دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و چهارم، مهر و آبان ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

زیرمدول‌های قویاً اول مدرج به روی حلقه‌های جابجایی مدرج

فرخنده فرضعلی پور[۱*]، پیمان غیاثوند[۲]، معصومه هزارجریبی[۳]

(۱و۲و۳) دانشگاه پیام نور، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۳۰   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۰/۲۰

چکیده

فرض کنید G یک گروه با عنصر همانی e، R یک حلقه مدرج و M یک R-مدول مدرج باشد. زیرمدول مدرج سره N از مدول M را یک زیرمدول قویاً اول مدرج گوییم، هرگاه به ازای عناصر همگن $x_g, y_h \in h(M)$ به طوری‌که $((N + Rx_g) :_R M)y_h \subseteq N$، آنگاه $x_g \in N$ یا $y_h \in N$. در این مقاله، مفهوم زیرمدول‌های قویاً اول مدرج که تعمیمی از زیرمدول‌های اول مدرج است را معرفی می‌کنیم سپس برخی مثال‌ها و خاصیت‌های اساسی زیرمدول‌های قویاً اول مدرج را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نتایج جدیدی در این خصوص را ارایه می‌کنیم. در واقع در این مقاله نشان می‌دهیم مفاهیم زیرمدول‌های قویاً اول مدرج و زیرمدول‌های اول مدرج با هم متفاوت هستند. در ادامه، زیرمدول‌های قویاً اول مدرج را تحت همریختی، ضرب دکارتی، موضعی‌سازی و مدول‌های خارج‌قسمتی مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم. سپس، دو نوع از زیرمدول‌های مدرج از یک مدول ادغام شده در امتداد یک ایده‌آل مدرج را بیان کرده و بررسی می‌کنیم تحت چه شرایطی این نوع زیرمدول‌های مدرج یک زیرمدول قویاً اول مدرج هستند.

واژه‌های کلیدی: زیرمدول اول مدرج، زیرمدول قویاً اول مدرج، زیرمدول قویاً نیم‌اول مدرج.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: f_farzalipour@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

مفهوم مدرج کردن در جبر، به‌ویژه در مدول‌های مدرج در مطالعه‌ی جنبه‌های همولوژیکی حلقه‌ها ضروری هستند. در بیشتر موارد برای توسعه جبر جابجایی بر حلقه‌های مدرج تاکید دارند. حلقه‌های مدرج در هندسه جبری و جبر جابجایی نقش اساسی دارند. مدرج‌سازی چه در سطح مقدماتی و چه در سطح پیشرفته برای علوم ریاضی کاربردهای زیادی دارد ([۱۰] و [۱۱]). در سال‌های اخیر، حلقه‌ها و مدول‌ها با ساختارهای مدرج به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است ([۱]، [۴]، [۵]، [۶]، [۸] و [۹]).

در سراسر این مقاله همه حلقه‌ها، حلقه‌های جابجایی مدرج یکدار و همه مدول‌ها، مدول‌های مدرج یکانی هستند.

فرض کنید G یک گروه با عنصر همانی e و R یک حلقه باشد. در این‌صورت R را یک حلقه G-مدرج گوییم، هرگاه $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$، به‌طوری‌که برای هر $g\in G$، R_g یک زیرگروه جمعی از R است و به ازای هر دو عنصر $g,h\in G$ داشته باشیم $R_gR_h\subseteq R_{gh}$. عناصر R_g را همگن از درجه g گوییم. اگر $r\in R$، آنگاه می‌توان r را به‌صورت

$$r=\sum_{g\in G} r_g$$

و به فرم یکتا نوشت. بعلاوه، R_e یک زیرحلقه R است و اگر $1\in R$، آنگاه $1\in R_e$. همچنین، $h(R)=\bigcup_{g\in G}R_g$. ایده‌آل I از حلقه مدرج R یک ایده‌آل مدرج است، هرگاه

$$I=\bigoplus_{g\in G}\left(I\cap R_g\right)$$

به‌عبارتی برای هر $x\in I$، $x=\sum_{g\in G}x_g$ که در آن برای هر $g\in G$، $x_g\in I$. فرض کنید I یک ایده‌آل مدرج R باشد. در این‌صورت رادیکال مدرج I را که با نماد $Grad(I)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Grad(I)=\{x\in R\mid \forall g\in G,\ \exists n\in \mathbb{N};\ \ {x_g}^n\in I\}.$$

ایده‌آل مدرج سره p از حلقه مدرج R را یک ایده‌آل اول مدرج (اولیه مدرج) می‌گوییم، هرگاه به ازای هر $a_g,b_h\in h(R)$ که $a_gb_h\in p$، آنگاه $a_g\in p$ یا $b_h\in p$ ($b_h\in Grad(p)$) رجوع شود به [۱۲]. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول مدرج R را با نماد $Spec^{gr}(R)$ نشان می‌دهیم. حلقه مدرج R را اول مدرج (اولیه مدرج) گوییم، هرگاه ایده‌آل مدرج صفر، ایده‌آل اول مدرج (اولیه مدرج) R باشد. ایده‌آل مدرج سره I از حلقه مدرج R را یک ایده‌آل نیم‌اول مدرج گوییم، هرگاه به ازای هر عنصر $a_g\in h(R)$ و $n\in\mathbb{N}$ که ${a_g}^n\in I$، آنگاه $a_g\in I$. فرض کنید R یک حلقه مدرج و M یک R-مدول باشد. در این‌صورت M یک R-مدول مدرج است، هرگاه به ازای هر $g,h\in G$،

$$M=\bigoplus_{g\in G}M_g\ ,$$

و $R_gM_h\subseteq M_{gh}$ برای $g\in G$، M_g یک زیرگروه جمعی M است. واضح است که M_g یک R_e-مدول است.همچنین، $h(M)=\bigcup_{g\in G}M_g$. فرض کنید N یک زیرمدول R-مدول مدرج M باشد. در این‌صورت N یک زیرمدول مدرج از M است، هرگاه

$$N=\bigoplus_{g\in G}(N\cap M_g)$$

به عبارتی در برای هر $m\in N$، $m=\sum_{g\in G}m_g$ که در آن برای هر $g\in G$، $m_g\in N$. بعلاوه، $\frac{M}{N}$ یک R-مدول خارج‌قسمتی مدرج با g-مؤلفه به‌صورت زیر است.

$$\left(\frac{M}{N}\right)_g=\frac{M_g+N}{N}$$

مثال: فرض کنید $G = \mathbb{Z}_1$ و $R = \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$-مدول $M = \mathbb{Z}[i]$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت R یک حلقه مدرج با زیرگروه‌های $R_1 = \{\circ\}$ ، $R_\circ = \mathbb{Z}$ و M یک مدول مدرج با $M_1 = i\mathbb{Z}$ ، $M_\circ = \mathbb{Z}$. همچنین فرض کنید $N =< 1 + i >$. در این‌صورت N یک زیرمدول M است. اما N یک زیرمدول مدرج از M نیست، زیرا $1 + i \in N$ ولی $1 \notin N$ و $i \notin N$.

زیرمدول مدرج سره P از R-مدول مدرج M را اول (اولیه) مدرج گوییم، هرگاه به ازای هر $r_g \in h(R)$ و $m_h \in h(M)$ که $r_g m_h \in P$، آنگاه
$m_h \in P$ یا $r_g \in (P :_R M)$
$r_g \in Grad((P :_R M))$.

زیرمدول مدرج سره N از R-مدول مدرج M را نیم‌اول مدرج گوییم، هرگاه به ازای هر $r_g \in h(R)$، $m_h \in h(M)$ و $n \in \mathbb{N}$ که $r_g{}^n m_h \in N$، آنگاه $r_g m_h \in N$، رجوع شود به [۷]. R-مدول مدرج M را با مولد متناهی مدرج گوییم، هرگاه عناصر

$$m_{g_1}, m_{g_2}, \dots, m_{g_n} \in h(M)$$

موجود باشند به‌طوری‌که

$$M = Rm_{g_1} + Rm_{g_2} + \dots + Rm_{g_n}.$$

فرض کنید R_1 و R_2 دو حلقه G-مدرج باشند، در این‌صورت $R = R_1 \times R_2$ یک حلقه G-مدرج با g-مؤلفه

$$R_g = (R_1)_g \times (R_2)_g$$

می‌باشد. حال فرض کنید M_1 یک R_1-مدول مدرج و M_2 یک R_2-مدول مدرج باشد. در این‌صورت
$M = M_1 \times M_2$

یک R-مدول مدرج است به‌طوری که به ازای هر $g \in G$، $M_g = (M_1)_g \times (M_2)_g$.

فرض کنید

$$M = \bigoplus_{g \in G} M_g \text{ و } M' = \bigoplus_{g \in G} M'_g$$

دو R-مدول G-مدرج باشند. در این‌صورت تابع $f : M \to M'$، یک همریختی مدرج است، هرگاه

(۱) به ازای هر $m, n \in M$،

$$f(m + n) = f(m) + f(n).$$

(۲) به ازای هر $m \in M$ و $r \in R$،

$$f(rm) = rf(m).$$

(۳) به ازای هر $g \in G$، $f(M_g) \subseteq M'$.

فرض کنید M یک R-مدول مدرج و $S \subseteq h(R)$ یک زیرمجموعه بسته ضربی R باشد. در این‌صورت $S^{-1}M$ یک $S^{-1}R$-مدول مدرج با مولفه‌های

$$(S^{-1}M)_g = \left\{\frac{m}{s} \middle| (deg\, m)(deg\, s)^{-1} = g\right\}$$

و

$$(S^{-1}R)_g = \left\{\frac{r}{s} \mid (deg\, r)(deg\, s)^{-1} = g\right\}$$

می‌باشند.

در این مقاله، ابتدا مفهوم زیرمدول‌های قویاً اول مدرج که تعمیمی از زیرمدول‌های اول مدرج هستند را بیان می‌کنیم و برخی خاصیت‌های اساسی از این نوع زیرمدول‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه، رفتار زیرمدول‌های قویاً اول مدرج را تحت همریختی، ضرب دکارتی، مدول‌های خارج‌قسمتی و موضعی‌سازی مورد بررسی قرار داده و نتایجی را در این زمینه‌ها ارایه می‌کنیم.

۲- زیرمدول‌های قویاً اول مدرج

در این بخش، زیرمدول‌های قویاً اول مدرج و زیرمدول‌های قویاً نیم‌اول مدرج را معرفی می‌کنیم و خاصیت‌های چنین زیرمدول‌های مدرج را مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین، ارتباط بین زیرمدول‌های اول مدرج و زیرمدول‌های قویاً اول مدرج را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱: فرض کنید M یک R-مدول مدرج باشد. زیرمدول مدرج سره N از M را یک زیرمدول قویاً اول مدرج گوییم، هرگاه به ازای $x_g, y_h \in h(M)$، اگر داشته باشیم

$$((N + Rx_g) :_R M)y_h \subseteq N،$$

آنگاه $x_g \in N$ یا $y_h \in N$.

تذکر: اگر R را به عنوان یک R-مدول مدرج در نظر بگیریم، آنگاه زیرمدول‌های قویاً اول مدرج R، دقیقاً ایده‌آل‌های اول مدرج حلقه مدرج R هستند.

تعریف ۲: فرض کنید M یک R-مدول مدرج باشد. زیرمدول مدرج سره N از M را یک زیرمدول قویاً نیم اول مدرج گوییم، هرگاه به ازای هر عنصر همگن $x_g \in h(M)$ به‌طوری‌که

$$((N + Rx_g) :_R M)x_g \subseteq N،$$

آنگاه $x_g \in N$.

گزاره ۳: فرض کنید M یک R-مدول مدرج باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) هر زیرمدول قویاً اول مدرج، اول مدرج است.

(۲) هر زیرمدول قویاً اول مدرج، قویاً نیم اول مدرج است.

(۳) هر زیرمدول ماکسیمال مدرج، قویاً اول مدرج است.

اثبات: (۱) فرض کنید N یک زیرمدول قویاً اول مدرج M باشد. فرض کنید

$$r_g \in h(R)\ ,\ x_{g'} \in h(M)$$

به‌طوری‌که $r_g x_{g'} \in N$ و $x_{g'} \notin N$ نشان می‌دهیم $r_g \in (N :_R M)$. فرض کنید $m \in M$. بنابراین m را می‌توان به صورت

$$m = \sum_{h \in G} m_h$$

نوشت که در آن $m_h \in h(M)$. بنابراین به ازای هر $h \in G$، داریم:

$$\left((N + Rx_{g'}) :_R M\right)(r_g m_h) = r_g\left((N + Rx_{g'}) :_R M\right)m_h \subseteq r_g(N + Rx_{g'}) \subseteq N.$$

از این‌که $x_{g'} \notin N$ و N یک زیرمدول قویاً اول مدرج M است، در نتیجه $r_g m_h \in N$، لذا $r_g m \in N$. بنابراین $r_g M \subseteq N$، بنابراین N یک زیرمدول اول مدرج M است.

(۲) اثبات بدیهی است.

(۳) فرض کنید N یک زیرمدول ماکسیمال مدرج از M باشد و $x_g, y_h \in h(M)$ به‌طوری‌که

$$\left((N + Rx_g) :_R M\right)y_h \subseteq N$$

و $x_g \notin N$، در نتیجه $N + Rx_g = M$. بنابراین $\left((N + Rx_g) :_R M\right) = R$ و لذا $y_h \in N$.

در مثال زیر، نشان می‌دهیم که هر زیرمدول اول مدرج لزوماً یک زیرمدول قویاً اول مدرج نیست و این نشان می‌دهد که این دو مفهوم از لحاظ ساختاری با هم متفاوت هستند.

مثال ۴: فرض کنید $R=\mathbb{Z}$ یک حلقه $\mathbb{Z}_2$-مدرج بدیهی و $M=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ یک R-مدول $\mathbb{Z}_2$-مدرج با مولفه‌های $M_\circ=\mathbb{Z}\times\{\circ\}$ و $M_1=\{\circ\}\times\mathbb{Z}$ باشد. زیرمدول مدرج $N=2\mathbb{Z}\times 3\mathbb{Z}$ را با مولفه‌های $N_\circ=2\mathbb{Z}\times\{\circ\}$ و $N_1=\{\circ\}\times 3\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید. در این‌صورت N یک زیرمدول اول مدرج M است ولی یک زیرمدول قویاً اول مدرج M نیست، زیرا

$$(1,\circ)\ ,\ (\circ,1)\in h(M)=M_\circ\cup M_1$$

و

$$((N+R(1,\circ)):_R M)(\circ,1)\subseteq N،$$

اما $(1,\circ)\notin N$ و $(\circ,1)\notin N$.

گزاره ۵: فرض کنید M یک مدول مدرج روی یک میدان مدرج R و N یک زیرمدول مدرج سره از M باشد. N یک زیرمدول ماکسیمال مدرج است اگر و تنها اگر N یک زیرمدول قویا اول مدرج از مدول مدرج M باشد.

اثبات: بنا به قسمت ۳ از گزاره ۳، هر زیرمدول ماکسیمال مدرج، قویاً اول مدرج است. برعکس، (برهان خلف) فرض کنید N یک زیرمدول قویاً اول مدرج باشد به‌طوری‌که ماکسیمال مدرج نیست. در این‌صورت $x_g\in h(M)-N$ موجود است به طوری که $Rx_g+N=M$. فرض کنید $y\in M$. لذا $y=\sum_{h\in G}y_h$ که در آن $y_h\in h(M)$. حال به ازای هر $h\in G$، داریم:

$$((N+Rx_g):_R M)y_h=\{\circ\}y_h\subseteq N،$$

چون N یک زیرمدول قویاً اول مدرج است و همچنین $x_g\notin N$، $y_h\in N$. بنابراین $y\in N$ و در نتیجه $M=N$ که متناقض با سره بودن N است.

تعریف ۶: فرض کنید M یک R-مدول مدرج و I یک ایده‌آل مدرج R باشد. زیرمدول مدرج N از M را I-ماکسیمال مدرج گوییم، هرگاه $(N:_R M)=I$ و اگر K یک زیرمدول مدرج شامل N باشد به‌طوری‌که $(K:_R M)=I$، آنگاه $K=N$.

لم ۷: فرض کنید M یک R-مدول مدرج و N یک زیرمدول مدرج از M باشد. در این‌صورت اگر N یک زیرمدول P-ماکسیمال مدرج و P یک ایده‌آل اول مدرج باشد، آنگاه N یک زیرمدول اول مدرج است.

اثبات: فرض کنید $r_g\in h(R)\ ,\ m_h\in h(M)$ به‌طوری‌که $r_gm_h\in N$ و $m_h\notin N$. بنابراین $Rm_g+N=K$ به‌طور سره شامل N است و لذا $(K:_R M)$ به‌طور سره شامل P است. حال فرض کنید

$$s_{g'}\in(K:_R M)-P.$$

برای نشان دادن $r_gs_{g'}\in P$، فرض کنید $x\in M$. بنابراین $t\in R$ و $n\in N$ موجود است به‌طوری‌که $s_{g'}x=tm_h+n$. بنابراین $r_gs_{g'}x\in N$ و $r_gs_{g'}\in(N:_R M)=P$. از این‌که P یک ایده‌ال اول مدرج است، پس $r_g\in P=(N:_R M)$. در نتیجه N یک زیرمدول اول مدرج است.

قضیه ۸: فرض کنید N زیرمدول مدرج از R-مدول مدرج M باشد. در این‌صورت عبارت‌های زیر معادلند:

(۱) N یک زیرمدول قویاً اول مدرج M است.

(۲) N یک زیرمدول قویاً نیم اول مدرج M است و N یک زیرمدول اول مدرج M است.

(۳) N یک زیرمدول قویاً نیم اول مدرج M است و $(N:_R M)$ یک ایده‌آل اول مدرج R است.

(۴) N یک زیرمدول $(N:_R M)$-ماکسیمال مدرج است و $(N:_R M)$ یک ایده‌آل اول مدرج R است.

اثبات: (۱)⇐ (۲) بنا به گزاره ۳ برقرار است.

(۲)⇐ (۳) اگر N یک زیرمدول اول مدرج باشد، آنگاه $(N:_R M)$ یک ایده‌آل اول مدرج است [۳].

(۳)⇐ (۴) فرض کنید K یک زیرمدول مدرج از M شامل N باشد به‌طوری‌که

$$(N:_R M) = (K:_R M).$$

فرض کنید $m = \sum_{g\in G} m_g \in K$. به ازای هر $g \in G$، $N \subseteq (N + Rm_g) \subseteq K$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}(N:_R M) &\subseteq \left((N + Rm_g):_R M\right)\\ &\subseteq (K:_R M) = (N:_R M)\end{aligned}$$

بنابراین

$$(N:_R M) = \left((N + Rm_g):_R M\right)،$$

لذا

$$\left((N + Rm_g):_R M\right) m_g\ (N:_R M)m_g \subseteq N.$$

حال چون N یک زیرمدول قویاً نیم‌اول مدرج است، پس $m_g \in N$. بنابراین $m = \sum_{g\in G} m_g \in N$. در نتیجه $N = K$ و اثبات تمام است.

(۴)⇐ (۱) فرض کنید $(N:_R M) = P$. حال چون N، P-ماکسیمال مدرج است و P یک ایده‌آل اول مدرج است، بنا به لم ۷، N یک زیرمدول اول مدرج است. فرض کنید $x_g, y_h \in h(M)$ به‌طوری‌که $((N + Rx_g) :_R M)y_h \subseteq N$ و $y_h \notin N$.

در این‌صورت

$$\left((N + Rx_g):_R M\right) \subseteq (N:_R M)$$

و از این‌که

$$(N:_R M) \subseteq \left((N + Rx_g):_R M\right)$$

بنابراین

$$\left((N + Rx_g):_R M\right) = (N:_R M) = P.$$

چون N، P-ماکسیمال مدرج است،

$$x_g \in N + Rx_g = N$$

و در نتیجه N یک زیرمدول قویاً اول مدرج M است.

تذکر: I یک ایده‌آل نیم‌اول مدرج است اگر و فقط اگر $Grad(I) = I$.

گزاره ۹: فرض کنید N یک زیرمدول مدرج از R-مدول مدرج M باشد. در این‌صورت N یک زیرمدول قویاً نیم اول مدرج از M است اگر و فقط اگر $(N :_R M)$ یک ایده‌آل نیم‌اول مدرج و N یک زیرمدول $(N :_R M)$-ماکسیمال مدرج است.

اثبات: فرض کنید N یک زیرمدول قویاً نیم اول مدرج M باشد و $(N :_R M)$ یک ایده‌آل نیم‌اول مدرج نباشد. در این‌صورت

$$Grad((N :_R M)) \neq (N :_R M).$$

لذا $r_g \in Grad((N :_R M))$ موجود است که $r_g \notin (N :_R M)$. فرض کنید $n > 1$ کوچکترین عدد مثبتی باشد که $r_g{}^n \in (N :_R M)$. فرض کنید $m_h \in r_g{}^{n-1}M - N$. بنابراین

$$Rm_h \subseteq r_g{}^{n-1}M \subseteq r_gM$$

و در نتیجه

$$((N + Rm_h):_R M) \subseteq \left((N + r_gM):_R M\right)$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned}&((N + Rm_h):_R \mathrm{M})m_h\\ &\subseteq \left((N + r_gM):_R M\right)\left(r_g{}^{n-1}M\right)\\ &= r_g{}^{n-1}\left((N + r_gM) :_R M\right)M\\ &\subseteq r_g{}^{n-1}(N + r_gM) \subseteq N.\end{aligned}$$

چون N یک زیرمدول قویاً نیم اول مدرج M است، لذا $m_h \in N$ که این یک تناقص است. پس $(N:_R M)$یک ایده‌آل نیم‌اول مدرج است. حال نشان می‌دهیم N یک زیرمدول $(N:_R M)$-ماکسیمال مدرج است. فرض کنید K یک زیرمدول مدرج M شامل N باشد به‌طوری‌که
$(N:_R M) = (K:_R M)$.

فرض کنید x یک عنصر دلخواه K باشد. لذا می‌توان نوشت

$$x = \sum_{g\in G} x_g$$

که در آن $x_g \in h(M) \cap K$. در این‌صورت به ازای هر $g \in G$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\left((N + Rx_g):_R M\right)\\ &\subseteq \left((K + Rx_g):_R M\right)\\ &= (K:_R M) = (N:_R M)\end{aligned}$$

لذا

$$\left((N + Rx_g):_R M\right) x_g \subseteq (N:_R M)x_g \subseteq N$$

چون N یک زیرمدول قویاً نیم‌اول مدرج M است، پس $x_g \in N$، بنابراین $x = \sum_{g\in G} x_g \in N$. در نتیجه $N = K$ و N یک زیرمدول $(N:_R M)$-ماکسیمال مدرج است.

برعکس، فرض کنید $x_g \in h(M)$ به‌طوری‌که
$((N + Rx_g):_R M)x_g \subseteq N$

و

$r, t \in \left((N + Rx_g):_R M\right)$.

لذا

$$\begin{aligned}rtM &\subseteq r\left(N + Rx_g\right) \subseteq N + Rrx_g\\ &\subseteq N + \left((N + Rx_g):_R M\right) \subseteq N\end{aligned}$$

پس $rt \in (N:_R M)$. در نتیجه

$$\left((N + Rx_g):_R M\right)^2 \subseteq (N:M)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\left((N + Rx_g):_R M\right) &\subseteq Grad\left((N:M)\right)\\ &= (N:M)\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به فرض داریم $N + Rx_g = N$. لذا $x_g \in N$، در نتیجه $x = \sum_{g\in G} x_g \in N$.

نتیجه ۱۰: فرض کنید $\{N_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمدول‌هایP-قویاً اول مدرج R-مدول مدرج M باشد. در این‌صورت $\bigcap_{i\in I} N_i$ یک زیرمدول قویاً نیم‌اول مدرج است اگر و فقط اگر برای هر $i, j \in I$، $N_i = N_j$.

اثبات: فرض کنید $N = \bigcap_{i\in I} N_i$. داریم

$$\begin{aligned}(N:_R M) &= \bigcap_{i\in I}(N_i :_R M)\\ &= P = (N_j :_R M)\end{aligned}$$

چون N یک زیرمدول قویاً نیم‌اول مدرج است، لذا بنا به قضیه ۸، N یک زیرمدول $(N:_R M)$-ماکسیمال مدرج است و از این‌که $N \subseteq N_j$ و با توجه به $(N:_R M) = (N_j :_R M)$ نتیجه می‌گیریم $N_j = N$. اثبات برعکس بدیهی است.

نتیجه ۱۱: فرض کنید R یک حلقه مدرج باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:
(۱) $Spec^{gr}(R)$ یک زنجیر است.
(۲) هر زیر مدول قویاً نیم‌اول مدرج از یک R-مدول مدرج M، قویاً اول مدرج است.

اثبات: (۱)$\Leftarrow$ (۲) چون $Grad(N:_R M)$ اشتراک یک زنجیر از ایده‌آل‌های اول مدرج است،

پس $Grad((N:_R M)) = (N:_R M)$ با یک ایده‌آل اول مدرج برابر است. در نتیجه بنا به قضیه ۸، N یک زیرمدول قویاً اول مدرج است.

(۲)⇐(۱) فرض کنید Q , P ایده‌آل‌های اول مدرج R باشند. در این‌صورت

$$Grad(P \cap Q) = Grad(P) \cap Grad(Q) = P \cap Q$$

پس $P \cap Q$ یک ایده‌آل نیم‌اول مدرج است، بنابراین بنا به فرض یک ایده‌آل اول مدرج است. حال اگر فرض کنیم $P \not\subset Q$ و $Q \not\subset P$، آنگاه عناصر $p_g, q_h \in h(R)$ موجودند به‌طوری‌که

$q_h \in Q - P$, $p_g \in P - Q$.

لذا $p_g q_h \in P \cap Q$ اما $p_g \notin P \cap Q$ و همچنین $q_h \notin P \cap$ که این یک تناقض است و در نتیجه $Spec^{gr}(R)$ یک زنجیر است.

مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$Z^{gr}(R) = \{r_g \in h(R) | \exists \ \circ \neq s_h \in h(R);\ r_g s_h = \circ\}$$

و

$$N^{gr}(R) = \{r_g \in h(R) | \exists\ n \in \mathbb{N};\ {r_g}^n = \circ\}$$

حال در لم زیر یک مشخصه از حلقه‌های اولیه مدرج را به‌دست می‌آوریم.

لم ۱۲: فرض کنید R یک حلقه مدرج باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $Z^{gr}(R) \subseteq N^{gr}(R)$.

(۲) $Z^{gr}(R) = N^{gr}(R)$ یک ایده‌آل اول مدرج است.

(۳) R یک حلقه اولیه مدرج است.

اثبات: (۱)⇐ (۲) فرض کنید $x_g \in N^{gr}(R)$. در این‌صورت $n \in \mathbb{N}$ موجود است که ${x_g}^n = \circ$. فرض کنید $k > 1$ کوچکترین عدد مثبتی باشد به‌طوری‌که ${x_g}^k = 0$. بنابراین ${x_g}^{k-1} x_g = \circ$ و $x_g \in Z^{gr}(R)$، پس $Z^{gr}(R) = N^{gr}(R)$. حال نشان می‌دهیم $Z^{gr}(R)$ یک ایده‌آل اول مدرج است. حال فرض کنید $r_g s_h \in Z^{gr}(R)$ و همچنین $s_h \notin Z^{gr}(R)$. در این‌صورت خواهیم داشت $\circ \neq t_k \in h(R)$ موجود است به‌طوری‌که $r_g(s_h t_k) = \circ$ و از این‌که $s_h t_k \neq \circ$، بنابراین $r_g \in Z^{gr}(R)$.

(۲)⇐ (۳) فرض کنید $r_g s_h = \circ$ و $s_h \neq \circ$. در این‌صورت $r_g \in Z^{gr}(R)$. از طرفی چون $Z^{gr}(R) = N^{gr}(R)$، پس $n \in \mathbb{N}$ موجود است که ${r_g}^n = \circ$. در نتیجه صفر یک ایده‌آل اولیه مدرج R است.

(۳)⇐ (۱) فرض کنید $r_g \in Z^{gr}(R)$. در این‌صورت $\circ \neq s_h \in h(R)$ موجود است که $r_g s_h = \circ$. چون R یک حلقه اولیه مدرج است، پس $n \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که ${r_g}^n = \circ$ و در نتیجه $r_g \in N^{gr}(R)$.

تعریف ۱۳: R-مدول مدرج M را بخش‌پذیر مدرج گوییم، هرگاه به ازای هر عنصر همگن $r_g \in h(R)$، $r_g M = M$.

قضیه ۱۴: فرض کنید R یک حلقه اولیه مدرج، M یک R-مدول بخش‌پذیر مدرج و N یک زیرمدول مدرج M باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) N یک زیرمدول ماکسیمال مدرج است.

(۲) N یک زیرمدول قویاً اول مدرج است.

(۳) N یک زیرمدول قویاً نیم‌اول مدرج است.

(۴) N یک زیرمدول ماکسیمال مدرج و $(N:_R M)$ تنها ایده‌آل اول مدرج R است.

اثبات: (۱)⇐ (۲)⇐ (۳) بنا به گزاره ۳ برقرار است.

(۳)⇐ (۴) فرض کنید N یک زیرمدول قویاً نیم‌اول مدرج و K یک زیرمدول مدرج سره M شامل N

باشد. نشان می‌دهیم $(N:_R M) = (K:_R M)$.
برای این منظور فرض کنید
$r_g \in (K:_R M) - (N:_R M)$.

از این‌که $(N:_R M)$ یک ایده‌آل نیم‌اول مدرج است و $x \in N^{gr}(R)$، پس $x^n = 0 \in (N:M)$ لذا $x \in Grad((N:M))$. بنابراین داریم:

$$Z^{gr}(R) \subseteq N^{gr}(R) \subseteq Grad((N:_R M) = (N:_R M)$$

در نتیجه $r_g \notin Z^{gr}(R)$. چون M یک R-مدول بخش‌پذیر مدرج است، $r_g M = M \subseteq K \subseteq M$ و لذا $K = M$ که این یک تناقض است. در نتیجه $(N:_R M) = (K:_R M)$ و بنا به قضیه ۸، N یک زیرمدول $(N:_R M)$-ماکسیمال مدرج است. لذا $K = N$، بنابراین N یک زیرمدول ماکسیمال مدرج است و لذا $(N:_R M)$ یک ایده‌آل ماکسیمال مدرج است. فرض کنید $t_g \in (N:_R M) - Z^{gr}(R)$. چون M یک R-مدول بخش‌پذیر مدرج است، پس $t_g M = M \subseteq N$ و این غیرممکن است. در نتیجه برای هر ایده‌آل اول مدرج P از R، داریم

$$(N:_R M) \subseteq Z^{gr}(R) \subseteq N^{gr}(R) \subseteq P$$

چون $(N:_R M)$ یک ایده‌آل ماکسیمال مدرج است، لذا $(N:_R M) = P$ تنها ایده‌آل اول مدرج R است.

(۴)⇐(۱) بدیهی است.

تعریف ۱۵: یک R-مدول مدرج M را یک مدول ویژه مدرج گوییم، هرگاه برای هر ایده‌آل ماکسیمال مدرج $\mathfrak{M}$، و هر عنصر همگن $r_g \in \mathfrak{M} \cap h(R)$ و $m_h \in h(M)$، عناصر $s_{g'} \in h(R) - \mathfrak{M}$ و $k \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که $s_{g'} {r_g}^k m_h = 0$.

لم ۱۶: فرض کنید N یک زیرمدول مدرج از R-مدول مدرج M باشد و $(N:_R M) = \mathfrak{M}$. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) N یک زیرمدول ماکسیمال مدرج است اگر و فقط اگر N یک زیرمدول قویاً اول مدرج و $\mathfrak{M}$ یک ایده‌آل ماکسیمال مدرج است.

(۲) اگر $\mathfrak{M}$ یک ایده‌آل ماکسیمال مدرج باشد، آنگاه یک زیرمدول قویاً اول مدرج (ماکسیمال مدرج) شامل N موجود است.

اثبات: (۱) باتوجه به قضیه ۸، حکم برقرار است.

(۲) بدیهی است که $\frac{M}{N}$ یک مدول مدرج روی میدان مدرج $\frac{R}{\mathfrak{M}}$ است. در این‌صورت $\frac{K}{N}$ یک زیرفضای ماکسیمال مدرج $\frac{M}{N}$ است. بنابراین K یک زیرمدول ماکسیمال مدرج شامل از N است و لذا چون $\mathfrak{M} = (N:_R M) \subseteq (K:_R M)$، در نتیجه $(K:_R M) = \mathfrak{M}$.

گزاره ۱۷: فرض کنید M یک R-مدول ویژه مدرج باشد. در این‌صورت هر زیرمدول قویاً اول مدرج، یک زیرمدول ماکسیمال مدرج است.

اثبات: فرض کنید N یک زیرمدول قویاً اول مدرج و $\mathfrak{M}$ یک ایده‌آل ماکسیمال مدرج R شامل $(N:_R M)$ باشد و $m_h \in h(M) - N$ به‌طوری که $r \in \mathfrak{M}$. در این‌صورت $r = \sum_{g \in G} r_g$ که $r_g \in \mathfrak{M} \cap h(R)$. بنابراین حال فرض کنید

$r_g \in \mathfrak{M} \cap h(R)$. از طرفی چون M یک R-مدول ویژه مدرج است، $s_{g'} \in h(R) - \mathfrak{M}$ و $k \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که $s_{g'} {r_g}^k m_h = 0$. لذا $s_{g'} {r_g}^k m_h \in N$. چون N یک زیرمدول اول مدرج است و $s_{g'} \notin (N:_R M)$ و $m_h \notin N$، بنابراین

خواهیم داشت $r_g \in (N :_R M)$. لذا نتیجه می‌گیریم

$$r = \sum_{g\in G} r_g \in (N :_R M).$$

بنابراین $(N :_R M) = \mathfrak{M}$ یک ایده‌آل ماکسیمال مدرج است. لذا بنا به لم ۱۶، N یک زیرمدول ماکسیمال مدرج است.

۳- همریختی، ضرب دکارتی و موضعی‌سازی زیرمدول‌های قویاً اول مدرج

دراین بخش، زیرمدول‌های قویاً اول مدرج را تحت همریختی، ضرب دکارتی و موضعی‌سازی مدول‌های مدرج مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیه ۱۸: فرض کنید تابع $f : M \to M'$ یک R-همریختی از مدول‌های مدرج باشد. در این‌صورت

(۱) اگر N' یک زیرمدول قویاً اول مدرج M' باشد، آنگاه $f^{-1}(N')$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج M است.

(۲) اگر f پوشا و N یک زیرمدول قویاً اول مدرج M شامل $Ker(f)$ باشد، آنگاه $f(N)$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج M' است.

اثبات: فرض کنید $x_g, y_h \in h(M)$ به‌طوری‌که

$$\left(\left(f^{-1}(N') + Rx_g\right) :_R M\right) y_h \subseteq f^{-1}(N')$$

در این‌صورت

$$f\left(\left(\left(f^{-1}(N') + Rx_g\right) :_R M\right) y_h\right) \subseteq f\left(f^{-1}(N')\right) \subseteq N'.$$

حال چون f یک تابع همریختی است، پس

$$((f^{-1}(N') + Rx_g) :_R M) f(y_h) \subseteq N' .$$

حال نشان می‌دهیم

$$\left(\left(N' + Rf\left(x_g\right)\right) :_R M'\right) \subseteq \left(\left(f^{-1}(N') R x_g\right) :_R M\right).$$

فرض کنید

$$r \in ((N' + Rf(x_g)) :_R M').$$

لذا $rM' \subseteq N' + Rf(x_g)$. چون $f(M) \subseteq M'$، بنابراین

$$f(rM) = rf(M) \subseteq rM' \subseteq N' + Rf(x_g)$$

و در نتیجه $rM \subseteq f^{-1}(N' + Rf(x_g))$. به وضوح دیده می‌شود که

$$f^{-1}\left(N' + f\left(Rx_g\right)\right) \subseteq f^{-1}(N') + Rx_g$$

و لذا $r \in ((f^{-1}(N') + Rx_g) :_R M)$، بنابراین $\left(\left(N' + Rf\left(x_g\right)\right) :_R M'\right) f(y_h) \subseteq N'$.

از این‌که N' یک زیرمدول قویاً اول مدرج M' است، پس $f(x_g) \in N'$ یا $f(y_h) \in N'$. در نتیجه $x_g \in f^{-1}(N')$ یا $y_h \in f^{-1}(N')$.

(۲) فرض کنید $x'_g, y'_h \in h(M')$ به‌طوری باشد که

$$((f(N) + Rx'_g) :_R M') y'_h \subseteq f(N).$$

چون f پوشاست، عناصر همگن $x_g, y_h \in h(M)$ موجودند که

$$f(y_h) = y'_h \,, f\left(x_g\right) = x'_g$$

بنابراین

$$(f(N + Rx_g) :_R M') f(y_h) \subseteq f(N)$$

واضح است که

$$\left(\left(N + Rx_g\right):_R M\right) \subseteq \left(f(N + Rx_g):_R M'\right)$$

پس

$$f(((N + Rx_g):_R M)y_h) \subseteq f(N)$$

و

$$\left(\left(N + Rx_g\right):_R M\right) y_h \subseteq N + Ker(f) \subseteq N$$

چون N یک زیرمدول قویاً اول مدرج است، $x_g \in N$ یا $y_h \in N$. در نتیجه

$$x'_g = f(x_g) \in f(N)$$

یا

$$y'_h = f(y_h) \in f(N).$$

گزاره ۱۹: فرض کنید K, N زیرمدول‌های مدرج R-مدول مدرج M باشند به‌طوری‌که $K \subseteq N$. در این‌صورت

(۱) اگر L یک زیرمدول قویاً اول مدرج M باشد، آنگاه $K \cap L$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج K است.

(۲) N یک زیرمدول قویاً اول مدرج M است اگر و تنها اگر $\frac{N}{K}$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج R-مدول مدرج $\frac{M}{K}$ است.

اثبات: (۱) تکریختی $i: K \to M$ با ضابطه $i(x) = x$ را در نظر بگیرید. بنابراین داریم $i^{-1}(L) = K \cap L$، در نتیجه حکم بنا به قضیه ۱۸، برقرار است.

(۲) فرض کنید N یک زیرمدول قویاً اول مدرج M باشد. همریختی طبیعی $\pi: M \to \frac{M}{K}$ با ضابطه $\pi(m) = m + K$ را در نظر بگیرید. بنابراین π پوشاست و $Ker(\pi) = K \subseteq N$. لذا بنا به قضیه ۱۸، $\frac{N}{K}$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $\frac{M}{K}$ است.

برعکس، فرض کنید $\frac{N}{K}$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $\frac{M}{K}$ باشد. فرض کنید $x_g, y_h \in h(M)$ به‌طوری‌که $((N + Rx_g):_R M)y_h \subseteq N$.

در این صورت رابطه زیر را داریم:

$$\left(\frac{N + Rx_g}{K}:_R \frac{M}{K}\right) = \left(\begin{matrix}(R(x_g + K) \\ + \frac{N}{K}):_R \frac{M}{K}\end{matrix}\right) = \left((N + Rx_g):_R M\right)$$

بنابراین

$$\left(\left(R(x_g + K) + \frac{N}{K}\right):_R \frac{M}{K}\right)(y_h + K) \subseteq \frac{N}{K}$$

چون $\frac{N}{K}$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $\frac{M}{K}$ است، پس $x_g + K \in \frac{N}{K}$ یا $y_h + K \in \frac{N}{K}$.

در نتیجه $x_g \in N$ یا $y_h \in N$ و بنابراین N یک زیرمدول قویاً اول مدرج M است.

قضیه ۲۰: فرض کنید M یک R-مدول مدرج و همچنین $S \subseteq h(R)$ یک زیرمجموعه بسته ضربی R باشد. در این‌صورت N یک زیرمدول قویاً اول مدرج M است و $S^{-1}N \neq S^{-1}M$ اگر و تنها اگر $S^{-1}N$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $S^{-1}M$ است.

اثبات: ($\Leftarrow$) فرض کنید

$$\frac{x_g}{s_{g'}}, \frac{y_h}{t_{h'}} \in h(S^{-1}M)$$

به‌طوری‌که

$$((S^{-1}N + S^{-1}R(\frac{x_g}{s_{g'}})):_{S^{-1}R} S^{-1}M)\frac{y_h}{t_{h'}} \subseteq S^{-1}N.$$

نشان می‌دهیم $((N + Rx_g):_R M)y_h \subseteq N$). اگر

$r = \sum_{g\in G} r_g \in ((N + Rx_g) :_R M)$،

آنگاه به ازای هر $g \in G$، $r_g M \subseteq N + Rx_g$. لذا

$$\left(\frac{r_g}{1}\right)(S^{-1}M) \subseteq S^{-1}N + S^{-1}R\left(\frac{x_g}{1}\right) = S^{-1}N + S^{-1}R\left(\frac{x_g}{s_{g'}}\right)$$

بنابراین $\left(\frac{r_g}{1}\right)\left(\frac{y_h}{t_{h'}}\right) \in S^{-1}N$، لذا $n \in N$ و $s_{g_1}, s_{g_2} \in S$ موجودند به‌طوری‌که

$s_{g_2}(s_{g_1} r_g y_h - n t_{h'}) = 0$

و در نتیجه $(s_{g_2} s_{g_1})(r_g y_h) \in N$. از طرفی چون $S^{-1}N \neq S^{-1}M$، بنابراین خواهیم داشت $(N :_R M) \cap S = \emptyset$ و از این‌که N یک زیرمدول اول مدرج است، $r_g y_h \in N$ و لذا $r y_h \in N$، در نتیجه خواهیم داشت

$((N + Rx_g) :_R M) y_h \subseteq N$،

لذا $x_g \in N$ یا $y_h \in N$. بنابراین $\frac{x_g}{s_{g'}} \in S^{-1}N$ یا $\frac{y_h}{t_{h'}} \in S^{-1}N$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید $S^{-1}N$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $S^{-1}M$ باشد. چون $S^{-1}N \neq S^{-1}M$، $N \neq M$.
فرض کنید $x_g, y_h \in h(M)$ به‌طوری‌که

$((N + Rx_g) :_R M) y_h \subseteq N$.

در این‌صورت داریم:

$$\left(S^{-1}N + S^{-1}R\left(\frac{x_g}{1}\right) :_{S^{-1}R} S^{-1}M\right) \frac{y_h}{1} \subseteq S^{-1}N$$

چون $S^{-1}N$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $S^{-1}M$ است، $\frac{x_g}{1} \in S^{-1}N$ یا $\frac{y_h}{1} \in S^{-1}N$. چون N یک زیرمدول اول مدرج است، بنابراین $x_g \in N$ یا $y_h \in N$. در نتیجه N یک زیرمدول قویاً اول مدرج است.

تذکر: ایده‌آل‌های اول مدرج حلقه

$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$

به فرم

$R_1 \times \cdots \times R_{j-1} \times P_j \times R_{j+1} \times \cdots \times R_n$

هستند که P_j یک ایده‌آل اول مدرج R_j است.

قضیه ۲۱: فرض کنید

$M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$

یک $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$-مدول مدرج باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i = 1,2,\dots,n$، M_i یک R_i-مدول مدرج است. در این‌صورت زیرمدول مدرج $N = N_1 \times \cdots \times N_n$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج M است اگر و تنها اگر $1 \leq j \leq n$ موجود باشد به‌طوری‌که N_j یک زیرمدول قویاً اول مدرج M_j است و برای هر $i \neq j$، $N_i = M_i$.

اثبات: فرض کنید $N = N_1 \times \cdots \times N_n$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج M باشد. لذا $(N :_R M)$ یک ایده‌آل اول مدرج R است. بنابراین داریم

$(N :_R M) = (N_1 :_{R_1} M_1) \times \cdots \times (N_n :_{R_n} M_n)$

درنتیجه $1 \leq j \leq n$ موجود است به‌طوری‌که $(N_j :_{R_j} M_j)$ یک ایده‌آل اول مدرج R_j است و برای هر $i \neq j$، $R_i = (N_i :_{R_i} M_i)$. حال نشان می‌دهیم N_j یک زیرمدول قویاً اول مدرج M_j است. فرض کنید L_j یک زیرمدول مدرج شامل N_j باشد به‌طوری‌که $(L_j :_{R_j} M_j) = (N_j :_{R_j} M_j)$. حال فرض کنید

$L = M_1 \times \cdots \times M_{j-1} \times L_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_n$

لذا $(L:_R M) = (N:_R M)$. حال چون N یک زیرمدول قویاً اول مدرج است و $N \subseteq L$، $N = L$. در نتیجه $L_j = N_j$. بنابراین N_j یک زیرمدول قویاً اول مدرج M_j است. اثبات برعکس واضح است.

یادآوری: ایده‌آل‌های مدرج I, J را هم‌اول مدرج گوییم، هرگاه $I + J = R$.

قضیه ۲۲: فرض کنید ایده‌آل مدرج صفر یک تجزیه اولیه هم‌اول مدرج داشته باشد. اگر M یک R-مدول تقسیم‌پذیر مدرج باشد، آنگاه هر زیرمدول قویاً اول مدرج، یک زیرمدول ماکسیمال مدرج است.

اثبات: اگر ایده‌آل مدرج صفر، اولیه مدرج باشد، آنگاه بنا به قضیه ۱۴، حکم برقرار است. حال فرض کنید

$$\bigcap_{i=1}^{n} Q_i = ०$$

یک تجزیه اولیه هم‌اول مدرج از ایده‌آل صفر باشد. همریختی مدرج طبیعی

$$\varphi: R \to \left(\frac{R}{Q_1}\right) \times \cdots \times \left(\frac{R}{Q_n}\right)$$

با ضابطه $\varphi(r) = (r + Q_1, \cdots, r + Q_n)$ را در نظر بگیرید. چون $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i = ०$ و Q_iها هم‌اول مدرج هستند، φ یک یکریختی مدرج است. بنابراین بدون از دست دادن کلیت برهان می‌توان فرض کرد $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ که در آن R_iها حلقه‌های اولیه مدرج هستند. قرار دهید

$$M_1 = M \times ० \times \cdots \times ०$$
$$M_2 = ० \times M \times \cdots \times ०$$
$$\cdots$$
$$M_n = ० \times \cdots \times M.$$

به‌آسانی دیده می‌شود که M_iها یک R_i-مدول مدرج هستند و

$$M \cong M_1 \times \cdots \times M_n.$$

لذا می‌توان فرض کرد $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ یک $R_1 \times \cdots \times R_n$-مدول تقسیم‌پذیر مدرج است و هر M_i یک R_i-مدول مدرج است. به‌طور معادل، برای هر $r_{g_1} \in h(R_1)$ داریم:

(الف) $r_{g_1} \in Z^{gr}(R_1)$ اگر و تنها اگر $s_{h_1} r_{g_1} = ०$ برای بعضی $० \neq s_{h_1} \in h(R_1)$ اگر و تنها اگر

$$(r_{g_1}, 1, \cdots, 1)(s_{h_1}, ०, \cdots, ०) = (०, \cdots, ०)$$

اگر و تنها اگر

$$(r_{g_1}, 1, \cdots, 1) \in Z^{gr}(R).$$

(ب) $r_1 M_1 = M_1$ اگر و تنها اگر $(r_1, 1, \cdots, 1)M = M.$

چون M یک R-مدول تقسیم‌پذیر مدرج است، آنگاه M_1 یک R_1-مدول تقسیم‌پذیر مدرج است. به‌طور مشابه، برای هر i، M_i یک R_i-مدول تقسیم‌پذیر مدرج است. فرض کنید N یک زیرمدول مدرج M باشد. در این‌صورت N به فرم

$$N = N_1 \times \cdots \times N_n$$

است که N_i یک زیرمدول مدرج M_i است. فرض کنید K_j یک زیرمدول M_j شامل N_j با $(N_j : M_j) = (K_j : M_j)$ باشد. فرض کنید

$$K = M_1 \times \cdots \times M_{j-1} \times K_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_n$$

چون $(N:M) = (K:M)$، N یک زیرمدول قویاً اول مدرج M است و $N \subseteq K$، لذا بنابه قضیه ۸، به‌دست می‌آوریم $N = K$، در نتیجه $N_j = K_j$. با توجه به قضیه ۸، N_j یک زیرمدول قویاً اول مدرج M_jاست. از این‌که R_j یک حلقه اولیه مدرج است، بنابه قضیه ۱۴، N_j یک زیرمدول ماکسیمال مدرج M_j است. بنابراین

$$K = M_1 \times \cdots \times M_{j-1} \times K_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_n$$

یک زیرمدول ماکسیمال مدرج M است.

تعریف ۲۳: فرض کنید R یک حلقه مدرج و J یک ایده‌آل مدرج R و M یکR-مدول مدرج باشد. زیرحلقه

$$R \bowtie J = \{(r, r+j) : r \in R, j \in J\}$$

از حلقه مدرج $R \times R$ یک حلقه مدرج با

$$(R \bowtie J)_g = \{(r_g, r_g + j_g) : r_g \in R_g, j_g \in J \cap R_g\}$$

و

$$R \bowtie J = \bigoplus_{g \in G} (R \bowtie J)_g$$

که ادغام شده تکرار R در امتداد ایده‌آل مدرجJ نامیده می‌شود. بعلاوه، تکرار R-مدول مدرج M در امتداد ایده‌آل مدرجJ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M \bowtie J = \{(m, m') \in M \times M : m - m' \in JM\}$$

که یک $R \bowtie J$-مدول مدرج با

$$(M \bowtie J)_g = \{(m_g, m'_g) \in (M \times M)_g : m_g - m'_g \in JM\}$$

و

$$M \bowtie J = \bigoplus_{g \in G} (M \bowtie J)_g$$

و همچنین ضرب اسکالار به صورت زیر تعریف می‌شود:

برای $r \in R$، $j \in J$ و $(m, m') \in M \times M$؛

$$(r, r' + j)(m, m') = (rm, (r' + j)m')$$

فرض کنید N یک زیرمدول مدرج از یکR-مدول مدرج M و J یک ایده‌آل مدرج R باشد. در این‌صورت

$$N \bowtie J = \{(n, m) \in N \times M : n - m \in JM\}$$

و

$$\bar{N} = \{(m, n) \in M \times N : m - n \in JM\}$$

زیرمدول‌های مدرج $M \bowtie J$ هستند.

فرض کنید $f: R_1 \to R_2$ یک همریختی حلقه‌ای مدرج، J یک ایده‌آل مدرج از R_2، M_1 یک R_1-مدول مدرج، M_2 یک R_2-مدول مدرج و $\varphi: M_1 \to M_2$ یک R_1 همریختی باشد. زیرحلقه مدرج

$$R_1 \bowtie^f J = \{(r, f(r) + j) : r \in R_1, j \in J\}$$

از حلقه مدرج $R_1 \times R_2$ ادغام R_1 و R_1 در امتداد Jنامیده می‌شود. ادغام M_1 و M_2 در امتداد J با ترتیب φ به‌صورت

$$M_1 \bowtie^\varphi JM_2 = \{(m_1, \varphi(m_1) + m_2) : m_1 \in M_1, m_2 \in JM_2\}$$

تعریف می‌شود که یک$R_1 \bowtie^f J$-مدول مدرج با ضرب اسکالار زیر است.

$$(r, f(r) + j)(m_1, \varphi(m_1) + m_2) = (rm_1, \varphi(rm_1) + f(r)m_2 + j\varphi(m_1) + jm_2)$$

برای زیرمدول مدرج N_1 از M_1 و N_2 از M_2، به‌وضوح زیرمجموعه‌های

$$N_1 \bowtie^\varphi JM_2 = \{(m_1, \varphi(m_1) + m_2) \in M_1 \bowtie^\varphi JM_2 : m_1 \in N_1\}$$

و

$$\{(m_1, \varphi(m_1) + m_2) \in M_1 \bowtie^\varphi JM_2 : \varphi(m_1) + m_2 \in N_2\}$$

زیرمدول‌های مدرج $M_1 \bowtie^\varphi JM_2$ هستند. توجه کنید

اگر $M = M_1 = M_2$، $R = R_1 = R_2$

$f = Id_R$ و $\varphi = Id_M$، آنگاه ادغام M_1 و M_2 در امتداد J با ترتیب φ، دقیقاً تکرار R-مدول مدرج M در امتداد Jاست. در این حالت

$N_1 \bowtie^\varphi JM_2 = N_1 \bowtie J$ و $\overline{N_2}^\varphi = \bar{N}$.

قضیه ۲۴: $R_1 \bowtie^f J$- مدول مدرج $M_1 \bowtie^\varphi JM_2$ تعریف شده دربالا را درنظر بگیرید. فرض کنید N_1 یک زیرمدول مدرج M_1 باشد. دراین‌صورت $N_1 \bowtie^\varphi JM_2$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $M_1 \bowtie^\varphi JM_2$ است اگر و تنها اگر N_1 یک زیرمدول قویاً اول مدرج M_1 است.

اثبات: فرض کنید برای $m_{1_g}, m'_{1_g} \in h(M)$، داشته باشیم

$$((N_1 + R_1 m_{1_g}):_{R_1} M_1)m'_{1_g} \subseteq N_1$$

در این‌صورت

$$\left(\begin{array}{c} N_1 \bowtie^\varphi JM_2 + (R_1 \bowtie^f J) \\ \left(m_{1_g}, \varphi\left(m_{1_g}\right)\right):_{R_1 \bowtie^f J} M_1 \bowtie^\varphi JM_2 \end{array}\right)$$
$$(m'_{1_g}, \varphi(m'_{1_g}) \subseteq N_1 \bowtie^\varphi JM_2$$

لذا از این‌که $N_1 \bowtie^\varphi JM_2$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $M_1 \bowtie^\varphi JM_2$ است،

$$(m_{1_g}, \varphi(m_{1_g}) \in N_1 \bowtie^\varphi JM_2$$

یا

$$(m'_{1_g}, \varphi(m'_{1_g})) \in N_1 \bowtie^\varphi JM_2 .$$

در نتیجه $m_{1_g} \in N_1$ یا $m'_{1_g} \in N_1$. بنابراین N_1 یک زیرمدول قویاً اول مدرج M_1 است. برعکس، فرض کنید

$$\left(\begin{array}{c} N_1 \bowtie^\varphi JM_2 + (R_1 \bowtie^f J) \\ \left(m_{1_g}, \varphi\left(m_{1_g}\right)\right):_{R_1 \bowtie^f J} M_1 \bowtie^\varphi JM_2 \end{array}\right)$$
$$(m'_{1_g}, \varphi(m'_{1_g}) \subseteq N_1 \bowtie^\varphi JM_2$$

که در آن

$$(m_{1_g}, \varphi(m_{1_g})), (m'_{1_g}, \varphi(m'_{1_g})) \in h(M_1 \bowtie^\varphi JM_2$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد

$$((N_1 + R_1 m_{1_g}):_{R_1} M_1)m'_{1_g} \subseteq N_1$$

چون N_1 یک زیرمدول قویاً اول مدرج M_1 است، پس $m_{1_g} \in N_1$ یا $m'_{1_g} \in N_1$. در نتیجه،

$$(m_{1_g}, \varphi(m_{1_g}) \in N_1 \bowtie^\varphi JM_2$$

یا

$$(m'_{1_g}, \varphi(m'_{1_g})) \in N_1 \bowtie^\varphi JM_2.$$

لذا $N_1 \bowtie^\varphi JM_2$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $M_1 \bowtie^\varphi JM_2$ است.

قضیه ۲۵: $R_1 \bowtie^f J$- مدول مدرج $M_1 \bowtie^\varphi JM_2$ تعریف شده در بالا را در نظر بگیرید. فرض کنید N_2 یک زیرمدول مدرج M_2 باشد. دراین‌صورت N_2 یک زیرمدول قویاً اول مدرج M_2 است اگر و تنها اگر $\overline{N_2}^\varphi$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $M_1 \bowtie^\varphi JM_2$ است.

اثبات: فرض کنید N_2 یک زیرمدول قویاً اول مدرج M_2 باشد. فرض کنید برای

$$(m_{1_g}, \varphi(m_{1_g}) + m_{2_g}),$$
$$\left(m'_{1_g}, \varphi\left(m'_{1_g}\right) + m'_{2_g}\right) \in$$
$$h(M_1 \bowtie^\varphi JM_2)$$

داشته باشیم

$$\left(\overline{N_2}^\varphi + (R_1 \bowtie^f J)\left(m_{1_g}, \varphi\left(m_{1_g}\right) + m_{2_g}\right):_{R_1 \bowtie^f J} M_1 \bowtie^\varphi JM_2\right)$$
$$(m'_{1_g}, \varphi(m'_{1_g}) + m'_{2_g}) \subseteq \overline{N_2}^\varphi$$

لذا

$$((N_2 + R_2(\varphi(m_{1_g}) + m_{2_g}):_{R_2} M_2)(\varphi(m'_{1_g}) + m'_{2_g}) \subseteq N_2$$

بنابراین

$$\left(\varphi\left(m_{1_g}\right) + m_{2_g}\right) \in N_2$$

یا

$$(\varphi(m'_{1_g}) + m'_{2_g}) \in N_2.$$

پس

$$(m_{1_g}, \varphi(m_{1_g}) + m_{2_g}) \in \overline{N_2}^{\varphi}$$

یا

$$(m'_{1_g}, \varphi(m'_{1_g}) + m'_{2_g}) \in \overline{N_2}^{\varphi}.$$

در نتیجه $\overline{N_2}^{\varphi}$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $M_1 \bowtie^{\varphi} JM_2$ است. برعکس، فرض کنید $\overline{N_2}^{\varphi}$ یک زیرمدول قویاً اول مدرج $M_1 \bowtie^{\varphi} JM_2$ باشد. فرض کنید برای $m_{2_g}, m'_{2_g} \in h(M_2)$ داشته باشیم

$$((N_2 + R_2 m_{2_g}):_{R_2} M_2) m'_{2_g} \subseteq N_2.$$

چون φ پوشاست، $m_{1_g}, m'_{1_g} \in h(M_1)$ موجودند به‌طوری‌که

$$m_{2_g} = \varphi(m_{1_g}) \ , m'_{2_g} = \varphi\ (m'_{1_g}),$$

پس

$$\left(\overline{N_2}^{\varphi} + (R_1 \bowtie^{f} J)\left(m_{1_g}, m_{2_g}\right):_{R_1 \bowtie^{f} J} M_1 \bowtie^{\varphi} JM_2\right)(m'_{1_g}, m'_{2_g}) \subseteq \overline{N_2}^{\varphi}$$

بنابراین

$$(m_{1_g}, m_{2_g}) \in \overline{N_2}^{\varphi}$$

یا

$$(m'_{1_g}, m'_{2_g}) \in \overline{N_2}^{\varphi},$$

لذا $m_{2_g} \in N_2$ یا $m'_{2_g} \in N_2$، در نتیجه N_2 یک زیرمدول قویاً اول مدرج M_2 است.

فهرست منابع

[1] R. Abu-Dawwas, .MBataineh. Graded prime submodules over non-commutative rings. Vietnam J. Math. 46(3): 681-692(2018).

[2] .SEbrahimi Atani .F ,Farzalipour. On graded secondary modules. Turk. J. Math. 31: 371-378(2007).

[3] J. Escoriza, B. Torrecillas. Multiplication objects in commutative grothendieck categories. Comm. Algebra 26(6): 1867-1883(1998).

[4] .FFarzalipour, P. Ghiasvand. On the union of graded prime submodules. Thai. J. Math. 9(1): 49-55(2011).

[5] .FFarzalipour, P. Ghiasvand, .M Adlifard. On graded weakly semiprime submodules. Thai. J. Math. 12(1): 167-174(2014).

[6] P. Ghiasvand, .F Farzalipour. Graded semiprime submodules over non-commutative graded rings. J. Algebraic System 10(1):95-110(2022).

[7] P. Ghiasvand, F. Farzalipour. On graded weak multiplication modules. Tamkang J. Math. 43(2): 171-177(2012).

[8] K. Hakan Oral, U. Tekir, A. G. Agargun. On graded prime and primary submodules. Turk. J. Math. 35: 159-167(2011).

[9] N. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, Graded Rings Theory. Mathematical Library 28, North Holand, Amsterdam, (1982).

[10] NNastasescu, F. Van Oystaeyen, Methods of Graded Rings. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1836. Springer, (2004).

[11] M. Refaei, K. Alzobi. On graded primary ideals. Turk. J. Math. 28(3): 217-229(2004).