دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و دوم، مهر و آبان ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مجموعه‌های فشرده تعریف‌پذیر در فضاهای تعریف‌پذیر وابسته به ساختارهای ت-کمینه

سمیه تاری*

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۱۸   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۱۵

چکیده

در یک ساختار مرتبه اول $\mathcal{M}$ که بسطی از یک ترتیب خطی چگال بدون ابتدا و انتها است، ت-کمینه گفته می‌شود هرگاه هر زیرمجموعه تعریف‌پذیر از M برابر اجتماعی متناهی از بازه‌های باز و نقاط باشد. مفهوم فشردگی نقش اصلی را در توپولوژی جبری بازی می‌کند، و هر گروه و حلقه تعریف‌پذیر در یک ساختار ت-کمینه یک گروه توپولوژیکی و حلقه توپولوژیکی است. مجموعه $X \subseteq M$ به طور تعریف‌پذیر فشرده است هرگاه به ازای هر خم تعریف‌پذیر $\sigma: (a,b) \subseteq M \to X$، حدهای $\lim_{x\to b^-}\sigma(x)$ و $\lim_{x\to a^+}\sigma(x)$ در X موجود باشند. در ساختارهای ت- کمینه فشردگی تعریف‌پذیر با معادل دیگری از فشردگی در فضاهای اقلیدسی یعنی بسته و کرانداری هم‌ارز است. در این مقاله نشان داده می‌شود که مشابه ساختارهای ت-کمینه یک مجموعه تعریف‌پذیر در فضای تعریف‌پذیر وابسته به یک ساختار ت-کمینه به طور تعریف‌پذیر فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کران‌دار باشد.

واژه‌های کلیدی: ساختار ت-کمینه، فضاهای تعریف‌پذیر وابسته به ساختارهای ت-کمینه، فشردگی تعریف‌پذیر.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:s_tari@azaruniv.ac.ir

۱- مقدمه

نظریه مدل یک شاخه از منطق ریاضی است که در آن ساختارهای ریاضی با در نظر گرفتن جملات مرتبه اول درست در آن‌ها مورد مطالعه واقع می‌شوند. میدان اعداد حقیقی و میدان اعداد مختلط به عنوان مثال‌های جالب مورد توجه نظریه مدل دان‌ها قرار گرفته‌اند. می‌توان گفت بسیاری از مفاهیم نظریه مدلی با تعمیم پدیده‌های جبری کلاسیک به حالت‌های کلی‌تر به دست آمده‌اند.

تارسکی[2] آغازگر مطالعه منطقی میدان اعداد حقیقی بوده است. تلاش‌های اصلی او در جهت بررسی تصمیم‌پذیری نظریه میدان اعداد حقیقی منجر به اثبات خاصیت حذف سور برای این نظریه شده است. طبق خاصیت فوق مجموعه‌های تعریف‌پذیر در میدان اعداد حقیقی همان مجموعه‌های نیم جبری هستند. به عبارت دیگر هر مجموعه تعریف‌پذیر $X \subseteq \mathbb{R}$ به صورت ترکیب بولی متناهی از مجموعه‌هایی به فرم

$$\{x \in \mathbb{R}^n:\ f_1(x) = \cdots = f_n(x) \geq 0\}$$

است که در آن $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x]$. بنابراین هر زیرمجموعه یک متغیره تعریف‌پذیر در آن به صورت اجتماعی متناهی از بازه‌های باز و نقاط می‌باشد.

پیلی[3] و استاین هورن[4] با برجسته نمودن این ویژگی در ساختارهای مرتب خطی، ت- کمینگی را به صورت زیر معرفی نمودند. ساختار مرتبه اول $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ که بسطی از یک ترتیب خطی چگال بدون ابتدا و انتها می‌باشد، ت-کمینه گفته می‌شود هرگاه هر زیرمجموعه از M که در $\mathcal{M}$ تعریف‌پذیر است برابر اجتماعی متناهی از بازه‌های باز و نقاط در M باشد.

لازم به توضیح است که نماد ت-کمینه اختصاری برای عبارت "ترتیب کمینه" است که بیانگر این است که مجموعه‌های تعریف‌پذیر یک متغیره در ساختار ت-کمینه $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$، دقیقاً مجموعه‌های تعریف‌پذیر توسط رابطه ترتیب هستند.

در منابع [۲، ۶، ۷] ویژگی‌های اصلی ساختارهای ت-کمینه مورد بررسی قرار گرفتند. هم چنین در [۱] ویژگی‌های مطرح در ساختارهای ت-کمینه از دیدگاه هندسی بررسی و گرد آوری شدند. مفهوم فشردگی نقش اصلی را در توپولوژی جبری بازی می‌کند، و هر گروه و حلقه تعریف‌پذیر در یک ساختار ت-کمینه یک گروه توپولوژیکی و حلقه توپولوژیکی است. لذا مفهوم فشردگی در ساختارهای ت-کمینه یک موضوع مهم است. البته تعریف استاندارد فشردگی را نمی‌توان در مورد ساختارهای ت-کمینه مورد استفاده قرار داد. به عنوان مثال فرض کنید $\mathcal{M}$ یک مدل نااستاندارد از نظریه میدان‌های بسته حقیقی باشد. هم‌چنین باز $[0,1]$ را نظر بگیرید. با فرض اینکه s یک عضو نااستاندارد بی‌نهایت کوچک باشد. پوشش باز $\{a + (-s, s):\ a \in [0,1]\}$ از $[0,1]$ دارای زیرپوشش متناهی نمی‌باشد. بنابراین استفاده از تعریف‌های معادل فشردگی در فضای اقلیدسی در این‌جا مناسب به نظر می‌رسد. در [۵] مفهوم فشردگی تعریف‌پذیر به صورت زیر معرفی شده است.

فرض کنید $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ یک ساختار ت-کمینه، $m \in \mathbb{N}$ و $X \subseteq M^m$ یک مجموعه تعریف پذیر باشد. مجموعه X به طور تعریف‌پذیر فشرده[5] است هرگاه به ازای هر خم تعریف‌پذیر $\sigma: (a, b) \subseteq M \to X$، حدهای $\lim_{x \to b^-} \sigma(x)$ و $\lim_{x \to a^+} \sigma(x)$ در X موجود باشند. مفهوم فشردگی تعریف‌پذیر با بسته و کرانداری مجموعه‌ها معادل است.

[2] Tarski
[3] Pillay
[4] Stienhorn
[5] Definably compact

فضاهای تعریف‌پذیر وابسته به ساختارهای ت-کمینه به همراه ویژگی‌های مجموعه‌ها و توابع تعریف‌پذیر در این نوع فضاها در [۱] مورد بررسی و مطالعه واقع شده‌اند. در این مقاله مفهوم فشردگی تعریف‌پذیر را در فضاهای تعریف‌پذیر بررسی می‌شود. مشابه ساختارهای ت-کمینه نشان داده می‌شود که یک مجموعه تعریف‌پذیر در فضای تعریف‌پذیر به طور تعریف‌پذیر فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کران‌دار باشد.
در بخش ۲ مفاهیم مورد نیاز از نظریه مدل از منبع [۳] آورده می‌شود. در بخش ۳ مباحث مربوط به ساختارهای ت- کمینه آورده می‌شود. در بخش ۴ نتایج اصلی در مورد مجموعه‌های فشرده تعریف‌پذیر در فضاهای تعریف‌پذیر را بیان می‌کنیم.

۲- مفاهیم و تعاریف مقدماتی از نظریه مدل

در این بخش مفاهیم اولیه و مقدماتی از نظریه مدل را از [۳] به طور مختصر یادآور می‌شویم.
یک زبان[6] مرتبه اول $\mathcal{L}$ عبارت است از سه تای مرتب متشکل از مجموعه‌ی نمادهای تابعی[7] $\mathcal{F}$، مجموعه‌ی نمادهای محمولی[8] $\mathcal{R}$ و مجموعه‌ی نمادهای ثابت $\mathcal{C}$. به هر نماد تابعی $f \in \mathcal{F}$ و هر نماد محمولی $R \in \mathcal{R}$ به ترتیب اعداد طبیعی n_f و n_R نسبت داده می‌شود.

تعریف ۱: یک $\mathcal{L}$−ساختار $\mathcal{M}$ متشکل از موارد زیر است:

- یک مجموعه غیر خالی M که جهان ساختار نامیده می‌شود.
- تابع $\mathrm{f}^{\mathcal{M}}: \mathrm{M}^{\mathrm{n_f}} \to \mathrm{M}$ به هر نماد تابعی $\mathrm{f} \in \mathcal{F}$ نسبت داده می‌شود که تعبیر نماد f در $\mathcal{M}$ نامیده می‌شود.
- به ازای هر نماد محمولی $\mathrm{R} \in \mathcal{R}$، یک رابطه $\mathrm{R}^{\mathcal{M}} \subseteq \mathrm{M}^{\mathrm{n_R}}$ نسبت داده می‌شود که تعبیر نماد R در $\mathcal{M}$ نامیده می‌شود.
- به ازای هر نماد ثابت $\mathrm{c} \in \mathcal{C}$، عضو $\mathrm{c}^{\mathcal{M}} \in \mathrm{M}$ نسبت داده می‌شود که تعبیر نماد c در $\mathcal{M}$ نامیده می‌شود.

$\mathcal{L}$ ساختار $\mathcal{M}$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}}: f \in \mathcal{F}, R \in \mathcal{R}, c \in \mathcal{C})$$

مفهوم تعریف‌پذیری در یک ساختار توسط فرمول‌ها بیان می‌شود. به طور غیر صوری یک $\mathcal{L}$−فرمول دنباله متناهی از نمادهای موجود در زبان $\mathcal{L}$، متغیرهای $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots$، نماد تساوی $=$، نمادهای رابط جمله‌ای $\neg$ ،$\vee,\wedge$، سور وجودی $\exists$ و نمادهای پرانتز می‌باشد. تعریف دقیق و استقرایی $\mathcal{L}$−فرمول‌ها به صورت زیر می‌باشد.

تعریف ۲: مجموعه $\mathcal{L}$−ترم‌ها کوچکترین مجموعه $\mathcal{T}$ است که در سه شرط زیر صدق می‌کند.

- هر نماد ثابت از زبان $\mathcal{L}$ متعلق به مجموعه $\mathcal{T}$ است.
- هر متغیر $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots$، متعلق به مجموعه $\mathcal{T}$ می‌باشد.
- اگر $\mathrm{f} \in \mathcal{F}$ یک نماد تابعی از زبان $\mathcal{L}$ و $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{\mathrm{n_f}}$ متعلق به مجموعه $\mathcal{T}$ باشند، آن‌گاه $\mathrm{f}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{\mathrm{n_f}})$ متعلق به مجموعه $\mathcal{T}$ می‌باشد.

یک $\mathcal{L}$−فرمول اتمی یا به صورت $t_1 = t_2$ و یا به صورت $R(t_1, \ldots, t_{n_R})$ می‌باشد که در آن‌ها $t_1, \ldots, t_{n_R}$ ترم و R یک نماد محمولی در زبان $\mathcal{L}$ می‌باشد.
یک $\mathcal{L}$−فرمول اتمی یا به صورت $\mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2$ و یا به صورت $\mathrm{R}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{\mathrm{n_R}})$ می‌باشد که در آن‌ها

[6] Language
[7] Function symbols
[8] Relation symbols

$t_1,\dots,t_{n_R}$ ترم و R یک نماد محمولی در زبان $\mathcal{L}$ می‌باشد.

تعریف ۳: مجموعه $\mathcal{L}$–فرمول‌ها کوچکترین مجموعه‌ای است که در دو شرط زیر صدق می‌کند:

- هر $\mathcal{L}$–فرمول اتمی متعلق به مجموعه $\mathcal{W}$ می‌باشد.
- اگر φ و ψ متعلق به $\mathcal{W}$ باشند، آن‌گاه $\neg\varphi$، $\varphi \wedge \psi$ و $\exists v_i \varphi$ متعلق به $\mathcal{W}$ می‌باشند.

در فرمول φ حضور متغییر v آزاد است هرگاه توسط سور وجودی به صورت $\exists v$ بسته نشده باشد. یک فرمول بدون متغیر آزاد جمله[9] نامیده می‌شود. هم‌چنین فرمولی بدون سور را یک فرمول خالی از سور[10] می‌نامیم.

به هر نماد از زبان $\mathcal{L}$ در ساختار $\mathcal{M}$ تعبیری متناظر می‌شود. با استفاده از تعبیرات فوق می‌توان هر جمله و حتی هر فرمول را در ساختار $\mathcal{M}$ تعبیر نمود و درستی تعبیر مورد نظر را بررسی نمود.

تعریف ۴: فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$–ساختار، t یک ترم با متغیرهای $v_1,\dots,v_m$ باشد. تعبیر ترم t، یک تابع $t^{\mathcal{M}}: M^m \to M$ می‌باشد که به صورت استقرایی تعریف می‌شود. فرض کنید $a = (a_1,\dots,a_m)$

- اگر t نماد ثابت c باشد، آن‌گاه $t^{\mathcal{M}}(a) = c^{\mathcal{M}}$.
- اگر t متغیر v_i باشد، آن‌گاه $t^{\mathcal{M}}(a) = a_i$.
- اگر t به صورت $f(t_1,\dots,t_{n_f})$ باشد، آن‌گاه $t^{\mathcal{M}}(a) = f^{\mathcal{M}}(t_1{}^{\mathcal{M}},\dots,t_{n_f}{}^{\mathcal{M}})$.

تعریف ۵: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$–ساختار و φ یک فرمول با متغیرهای آزاد $v_1,\dots,v_m$ باشد. درستی یا صدق‌پذیری فرمول در ساختار $\mathcal{M}$ به ازای هر $a = (a_1,\dots,a_m)$ با $\mathcal{M} \vDash \varphi(a)$ نمایش داده می‌شود و به طور استقرایی زیر تعریف می‌شود.

- اگر φ به صورت $t_1 = t_2$ و $t_1{}^{\mathcal{M}}(a) = t_2{}^{\mathcal{M}}(a)$ باشد، آنگاه $\mathcal{M} \vDash \varphi(a)$.
- اگر $\varphi = R(t_1,\dots,t_{n_R})$، آن‌گاه $\mathcal{M} \vDash \varphi(a)$ هرگاه $(t_1{}^{\mathcal{M}}(a),\dots,t_{n_R}{}^{\mathcal{M}}(a)) \in R^{\mathcal{M}}$.
- اگر φ به صورت $\neg\psi$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{M} \vDash \varphi(a)$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \nvDash \psi(a)$.
- اگر $\varphi = \psi \wedge \theta$، آن‌گاه $\mathcal{M} \vDash \varphi(a)$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \vDash \theta(a)$ و $\mathcal{M} \vDash \psi(a)$.
- اگر φ به صورت $\exists w \psi(v,w)$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{M} \vDash \varphi(a)$ اگر و تنها اگر $b \in M$ موجود باشد که $\mathcal{M} \vDash \psi(a,b)$.

تعریف ۶: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$–ساختار، $m \in \mathbb{N}$ و $X \subseteq M^m$ یک مجموعه باشد. مجموعه X را تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$ گویند. هرگاه

$X = \{a \in M^m\colon\ \mathcal{M} \vDash \varphi(a,b)\}$

یکه $\varphi(v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_n)$ یک فرمول $b_1,\dots,b_n \in M$.

نگاشت $f: M^m \to M^n$ را یک تابع تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$ گوییم هرگاه گراف آن یک مجموعه تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$ باشد.

تعریف ۷: فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد. هر مجموعه از $\mathcal{L}$–جملات را یک نظریه مرتبه اول می‌نامند.

- ساختار $\mathcal{M}$ مدلی برای نظریه T است که با نماد $\mathcal{M} \vDash T$ نشان داده می‌شود هرگاه $\mathcal{M} \vDash \sigma$ به ازای هر $\sigma \in T$.

[9] Sentence
[10] Quantifier-free formula

• هرگاه به ازای هر جمله σ داشته باشیم $\sigma \in T$ و یا $\neg\sigma \in T$، نظریه T را کامل گویند.

• نظریه کامل $\mathcal{L}-$ ساختار $\mathcal{M}$ که با نماد $h(\mathcal{M})$ نمایش داده می‌شود، برابر مجموعه تمام $\mathcal{L}-$جملات صادق در $\mathcal{M}$ است.

نظریه T دارای خاصیت حذف سور می‌باشد. هرگاه به ازای هر فرمول $\varphi(v)$ فرمول خالی از سور $\psi(v)$ موجود باشد که $T \vDash \forall v(\varphi(v) \leftrightarrow \psi(v))$.

• نظریه T دارای توابع اسکولم تعریف‌پذیر[11] است هرگاه به ازای هر فرمول $\varphi(\overline{w}, v)$ فرمول $\psi(\overline{w}, v)$ موجود باشد که:

1) $T \vDash \forall\overline{w}, \exists v\psi(\overline{w}, v)$،

2) $T \vDash \forall\overline{w}\forall v\forall u\Big(\big(\psi(\overline{w}, v) \wedge \psi(\overline{w}, u)\big) \rightarrow u = v\Big)$،

3) $T \vDash \forall\overline{w}(\exists v\varphi(\overline{w}, v) \rightarrow \exists u(\psi(\overline{w}, u) \wedge \varphi(\overline{w}, u))$.

۳- ساختارهای ت- کمینه

در این بخش مباحث مطرح پیرامون ساختارهای ت-کمینه را از [۱] به طور خلاصه خواهیم آورد.

تعریف ۸: ساختار مرتبه اول $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ که بسطی از یک ترتیب خطی چگال بدون ابتدا و انتها می‌باشد، ت- کمینه گفته می‌شود هرگاه هر زیر مجموعه از M که در $\mathcal{M}$ تعریف‌پذیر است برابر اجتماعی متناهی از بازه‌ها و نقاط در M باشد.

با توجه به توصیف دقیق ماهیت مجموعه‌های تعریف‌پذیر در ساختارهای کلاسیک، بسیاری از آن‌ها به عنوان مثال‌های جالب از ساختارهای ت-کمینه معرفی شدند.

مثال ۱: با توجه به اینکه نظریه ترتیب‌های خطی چگال بدون ابتدا و انتها دارای خاصیت حذف سور است. لذا در هر مجموعه مرتب خطی چگال بدون ابتدا و انتها $(M, <)$، هر مجموعه تعریف‌پذیر $X \subset M$، توسط یک فرمول خالی از سور در زبان $\mathcal{L} = \{<\}$ تعریف می‌شود. بنابراین X به صورت اجتماعی متناهی از بازه‌های باز و نقاط است. لذا هر ساختار مرتب خطی چگال بدون ابتدا و انتها ت-کمینه است.

مثال ۲: نظریه میدان‌های بسته حقیقی دارای خاصیت حذف سور در زبان حلقه‌های مرتب است. پس در هر میدان بسته هر مجموعه تعریف‌پذیر توسط یک فرمول خالی از سور تعریف می‌شود. بنابراین به صورت اجتماعی متناهی از بازه‌های باز و نقاط است. پس هر میدان بسته حقیقی $\mathcal{R}$ ت-کمینه است.

مثال ۳: مشابه مثال‌های قبلی با توجه به خاصیت حذف سور نظریه گروه‌های آبلی مرتب و بخش‌پذیر و نظریه میدان‌های بسته جبری، هر گروه آبلی مرتب و هر میدان بسته جبری نیز ت-کمینه است.

مثال ۴: میدان اعداد گویا $\mathcal{Q} = (Q, +, -, \times, 0, 1, <)$ ت-کمینه نیست. زیرا مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ در ساختار $\mathcal{Q}$ تعریف‌پذیر است که نمی توان آن‌را به صورت اجتماعی متناهی از بازه‌های باز و نقاط نوشت.

بررسی وضعیت مجموعه‌های تعریف‌پذیر در بعدهای بالاتر در ساختارهای ت-کمینه منجر به اثبات خاصیت تجزیه سلولی[12] در این نوع ساختارها شده است. در واقع سلول‌ها مجموعه‌های تعریف‌پذیر خاص می‌باشند. طبق خاصیت تجزیه سلولی سلول‌ها بلوک‌های سازنده مجموعه‌های تعریف‌پذیر هستند. درادامه ما مفهوم فوق را به طور کامل ارائه خواهیم داد. اولین گام در اثبات خاصیت تجزیه

---

[11] Definable Skolem function

[12] Cell decomposition property

سلولی، اثبات خاصیت یکنوایی[۱۳] برای توابع تعریف‌پذیر است.

قضیه ۱: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار ت-کمینه، $X \subseteq M$ یک مجموعه تعریف‌پذیر و $f: X \to M$ یک تابع تعریف‌پذیر باشد. در این‌صورت افراز متناهی از X به بازه‌های باز و مجموعه متناهی موجود است که تابع f روی هریک از بازه‌های فوق ثابت یا یکنوای اکید و پیوسته است.
برهان. مراجعه کنید به [۱].

تعریف ۹: فرض کنید $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ یک ساختار ت-کمینه و $m \in \mathbb{N}$. تعریف استقرایی سلول در M^m به صورت زیر انجام می‌شود.
هر زیرمجموعه تک عضوی از M یک $0-$سلول می‌باشد. هر بازه باز (a, b) در M یک $1-$سلول می‌باشد.
اکنون فرض کنید $C \subseteq M^m$ یک $k-$سلول باشد که $k \leq m$. دو نوع سلول وابسته به C در M^{m+1} به صورت زیر تعریف می‌شود:
اگر $f, g: C \to M \cup \{\pm\infty\}$ توابع تعریف‌پذیر و پیوسته‌ای باشند که $f(\bar{x}) < g(\bar{x})$. آن‌گاه

$$\{(\bar{x}, y) \in C \times M:\ f(\bar{x}) < y < g(\bar{x})\}$$

یک $k+1-$سلول در M^{m+1} می‌باشد.
اگر $f: C \to M$ یک تابع تعریف‌پذیر و پیوسته باشد. آن‌گاه

$$\{(\bar{x}, y) \in C \times M:\ y = f(\bar{x})\}$$

یک $k-$ سلول در M^{m+1} می‌باشد.

تعریف ۱۰: یک تجزیه سلولی برای مجموعه تعریف‌پذیر غیر خالی $X \subseteq M^m$ با استقرا روی m به صورت زیر تعریف می‌شود.

اگر $X \subseteq M$ یک مجموعه تعریف‌پذیر باشد و $\mathcal{D}$ یک افراز متناهی از X به سلول‌ها باشد. آن‌گاه $\mathcal{D}$ یک تجزیه سلولی از X می‌باشد.
اگر $X \subseteq M^{m+1}$ یک مجموعه تعریف‌پذیر غیرخالی و $\mathcal{D}$ یک افراز متناهی از X به سلول‌ها در M^{m+1} باشد. آن‌گاه $\mathcal{D}$ یک تجزیه سلولی از X است هرگاه $\Pi(\mathcal{D})$ یک تجزیه سلولی از $\Pi(X)$ باشد. ($\Pi: M^{m+1} \to M^m$ نگاشت تصویر روی m مولفه اول می‌باشد.)

تعریف ۱۱: فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ و $X, Y \subseteq M^m$ مجموعه‌های تعریف‌پذیری باشند. گوییم تجزیه سلولی $\mathcal{D}$ از X، مجموعه Y را افراز می‌کند. هرگاه به ازای هر $C \in \mathcal{D}$ داشته باشیم $C \cap Y = \emptyset$ و یا $C \subseteq Y$.

قضیه ۲: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار ت-کمینه باشد و $m \in \mathbb{N}$. در این‌صورت $(a)_m$ اگر $k \in \mathbb{N}$ و $X_1, \dots, X_k$ مجموعه‌های تعریف‌پذیری باشند. آن‌گاه تجزیه‌ای از M^m به سلول‌ها موجود است که هرکدام از مجموعه‌های $X_1, \dots, X_k$ را افراز می‌کند.
$(b)_m$ اگر $X \subseteq M^m$ یک مجموعه تعریف‌پذیر غیرخالی و $f: X \to M$ یک تابع تعریف‌پذیر باشد. آن‌گاه تجزیه سلولی $\mathcal{D}$ از M^m موجود است که مجموعه X را افراز می‌کند و به ازای هر $D \in \mathcal{D}$، تابع f روی D پیوسته می‌باشد.
برهان. مراجعه کنید به [۱].
لازم به توضیح است که در اثبات خاصیت تجزیه سلولی از استقرای هم‌زمان استفاده شده است که در روند اثبات، نتیجه مهم دیگری به نام خاصیت تناهی یکنواخت[۱۴] نیز در این نوع ساختارها اثبات شده است.

[13] Monotonicity

[14] Uniformly finite

حقیقت ۱: فرض کنید $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ یک ساختار ت-کمینه، $m \in \mathbb{N}$ و $S \subseteq M^{m+1}$ یک مجموعه تعریف‌پذیر باشد که مجموعه $S_{\bar{a}} = \{b \in M : (\bar{a}, b) \in S\}$ به ازای هر $\bar{a} \in M^m$ متناهی است. دراین‌صورت عدد طبیعی مانند k موجود است که به ازای هر $\bar{a} \in M^m$، $|S_{\bar{a}}| < k$.

سلول‌ها از ویژگی‌های هندسی، توپولوژیکی و جبری خوبی برخوردار می‌باشند. لذا با توجه به خاصیت تجزیه سلولی، مجموعه‌های تعریف‌پذیر در ساختارهای ت-کمینه نیز از خواص مشابه برخوردار می‌باشند که در ادامه چند مورد را به طور مختصر بیان می‌کنیم. لازم به توضیح است که توپولوژی مورد بحث در ساختارهای ت- کمینه توپولوژی ترتیبی (بازه‌ای) است.

تعریف ۱۲: اگر $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ یک ساختار ت-کمینه، $m \in \mathbb{N}$ و $X \subseteq M^m$ یک مجموعه تعریف‌پذیر باشد. آنگاه گوییم مجموعه X به طور تعریف‌پذیر همبند[15] است هرگاه دارای جداساز تعریف‌پذیر نباشد. به عبارت دیگر مجموعه‌های تعریف‌پذیر باز و مجزا از هم U و V موجود نباشند که $X = (U \cap A) \cup (V \cap A)$.

قضیه ۳: سلول‌ها در ساختارهای ت-کمینه به طور تعریف‌پذیر همبند می‌باشند.
برهان. مراجعه کنید به [۱].

نتیجه ۱: فرض کنید $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ یک ساختار ت-کمینه، $m \in \mathbb{N}$ و $X \subseteq M^m$ یک مجموعه تعریف‌پذیر باشد. در این‌صورت مجموعه X برابر اجتماعی متناهی از مولفه‌های همبند تعریف‌پذیر است که در X هم باز و هم بسته می‌باشند.
برهان. مراجعه کنید به [۱].

فشردگی تعریف‌پذیر مفهوم توپولوژیکی مورد بحث دیگری در ساختارهای ت-کمینه است.

تعریف ۱۳: اگر $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ یک ساختار ت-کمینه، $m \in \mathbb{N}$ و $X \subseteq M^m$ یک مجموعه تعریف‌پذیر باشد. آنگاه

الف) یک خم تعریف‌پذیر در X، نگاشت تعریف‌پذیر $\sigma: I \to X$ می‌باشد که در آن $I \subseteq M$ یک بازه باز است.

ب) مجموعه X فشرده تعریف‌پذیر است هرگاه به ازای هر خم تعریف‌پذیر $\sigma: I \to X$، حدهای $\lim_{x \to \inf I^+} \sigma(x)$ و $\lim_{x \to \sup I^-} \sigma(x)$ در X موجود باشند.

قضیه ۴: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار ت-کمینه، $m \in \mathbb{N}$ و $X \subseteq M^m$ یک مجموعه تعریف‌پذیر باشد. در این‌صورت X به طور تعریف‌پذیر فشرده است اگر و تنها اگر X بسته و کران‌دار باشد.
برهان. مراجعه کنید به [۵].

در پایان این بخش برخی از نتایج جبری و نظریه مدلی از ساختارهای ت- کمینه را خواهیم آورد که برای اطلاعات بیشتر در مورد آن‌ها می‌توان به منابع [۱، ۶ و ۷] مراجعه کرد.

- هر بسط ت-کمینه از یک گروه مرتب، آبلی و بخش‌پذیر می‌باشد.
- هر بسط ت-کمینه از یک حلقه مرتب، یک میدان بسته حقیقی می‌باشد.
- هر نظریه ت-کمینه دارای توابع اسکولم تعریف‌پذیر می‌باشد.

[15] Definably connected

۳- مجموعه‌های فشرده تعریف‌پذیر در فضاهای تعریف‌پذیر وابسته به ساختارهای ت-کمینه

در این بخش ابتدا تعاریف و اصطلاحات مورد نیاز در مورد فضاهای تعریف‌پذیر[16] را از [1] خواهیم آورد. سپس به اثبات قضایای پیرامون مجموعه‌های فشرده تعریف‌پذیر در فضاهای تعریف‌پذیر وابسته به ساختارهای ت-کمینه خواهیم پرداخت. در سرتاسراین بخش فرض کنید $\mathcal{M}$ یک بسط ت-کمینه از یک میدان بسته حقیقی باشد.

تعریف ۱۴: خانواده متناهی
$\{(U_i, g_i: U_i \to U'_i)\}_{i\in I}$

را یک اطلس روی مجموعه S گوییم هرگاه

- $S = \bigcup_{i\in I} U_i$،
- برای هر $i \in I$،$U'_i \subseteq M^{m(i)}$ یک مجموعه تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$ است که $m(i) \in \mathbb{N}$،
- برای هر $i, j \in I$ ،$g(U_i \cap U_j)$ یک مجموعه تعریف‌پذیر و باز دU'_i است،
- به ازای هر $i, j \in I$،

$g_{ij} = g_j o g_i^{-1}: g_i(U_i \cap U_j) \to g_j(U_i \cap U_j)$

یک تابع تعریف‌پذیر و پیوسته است.

تبصره ۱: فرض کنید $\{(U_i, g_i: U_i \to U'_i)\}_{i\in I}$ یک اطلس روی مجموعه S باشد.

الف) می‌توان S را یک فضای توپولوژیکی در نظر گرفت. در واقع $X \subseteq S$ یک مجموعه باز است. هرگاه $g_i(U_i \cap X)$ یک زیرمجموعه باز از U'_i باشد به ازای هر $i \in I$. بنابراین $X \subseteq S$ یک مجموعه بسته در S می‌باشد هرگاه به ازای هر $i \in I$، $g_i(U_i \cap X)$ یک زیرمجموعه بسته از U'_i باشد. هم‌چنین $X \subseteq S$ یک مجموعه کران‌دار است هرگاه به ازای هر $i \in I$، $g_i(U_i \cap X)$ یک مجموعه کران‌دار باشد.

ب) می‌توان مفهوم تعریف‌پذیری ساختارهای مرتبه اول را به مجموعه S توسعه داد. مجموعه $X \subseteq S$ را تعریف‌پذیر در S گوییم هرگاه به ازای هر $i \in I$، $g_i(U_i \cap X)$ یک مجموعه تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$ باشد.

تابع $f: X \subseteq S \to M$ تعریف‌پذیر در S است هرگاه مجموعه X در S تعریف‌پذیر باشد و $f_i = f o g_i^{-1}: g_i(X \cap U_i) \to M$ به ازای هر $i \in I$، یک تابع تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$ باشد.

تبصره ۲: دو اطلس $\{(U_i, g_i: U_i \to U'_i)\}_{i\in I}$ و $\{(V_j, h_j: V_j \to V'_j)\}_{j\in J}$ روی مجموعه S هم‌ارز هستند. هرگاه به ازای هر $i \in I$ و $j \in J$، مجموعه‌ها $g_i(U_i \cap V_j)$ و $h_j(U_i \cap V_j)$ زیرمجموعه‌های باز و تعریف‌پذیری از U'_i و V'_j باشند و توابع $h_j o g_i^{-1}$ و $g_i^{-1} o h_j$ توابع تعریف‌پذیر و پیوسته باشند. واضح است که دو اطلس هم‌ارز روی مجموعه S، توپولوژی یکسانی را روی S ایجاد می‌کنند.

تعریف ۱۵: فرض کنید $\{(U_i, g_i: U_i \to U'_i)\}_{i\in I}$ یک اطلس روی مجموعه S باشد. اگر $Do(S)$ نشانگر خانواده زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیر باز از S و $DC(U)$ نشانگر R−جبر توابع تعریف‌پذیر $f: U \to M$ باشد. آنگاه $(S, DC(U):\ U \in Do(S))$ را یک فضای تعریف‌پذیر وابسته به ساختار $\mathcal{M}$ گویند.

تبصره ۲: فرض کنید $(S, DC(U):\ U \in Do(S))$ یک فضای تعریف‌پذیر باشد. دراین‌صورت تمام اطلس‌های تولید کننده فضای فوق هم‌ارز می‌باشند.

---

[16] Definable spaces

تعریف ۱۶: فرض کنید $(S, DC(U)\colon U \in Do(S))$ و $(T, DC(V)\colon V \in Do(T))$ دو فضای تعریف‌پذیر باشند که به ترتیب توسط اطلس‌های
$\{(U_i, g_i\colon U_i \to U'_i)\}_{i\in I}$
$\{(V_j, h_j\colon V_j \to V'_j)\}_{j\in J}$

تولید شده باشند. دراین‌صورت به ازای هر $k = (i, j)$، قرار می‌دهیم:

$$W_k = U_i \times V_j$$
$$W'_k = U'_i \times V'_j$$
$$l_k = g_i \times h_j\colon W_k \to W'_k$$

بنابراین
$\{(W_k, l_k\colon W_k \to W'_k)\}_{k\in I\times J}$

یک اطلس روی $S \times T$ است که آن را تبدیل به یک فضای تعریف‌پذیر می‌کند.

تعریف ۱۷: فرض کنید $(S, DC(U)\colon U \in Do(S))$ و $(T, DC(V)\colon V \in Do(T))$ دو فضای تعریف‌پذیر باشند. دراین‌صورت نگاشت $f\colon S \to T$ تعریف‌پذیر است هرگاه گراف تابع f، $\Gamma(f)$، یک زیرمجموعه تعریف‌پذیر در فضای حاصلضربی $S \times T$ باشد.

تعریف ۱۸: فرض کنید $(S, DC(U)\colon U \in Do(S))$ یک فضای تعریف‌پذیر تولید شده توسط اطلس $\{(U_i, g_i\colon U_i \to U'_i)\}_{i\in I}$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $X \subseteq S$ یک مجموعه تعریف‌پذیر در S باشد. در این‌صورت
$\{(U_i \cap X, g_i\colon U_i \cap X \to g_i(U_i \cap X))\}_{i\in I}$

یک اطلس روی X است که آن را تبدیل به یک فضای تعریف‌پذیر می‌کند.

تعریف ۱۹: فرض کنید $(S, DC(U)\colon U \in Do(S))$ یک فضای تعریف‌پذیر و $X \subseteq S$ یک مجموعه تعریف‌پذیر در S باشد. دراین‌صورت

الف) یک خم تعریف‌پذیر در X، نگاشت تعریف‌پذیر $\sigma\colon I \to X$ می‌باشد که در آن $I \subseteq M$ یک بازه باز می‌باشد.

ب) خم تعریف‌پذیر $\sigma\colon I \to X$ را در X کامل شدنی[17] گوییم هرگاه حدهای $\lim_{x\to \inf I^+} \sigma(x)$ و $\lim_{x\to \sup I^-} \sigma(x)$ در X موجود باشند.

تعریف ۲۰: فرض کنید $(S, DC(U)\colon U \in Do(S))$ یک فضای تعریف‌پذیر و $X \subseteq S$ یک مجموعه تعریف‌پذیر در S باشد. در این‌صورت X به طور تعریف‌پذیر فشرده است هرگاه هر خم تعریف‌پذیر در X، کامل شدنی در X باشد. در ساختارهای ت-کمینه مجموعه‌های فشرده تعریف‌پذیر بسته و کران‌دار می‌باشند. در ادامه نشان می‌دهیم که در فضاهای هاسدورف تعریف‌پذیر نیز چنین مطلبی برقرار است.

قضیه ۵: فرض کنید $(S, DC(U)\colon U \in Do(S))$ یک فضای تعریف‌پذیر و $X \subseteq S$ یک مجموعه به طور تعریف‌پذیر فشرده باشد. در این‌صورت X یک مجموعه کران‌دار است.

برهان. فرض کنید $\{(U_i, g_i\colon U_i \to U'_i)\}_{i\in I}$ اطلس تعریف کننده فضای تعریف‌پذیر
$\left(S, DC(U)\colon U \in Do(S)\right)$

باشد. کافی است که نشان دهیم که به ازای هر $i \in I$، مجموعه $g_i(X \cap U_i) \subseteq M^{n_i}$ یک مجموعه کران‌دار است. برای به دست آوردن تناقض فرض کنید $i \in I$ موجود باشد که $g_i(X \cap U_i)$ یک مجموعه بی‌کران است. بنابراین طبق خاصیت تجزیه سلولی $\mathcal{M}$، سلول بی‌کران $C \subseteq g_i(X \cap U_i)$ موجود است. بنابراین طبق گزاره ۴. ۵ از [۵] خم تعریف‌پذیر $\sigma\colon I \to C$ موجود است که یکی از

[17] Completability

حدهای $\lim_{x\to \inf I^+} \sigma(x)$ یا $\lim_{x\to \sup I^-} \sigma(x)$ در M^{n_i} موجود نیستند. پس $g_i^{-1}o\sigma: I \to X$ یک خم تعریف‌پذیر در X می‌باشد که در X کامل شدنی نیست.

قضیه ۶: فرض کنید $(S, DC(U):\ U \in Do(S))$ یک فضای تعریف‌پذیر و $X \subseteq S$ یک مجموعه بسته و کران‌دار در S باشد. در این‌صورت به طور تعریف‌پذیر فشرده است.

برهان. فرض کنید $\sigma: I \to X$ یک خم تعریف‌پذیر در X باشد. اگر $\{(V_i, h_i: V_i \to V'_i)\}_{i\in I}$ اطلس تعریف کننده فضای تعریف‌پذیر $(S, DC(U):\ U \in Do(S))$ و $\{(I, g: I \to I)\}$ اطلس بدیهی روی بازه I باشد. نشان می دهیم که $\lim_{x\to \inf I^+} \sigma(x)$ در X موجود است. به وضوح به ازای هر $j \in J$،

$$A_j = g \times h_j\left(\left(I \times V_j\right) \cap \Gamma(\sigma)\right) = \left\{\left(x, h_j\left(\sigma(x)\right)\right): x \in I\,, \sigma(x) \in V_j\right\}$$

یک مجموعه تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$ می‌باشد. بنابراین به ازای هر $j \in J$، $I_j = \{x \in I:\ \exists y\ (x, y) \in A_j\}$ نیز یک مجموعه تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$ می‌باشد که $I = \bigcup_j I_j$. اکنون طبق ت-کمینگی $j \in J$ و $c \in I$ موجود است که $(\inf I\,, c) \subseteq I_j$. پس

$$\sigma((\inf I\,, c)) \subseteq X \cap V_j$$

لذا $\sigma: (\inf I\,, c) \to X \cap V_j$ یک تابع تعریف پذیر است. بنابراین $h_j o\sigma$ یک خم تعریف‌پذیر در $h(X \cap V_j)$ می‌باشد. بنابراین طبق قضیه ۲. ۱۱ از [۵] $\lim_{x\to \inf I^+} h_j o\sigma(x)$ در $h(X \cap V_j)$ موجود است. پس $\lim_{x\to \inf I^+} \sigma(x)$ در $X \cap V_j$ موجود است.

باتوجه به نتیجه ۲ . ۸ از [۴] و قضایای ۵ و ۶ نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۲: فرض کنید $(S, DC(U):\ U \in Do(S))$ یک فضای هاسدورف تعریف‌پذیر و $X \subseteq S$ یک مجموعه تعریف‌پذیر باشد. در این‌صورت مجموعه X بسته و کران‌دار است اگر و تنها اگر X به طور تعریف‌پذیر فشرده باشد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، ضمن مرور برخی از خواص ساختارهای ت-کمینه از جمله یکنوایی، تجزیه سلولی و تناهی یکنواخت، برخی ویژگی‌های مهم مجموعه‌ها و توابع تعریف‌پذیر در این نوع ساختارها ارائه شده است. فضای تعریف‌پذیر S وابسته به ساختار ت-کمینه $\mathcal{M}$ به صورت خانواده متناهی از مجموعه‌هایی هستند که لزوماً تعریف‌پذیر نمی‌باشند ولی توسط نگاشتهایی به مجموعه‌های تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$ وابسته می‌شوند. مفهوم فشردگی تعریف‌پذیر در بسطهای ت-کمینه از گروه‌های مرتب معرفی شده است و ثابت شده است که یک مجموعه تعریف‌پذیر به طور تعریف‌پذیر فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کران‌دار باشد. در این مقاله با توجه به وجود محدودیتهایی در فضاهای تعریف‌پذیر ثابت شده است که در فضاهای تعریف‌پذیر هاسدورف نیز نتیجه مشابه برای مجموعه‌های تعریف‌پذیر برقرار است.

فهرست منابع

[1] Van den Dries L., Tame Topology and o-minimal Structures, in: London Mathematical Society Lecture Notes Series, Vol. 248, Cambridge University Press (1998).

[2] Knight J., Pillay A., Stienhorn C., “Definable sets in ordered structures II”, Transactions of the American Mathematical Society, 295 (1986) 593-605.

[3] Marker D., Model Theory: An Introduction, Springer- Verlag New York Inc (2002).

[4] Peterzil Y., Pillay A., “Generic sets in definably compact groups", Fundamenta Mathematicae, 193 (2007) 153- 170.

[5] Peterzil Y., Steinhorn C., “Definable compactness and Definable Subgroups of O-minimal Groups", Journal of the London Mathematical Society, 59 (1999) 769-786.

[6] Pillay A., Stienhorn C., “Definable sets in ordered structures I”, Transactions of the American Mathematical Society, 295 (1986) 565- 592.

[7] Pillay A., Stienhorn C., “Definable sets in ordered structures III”, Transactions of the American Mathematical Society, 309 (1986) 469-476.