ یک فرآیند نویز سفید یک بعدی و $B(t)$ حرکت براونی یک بعدی، $\alpha(t)$ تابعی غیرتصادفی است. کامپیلو و همکارانش با در نظر گرفتن نرخ رشد بصورت (۱)، مدل رشد لجستیک تصادفی بفرم زیر را در نظر گرفتند:

$$dN_t=\left(\lambda-\mu-\alpha N_t\right)N_t dt+ \quad (۲)$$
$$+\rho\sqrt{(\lambda+\mu+\alpha N_t)}N_t\, dB_t$$

که $\lambda>0$ نرخ زاد (تولد)، $\mu>0$ نرخ مرگ، $\alpha>0$ ضریب لجستیک و $\rho>0$ شدت نویز است. پارامترهای مدل به روش‌های مختلف براورد می‌شود [۸و۹]. توجه داریم که مدل (۲) را می‌توان بفرم زیر بازنویسی کرد (به [۸] مراجعه شود):

$$dN_t=r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)N_t dt+\rho\sqrt{r'(1+\frac{N_t}{K'})N_t}\, dB_t \quad (۳)$$

با $r=\lambda-\mu, K=\frac{r}{\alpha}, r'=\lambda+\mu, K'=\frac{r'}{\alpha}$ و $\rho=\frac{1}{\sqrt{K}}$.

نکته ۱:

برای هر مقدار اولیه نامنفی N_0، معادله (۲) یا معادل آن (۳) دارای یک جواب منحصربفرد به صورت زیر می‌باشد.

$$N(t)=\frac{kN(0)}{N(0)\pm\left(k-N(0)\right)e^{[\psi(t)]}}$$

وقتی که:

$$\psi(t)=-((rt-\frac{\alpha^2}{2}t+\frac{\alpha^2}{k}\int_0^t N(s)ds)+\alpha B(t))$$

اثبات: به [۷] مراجعه شود.

توجه شود که اگر $\alpha=0$ باشد، جواب به جواب معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود (به [۷] مراجعه شود).

۴ – شبیه‌سازی عددی

جدول (۱) شامل تعداد واقعی جمعیت مبتلایان به ویروس ایدز طی سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۴ است.
فرض می‌کنیم $t=0$ متناظر با سال ۱۳۸۴ باشد، بنابراین جمعیت اولیه $N_0 = 13702$.

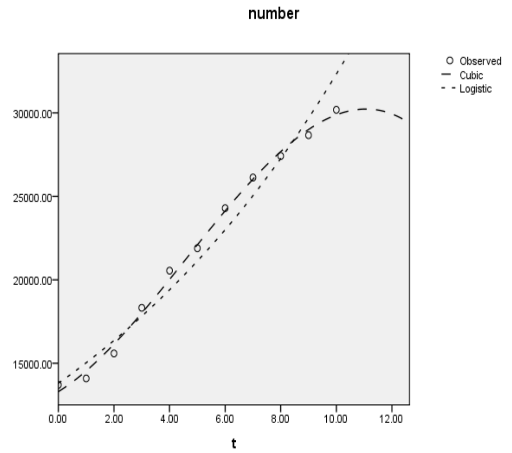
جدول ۱: جمعیت مبتلایان به ویروس ایدز

زمان	سال	تعداد
۰	۱۳۸۴	۱۳۷۰۲
۱	۱۳۸۵	۱۴۰۹۰
۲	۱۳۸۶	۱۵۵۸۷
۳	۱۳۸۷	۱۸۳۲۰
۴	۱۳۸۸	۲۰۵۴۷
۵	۱۳۸۹	۲۱۸۹۰
۶	۱۳۹۰	۲۴۲۹۰
۷	۱۳۹۱	۲۶۱۲۵
۸	۱۳۹۲	۲۷۴۱۶
۹	۱۳۹۳	۲۸۶۶۳
۱۰	۱۳۹۴	۳۰۱۸۳

جدول۲. جدول ضریب تعیین حاصل از مدل‌های مختلف

مدل رگرسیونی	ضریب تعیین	انحراف معیار خطاهای مدل
لگاریتمی	۰/۹۹۰	۶۱۹/۱۹۲
درجه سه	۰/۹۹۶	۴۴۸/۹۰۷
لجستیک	۰/۹۷۲	۰/۰۵۰

بر اساس مشاهدات اولیه جدول (۱) و به کمک نرم‌افزار SPSS، مدل‌های مختلفی را برازش نمودیم و ضریب تعیین و انحراف معیار خطاهای مدل را در مدل‌های مختلف بدست آوردیم که نتایج در جدول (۲) مشخص شده‌اند. مطابق جدول (۲)، برحسب ضریب تعیین بهترین مدل، مدل رگرسیونی درجه سه است ولی انحراف معیار مدل رگرسیونی درجه سه بسیار بالاست. با مقایسه ضریب تعیین و انحراف معیار بدست آمده مدل رگرسیون لجستیک را برای این سری از مشاهدات برازش می‌نمائیم. حال پارامترهای مدل لجستیک را بر اساس داده‌های جدول (۱)، به کمک نرم‌افزار SPSS برآورد می‌نمائیم. نتایج در جدول (۳) آمده است.



شکل (۱): نمودار برآورد جمعیت مبتلایان به ویروس ایدز با مدل رگرسیونی درجه ۳ و لجستیک

جدول۳. جدول ضرایب مدل لجستیک

	ضرائب غیر استاندارد		ضرائب استاندارد	Sig.
	B	Std. Error	Beta	
t	۰/۹۱۸	۰/۰۰۴	۰/۳۷۳	۰/۰۰۰
Constant	۰/۰۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰		۰/۰۰۰

مطابق جدول (۳)، β_0 =۰/۰۰۰۰۰۷ و β =۰/۹۱۸ بنابراین برای محاسبه نرخ رشد جمعیت مبتلایان به ویروس ایدز حاصل از مدل لجستیک داریم:

$$\hat{r}(t)=\frac{1}{1+e^{-\beta_0+\beta t}}t\geq 0$$

که $\hat{r}(t)$ نرخ رشد جمعیت بیماران طی سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۴ در جدول (۴) نشان داده شده است.
پیش‌بینی تعداد افراد مبتلا به ویروس ایدز در ایران در سال‌های ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۹ بر اساس مدل لجستیک قطعی به کمک نرم‌افزار SPSS در جدول (۵) نشان داده شده است. هم چنین یک فاصله اطمینان در سطح اطمینان ۹۵ ٪ در جدول (۵) برای تعداد بیماران محاسبه شد.

جدول۴. جدول برآورد نرخ رشد بر اساس مدل لجستیک

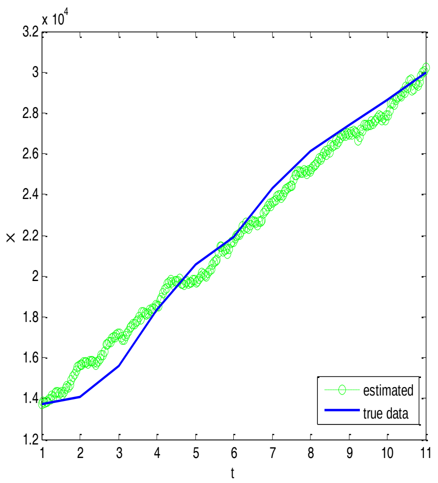
T	سال	N(t)	$\hat{r}(t)$
۰	۱۳۸۴	۱۳۷۰۲	------
۱	۱۳۸۵	۱۴۰۹۰	۰/۲۷۲
۲	۱۳۸۶	۱۵۵۸۷	۰/۱۳۷
۳	۱۳۸۷	۱۸۳۲۰	۰/۰۵۹

۰/۰۲۴	۲۰۵۴۷	۱۳۸۸	۴
۰/۰۱۰	۲۱۸۹۰	۱۳۸۹	۵
۰/۰۰۴	۲۴۲۹۰	۱۳۹۰	۶
۰/۰۰۱	۲۶۱۲۵	۱۳۹۱	۷
۰/۰۰۰۶	۲۷۴۱۶	۱۳۹۲	۸
۰/۰۰۰۲	۲۸۶۶۳	۱۳۹۳	۹
۰/۰۰۰۱	۳۰۱۸۳	۱۳۹۴	۱۰

جدول۵. جدول برآورد پیش بینی بر اساس مدل لجستیک

سال	مقدار پیش بینی	کران پائین فاصله اطمینان	کران بالای فاصله اطمینان
۱۳۹۵	۳۵۱۹۳	۳۰۷۴۲	۴۲۲۸۸
۱۳۹۶	۳۸۳۱۹	۳۳۲۸۹	۴۴۱۰۹
۱۳۹۷	۴۱۷۲۲	۳۶۰۲۵	۴۸۳۲۱
۱۳۹۸	۴۵۴۲۸	۳۸۹۶۵	۵۲۹۶۳
۱۳۹۹	۴۹۴۶۳	۴۲۱۲۶	۵۸۰۷۸
۱۴۰۰	۵۳۸۵۷	۴۵۵۲۶	۶۳۷۱۲

حال به کمک برنامه متلب، به روش عددی اویلر-ماریاما جواب تقریبی مدل لجستیک تصادفی (۲) را با فرض $\alpha = 0.5$، $\lambda = 0.76$، $\mu = -0.76$ و $\rho = 0.14$ بدست آوردیم (به [۸] مراجعه شود) که نتایج در شکل (۲) نشان داده شده است. خط آبی مقادیر واقعی تعداد بیماران مبتلا به ویروس ایدز و نقاطی که با رنگ سبز مشخص شده‌اند، مقدار برآورد تعداد بیماران توسط مدل لجستیک تصادفی را نشان می‌دهد.



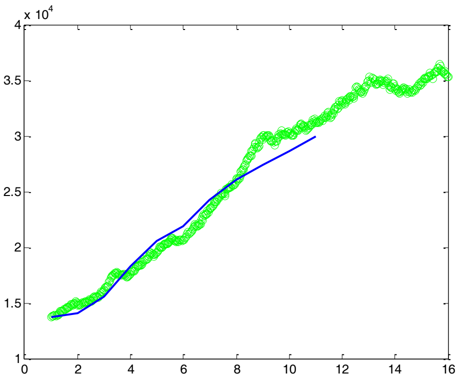
شکل (۲): نمودار برآورد جمعیت مبتلایان به ویروس ایدز با مدل رگرسیونی لجستیک تصادفی

پیش‌بینی تعداد افراد مبتلا به ویروس ایدز در ایران در سال‌های ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۹ بر اساس مدل لجستیک تصادفی به کمک نرم‌افزار متلب در جدول (۶) و شکل (۳) نشان داده شده است.

در سال ۱۳۹۶ پیش‌بینی می‌شود جمعیت مبتلایان به ویروس ایدز، مطابق مدل لجستیک تصادفی، حدودا ۳۳۷۰۰ نفر باشد در حالی که جمعیت واقعی تعداد بیماران مبتلا به ویروس ایدز در ایران در این سال ۳۷۶۵۰ نفر است. همچنین مطابق آمار ارائه شده از سوی وزارت بهداشت در سال ۱۳۹۹ حدودا ۳۹۲۰۰ نفر در ایران مبتلا به ویروس ایدز بودند که بر اساس مدل لجستیک تصادفی در این سال تعداد بیماران ۳۵۳۰۰ نفر براورد گردیده است. اختلاف مقدار واقعی با مقدار برآورد شده در سال ۱۳۹۹ بر اساس دو مدل لجستیک قطعی و تصادفی، نشان دهنده دقت بالای مدل لجستیک تصادفی می‌باشد.

جدول۶. جدول برآورد پیش بینی بر اساس مدل لجستیک تصادفی

سال	مقدار پیش بینی شده تعداد بیماران در مدل لجستیک تصادفی
۱۳۹۵	۳۳۰۰۰
۱۳۹۶	۳۳۷۰۰
۱۳۹۷	۳۴۴۰۰
۱۳۹۸	۳۴۹۰۰
۱۳۹۹	۳۵۳۰۰



شکل (۳): پیش بینی سال های آتی مدل لجستیک تصادفی

نتیجه‌گیری

پیش‌بینی تعداد مبتلایان به ویروس ایدز در ایران بر اساس تعداد مشاهدات سال ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۴ هدف این مقاله بوده است. به کمک نرم افزار SPSS مدل‌های مختلفی برازش شد که بر اساس ضریب تعیین، بهترین مدل مدل لجستیک بوده است. بر اساس این مدل تعداد بیماران برای سال‌های آتی ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۹ نیز پیش‌بینی شد. اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار برآورد شده حاکی از آن است که نمی‌توان از عامل‌های تصادفی صرف‌نظر کرد. با اضافه کردن این عوامل که عموما نویز نامیده می‌شود به مدل لجستیک معمولی، مدل لجستیک تصادفی بر پایه حساب دیفرانسیل تصادفی محاسبه می‌شود. به کمک برنامه متلب و به روش عددی اویلر-ماریاما معادله دیفرانسیل تصادفی شبیه‌سازی شد و برآوردی از تعداد مبتلایان به ویروس ایدز بدست آمد که نسبت به مدل معمولی (غیر تصادفی) از خطای بسیار کمتری برخوردار بوده است. این نشان از کارائی بالای مدل تصادفی دارد و نشان می‌دهد که نمی‌توان عامل‌های تصادفی را نادیده گرفت.

فهرست منابع

[۱] Carleti, M., & Burrage, K., & Burrage,. P.M.(۲۰۰۴). Numerical simulation of stochastic ordinary differential equations in biomathematical modeling. Mathematics and Computers in simulation, ۶۴, ۲۷۱-۲۷۷.

[۲] Andreis, S. De., & Ricci, P. E.(۲۰۰۵). Modeling population growth via Laguerre-type exponentials. Mathematical and computer Modeling. ۴۲, ۱۴۲۱-۱۴۲۸.

[۳] Khodabin, M., & Maleknejad, K., & Rostami M., & Nouri, M. Interpolation solution in generalized stochastic exponential population growth model, Applied Mathematical Modeling, accepted manuscript.

[۴] Matisa, J. H. & Kiffe, T. R.(۲۰۰۸). On stochastic logistic population growth models with immigration and multiple births, Theorrtical population Biology, ۶۵, ۸۹-۱۰۴.

[۵] Rezaeyan, R., & Jafari, M. A.(۲۰۱۵). Confidence interval for number of population in stochastic exponential population growth models with mixture noise, ۴۶th Annaul Iranian mathematics conference, Yazd.

[۶] Oksendal, B.(۱۹۹۸). Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications. Fifth Edition, Spronger-Verlag, New York.

[۷] Khodabin, M., & Kiaee, N.(۲۰۱۱). Stochastic dynamical Logistic population growth model, Journal of mathematical sciences: Advances and Applications, ۱۱, ۱۱-۲۹.

[۸] Campillo, F., & Joannides, M., Estimation of the parameters of a stochastic logistic growth model, hal-۰۰۸۴۲۲۹۱.

[۹] Rahman, H. A., & Mohed, A. B. (۲۰۰۹). Parameter estimation of stochastic logistic model ,Matematical, ۲۵(۲), ۹۱-۱۰۶.

[۱۰] Zheng, Z., & Shu, H., & Kan, X., & Fang, Y. (۲۰۱۷). Parameter estimation for the continuous time stochastic logistic diffusion model., Open journal of statistics, ۷, ۱۰۳۹-۱۰۵۲.