

مدل لگ نمایی-وایبل معکوس برای سیستم‌های منسجم با مولفه‌های پواسن‌لیندلی بریده شده در صفر

مرتضی قاسمی چراتی^۱، عزت‌اله بالوئی جامخانه^{۲*}، عین‌اله دیری^۳

(۳،۲،۱) گروه آمار، واحد قائمشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، قائمشهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۹/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۶

چکیده

در این مقاله، دو توزیع جدید، برای یک سیستم منسجم که مجهز به اجزای سری یا موازی است را پیشنهاد می‌نماییم. تعداد مولفه‌های سیستم را متغیر تصادفی پواسن‌لیندلی بریده شده در صفر در نظر می‌گیریم. توزیع لگ نمایی-وایبل معکوس را در نظر گرفته و آن را به عنوان توزیع پایه سیستم منسجم قرار می‌دهیم. علاوه بر معرفی دو توزیع منعطف به نام‌های $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$ با تابع شکست با شکل‌های مختلف، ویژگی‌های آماری و مبحث برآوردهای پارامتری و ناپارامتری به طور جامع مورد مطالعه قرار گرفته است. با توجه به تنوع رفتاری در تابع چگالی احتمال و توابع خرابی، این دو توزیع مبتنی بر سیستم‌های سری یا موازی، می‌توانند برای انواع مختلفی از داده‌ها برازش داده شوند. روش‌های برآورد مختلف پارامترها از طریق روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه می‌شوند و همچنین کاربرد توزیع‌های پیشنهادی با استفاده از دو مجموعه داده واقعی ارزیابی شده است.

واژه‌های کلیدی: لگ نمایی-وایبل معکوس، ساختار موازی، پواسن‌لیندلی بریده‌شده در صفر، حداقل فاصله

کرامر-ون-میسز

۱- مقدمه

سیستم‌های موازی و سری، گونه‌های اساسی از ساختارهای منسجم^۱ هستند و کاربرد بسیاری در زمینه‌های مختلف دارند. یک سیستم با n جزء را در نظر بگیرید، سیستم موازی در صورتی کار می‌کند که حداقل یک جزء آن سیستم فعال باشد، در حالی که یک سیستم سری در صورتی کار می‌کند که همه اجزای سیستم فعال باشد. بسیاری از توزیع‌های ترکیبی به عنوان توزیع طول عمر یک سیستم که دارای ساختارهای سری یا موازی می‌باشد، ارائه شده است. یکی از ویژگی‌های مهم برخی از سیستم‌ها، تعداد تصادفی اجزاء سیستم است. [۱] توزیع طول عمر نمایی پواسن یک سیستم با ساختار سری را معرفی کرد که در آن تعداد اجزای سیستم، یک متغیر تصادفی توزیع پواسن بریده‌شده در صفر (ZTP) با توزیع پایه نمایی است. متعاقباً [۲] توزیع طول عمر نمایی پواسن یک سیستم با ساختار موازی را به دست آورده و تعداد اجزا را از توزیع ZTP در نظر گرفت. [۳] توزیع سری‌های توانی نمایی هندسی با نرخ خطر منعطف را توسط ترکیب توزیع‌های هندسی، سری‌های توانی و نمایی به دست آوردند که در حالت خاص، مدل‌های کلاسیک مختلفی را شامل می‌شود.

[۴] روشی را برای محاسبه توزیع‌های سیستم‌های سری، موازی و سری/موازی بر اساس توابع چگالی احتمال مولفه‌ها، ارائه نمودند و هم‌چنین قابلیت اطمینان و برخی ویژگی‌های مهم سیستم را محاسبه نمودند. به منظور بررسی کاربرد مدل در برازش پدیده‌های طبیعی، سیستم امواج رادیویی یک هواپیمای مسافربری بزرگ را در نظر گرفتند. اخیراً، [۵] توزیع پواسن دوبار نمایی با نرخ‌های شکست نزولی، صعودی و وان‌شکل وارون را تحت سانسور فزاینده نوع دوم به دست آوردند. به منظور مطالعه بیشتر در خصوص سیستم‌ها با ساختار موازی یا سری، [۶]، [۷]، [۸] و [۹] را ببینید.

یکی از جنبه‌های تحقیقات و مطالعات آماری، مدل‌سازی و آنالیز پدیده‌های طول عمر می‌باشد. از این‌رو، توزیع‌های آماری مختلفی به منظور برازش بهتر و دقیق‌تر ارائه و به مرور بسط داده شده‌اند. [۱۰] با بسط توزیع فرشه، موفق به معرفی توزیع فرشه گومپرتز مرکب شدند و ویژگی‌های آماری توزیع و برآورد حداکثر درست‌نمایی پارامترهای توزیع جدید را ارائه نمودند. [۱۱] تعمیمی از خانواده تبدیل‌یافته و نمایی‌شده را معرفی نمود و به عنوان یک زیرمدل خاص از این خانواده، توزیع وایبل تعمیم‌یافته را در نظر گرفته و به بررسی برخی ویژگی‌های آماری آن پرداخت. خانواده مولد کوماراسائومی معکوس تعمیم‌یافته توسط [۱۲] مطالعه شد که می‌تواند برای مدل‌سازی مشاهدات متقارن، چوله به چپ، چوله به راست و [شکل وارون به کار برده شود. [۱۳] خانواده گاما- X را بررسی نمودند و به طور خاص، بر روی مطالعه زیرمدل گاما-وایبل متمرکز شدند. آن‌ها به بررسی کفایت زیرمدل جدید در برازش دو مجموعه داده واقعی پزشکی نیز پرداختند.

[۱۴] توزیع لگاریتمی-نمایی با تابع توزیع تجمعی (CDF) زیر را معرفی نمودند

$$F(x, p, \beta) = 1 - \frac{\ln(1 - (1 - p)e^{-\beta x})}{\ln p}, \quad 0 < p < 1,$$

که دارای نرخ شکست نزولی می‌باشد.

[۱۵] روش تبدیلات لگ-نمایی را گزارش نمودند که خانواده منعطف‌تری نسبت به همتایان خود می‌باشد و شامل یک پارامتر شکل اضافی برای متعادل‌سازی تبدیلات می‌باشد. [۱۶] توزیع لگاریتمی-وایبل نمایی‌شده مکمل را مد نظر قرار داده که بیانگر توابع نرخ شکست نزولی، صعودی و تک‌مدی می‌باشد و به عنوان نمونه، زیرمدل‌های لگاریتمی-نمایی تعمیم‌یافته، لگاریتمی-وایبل مکمل، لگاریتمی نمایی مکمل، لگاریتمی-رایلی نمایی‌شده و

^۱ Coherent

لگاریتمی-رایلی را در نظر گرفتند. [۱۷] روش‌های برآورد در خانواده لگاریتمی-نمایی را مدنظر قرار داده که شامل هر دو رویکرد کلاسیک (حداکثر درست‌نمایی، الگوریتم EM و الگوریتم SEM) و بیزی تحت سانسور هیبرید نوع اول می‌باشد.

بر اساس گستره اطلاعات ما، تاکنون برای مدل‌سازی تعداد تصادفی اجزای سیستم، از توزیع شمارشی پواسن‌لندلی بریده شده در صفر (ZTPL)، استفاده نشده است. هم‌چنین، توزیع جدید لگ-نمایی وایبل معکوس (LEIW) نیز تاکنون به عنوان توزیع پایه در هیچ تحقیقی استفاده نشده است. در این مقاله، توزیع لگ-نمایی وایبل معکوس را به عنوان یک توزیع پایه برای سیستم‌های منسجم با مولفه‌های سری یا موازی و هم‌چنین تعداد نامعلوم اجزای سیستم را بر اساس توزیع ZTPL در نظر می‌گیریم. بنابراین، دو توزیع ترکیبی جدید را معرفی می‌نماییم که دارای نرخ شکست انعطاف‌پذیری می‌باشند. با انتخاب ترکیب‌های خاصی از پارامترها، دو توزیع جدید چندین مدل فرعی را نیز پوشش می‌دهند و برازش مناسبی را برای مجموعه داده‌های طول عمر فراهم می‌کنند. انگیزه اصلی معرفی توزیع‌های جدید این است که این توزیع‌ها می‌توانند زمان خرابی یک سیستم با اجزای موازی یا سری را توصیف کنند. در توزیع‌های مدنظر، خانواده LET را با توزیع پایه وایبل معکوس تعدیل می‌کنیم و توزیع‌های پواسن‌لندلی و LEIW را در ساختارهای سری یا موازی ترکیب می‌کنیم. توزیع‌های جدید، با انتخاب‌های خاص پارامترها، شامل بسیاری از مدل‌های فرعی هستند. جنبه دیگر مقاله مربوط به روش‌های مختلف برآوردیابی، شامل رویکردهای پارامتری و ناپارامتری است. توزیع‌های جدید در مدل‌سازی داده‌ها با نرخ شکست یکنوا و غیر یکنوا قابل استفاده هستند.

ساختار کلی مقاله به شرح زیر می‌باشد. در بخش ۲، توزیع لگ-نمایی وایبل معکوس را به عنوان توزیع پایه یک سیستم سری یا موازی به کار برده و تعداد مولفه‌های سیستم از توزیع ZTPL در نظر گرفته می‌شود. تابع چگالی احتمال (PDF)، تابع توزیع تجمعی، تابع بقا و نرخ شکست دو توزیع پیشنهادی به همراه برخی از ویژگی‌های آماری توزیع‌ها نیز محاسبه می‌شود. در بخش ۳، روش‌های برآورد حداکثر درست‌نمایی، حداقل مربعات، حداقل فاصله کرامر-ون-میسز و حداکثر فاصله حاصلضربی برای پارامترهای دو مدل ارائه شده است. در بخش ۴، عملکرد روش‌های برآورد توسط شبیه‌سازی مونت کارلو بر اساس مقادیر مختلف پارامترها و حجم نمونه ارزیابی می‌شود. در بخش ۵، با دو مجموعه داده واقعی، کفایت مدل‌های جدید در برازش مجموعه‌های داده واقعی نشان داده شده است.

۲- توزیع لگ-نمایی-وایبل معکوس برای سیستم‌های موازی و سری

در این بخش، توزیع پایه لگ-نمایی-وایبل معکوس را برای یک سیستم منسجم و تعداد مولفه‌های سیستم منسجم را از توزیع پواسن‌لندلی بریده‌شده در صفر در نظر می‌گیریم. توابع PDF، CDF، بقا و نرخ شکست دو توزیع مدنظر و برخی از ویژگی‌های آماری توزیع‌ها را نیز ارائه می‌نماییم. [۱۵] روش LET را به صورت زیر معرفی نمودند

$$F(x, \xi, \lambda) = \frac{\ln(\tau - e^{-\theta G(x, \xi)})}{\ln(\tau - e^{-\theta})}, \quad \theta > 0,$$

که در آن $G(x, \xi)$ توزیع پایه و ξ بردار پارامترهای توزیع پایه می‌باشد. توزیع لگ-نمایی-وایبل معکوس را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$F(x, \beta, \lambda, \theta) = \frac{\ln(\tau - e^{-\theta G(x, \beta, \lambda)})}{\ln(\tau - e^{-\theta})} = \frac{\ln\left(\tau - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^\beta}}\right)}{\ln(\tau - e^{-\theta})}, \quad \beta, \lambda, \theta > 0, x > 0, \quad (1)$$

که در آن

$$G(x, \beta, \lambda) = e^{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^\beta}, \quad g(x, \beta, \lambda) = \frac{\beta \lambda^\beta}{x^{\beta+1}} e^{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^\beta},$$

می‌باشد. تابع PDF توزیع LEIW به صورت زیر به دست می‌آید

$$f(x, \beta, \lambda, \theta) = \frac{\theta g(x, \beta, \lambda) e^{-\theta G(x, \beta, \lambda)}}{\ln(r - e^{-\theta})(r - e^{-\theta G(x, \beta, \lambda)})} = \frac{\theta \beta \lambda^\beta e^{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^\beta} e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^\beta}}}{\ln(r - e^{-\theta}) \left(r - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^\beta}} \right)}. \quad (2)$$

با توجه به توزیع پایه، توزیع LEIW یک پارامتر اضافی θ را برای تولید یک نسخه توسعه‌یافته از مدل پایه ارائه می‌کند که منجر به بهبود توزیع‌های کلاسیک می‌شود و در مقایسه با مدل پایه، کشیدگی و چولگی منعطف‌تری دارد. توزیع LEIW برازش بهتری نسبت به سایر توزیع‌های تولید شده با تعداد پارامترهای یکسان یا بیشتر ارائه می‌نماید.

توزیع پواسن‌لیندلی توسط [۱۸] برای مدل‌سازی داده‌های شمارشی و توزیع پواسن‌لیندلی بریده‌شده در صفر توسط [۱۹] معرفی شده است.

تابع جرم احتمال توزیع ZTPL به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$f_1(v, \eta) = P(V = v, \eta) = \frac{\eta^v (v + \eta + 1)}{(1 + \eta)^v (1 + \eta^v + v\eta)}, \quad v = 1, 2, \dots, \quad \eta > 0. \quad (3)$$

توزیع ZTPL تک‌مدی، لگ-مقعر می‌باشد و دارای نرخ شکست صعودی می‌باشد [۱۹].

در ادامه، توزیع پواسن‌لیندلی-LEIW را با استفاده از ترکیب توزیع‌های پواسن‌لیندلی و LEIW، بر اساس شکست‌های سیستم سری یا موازی، به دست می‌آوریم.

فرض کنید سیستم بر اساس ساختار موازی یا سری طراحی شده است و v تعداد زیرسیستم‌های موازی (سری) را نشان می‌دهد که به طور مستقل در یک زمان معین کار می‌کنند، که در آن V یک متغیر تصادفی از توزیع پواسن‌لیندلی و زمان‌های خرابی $X_1, \dots, X_i, i = 1, \dots, V$ متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع یکسان (iid) از توزیع پیوسته طول عمر LEIW می‌باشند.

در ابتدا، فرض کنید که مولفه‌های هر سیستم به صورت موازی با هم مرتبط هستند، به طوری که تنها با از کار افتادن یک واحد، کل سیستم از کار می‌افتد. بنابراین، طول عمر هر سیستم حداقل طول عمر V جزء آن سیستم، خواهد بود. Z_1 را زمان خرابی سیستم در نظر بگیرید، آن‌گاه

$$Z_1 = \min_{1 \leq i \leq V} X_i.$$

اکنون فرض کنید که اجزاء در سیستم به صورت موازی به هم مرتبط هستند. بنابراین سیستم، تنها زمانی از کار می‌افتد که تمام زیرسیستم‌های موجود از کار بیفتند. لذا طول عمر سیستم، برابر با حداکثر طول عمر V جزء آن سیستم خواهد بود. Z_2 را زمان خرابی سیستم در نظر بگیرید، آن‌گاه

$$Z_2 = \max_{1 \leq i \leq V} X_i.$$

توزیع متغیرهای تصادفی Z_1 و Z_2 در قضیه زیر محاسبه شده است.

قضیه ۱. فرض کنید $X_i, i = 1, \dots, V$ متغیرهای تصادفی iid با تابع چگالی (۲) و متغیر تصادفی V دارای توزیع ZTPL با تابع جرم احتمال (۳) باشد. بردار پارامترها را به صورت $\delta = (\beta, \lambda, \theta, \eta)$ و $\gamma = (\beta, \lambda, \theta)$ در نظر بگیرید

(الف) توزیع متغیر تصادفی Z_1 با نماد PL-LEIW₁ نشان داده می‌شود و توابع PDF و CDF آن به ترتیب به صورت زیر می‌باشد

$$q_1(z, \delta) = \left(\frac{\eta^r (1 + \eta)^r \theta \beta \lambda^\beta \ln(r - e^{-\theta})}{(1 + \eta^r + r\eta)} \right) \frac{e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta} e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta} (\eta + r) \ln(r - e^{-\theta}) + \ln(r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta})}{z^{\beta+1} (r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta}) (\ln(r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta}) + \eta \ln(r - e^{-\theta}))^r},$$

$$Q_1(z, \delta) = \frac{(1 + \eta)^r \ln(r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta}) \eta (\eta + r) \ln(r - e^{-\theta}) + (\eta + 1) \ln(r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta})}{(\ln(r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta}) + \eta \ln(r - e^{-\theta}))^r (1 + \eta^r + r\eta)}.$$

(ب) توزیع متغیر تصادفی Z_r با نماد PL-LEIW₂ نشان داده می‌شود و توابع PDF و CDF آن به ترتیب به صورت زیر می‌باشد.

$$q_r(z, \delta) = \left(\frac{\eta^r (1 + \eta)^r \theta \beta \lambda^\beta \ln(r - e^{-\theta})}{(1 + \eta^r + r\eta)} \right) \frac{e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta} e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta} (\eta + r) \ln(r - e^{-\theta}) - \ln(r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta})}{z^{\beta+1} (r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta}) ((\eta + 1) \ln(r - e^{-\theta}) - \ln(r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta}))^r},$$

9

$$Q_r(z, \delta) = \frac{\eta^r \ln(r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta}) (\eta^r + r\eta - r) \ln(r - e^{-\theta}) - (\eta + r) \ln(r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta})}{((\eta + 1) \ln(r - e^{-\theta}) - \ln(r - e^{-\theta} e^{-(\frac{\lambda}{z})^\beta}))^r (1 + \eta^r + r\eta)}$$

اثبات. (الف) بسط سری‌های $\sum_{i=1}^{\infty} i^r r^{i-1} = \frac{1+r}{(1-r)^{r+1}}$ و $\sum_{i=1}^{\infty} i r^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ که در آن $|r| < 1$ می‌باشد. برای $Z_1 = \min_{1 \leq i \leq V} X_i$ داریم

$$q_1(z, \delta) = \sum_{v=1}^{\infty} q_1(z|v, \gamma) f_1(v, \eta)$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} v [1 - F(z, \gamma)]^{v-1} f(z, \gamma) f_1(v, \eta),$$

$$= \frac{\eta^r f(z, \gamma)}{(1 + \eta)(1 + \eta^r + r\eta)} \sum_{v=1}^{\infty} v \left(\frac{1 - F(z, \gamma)}{1 + \eta} \right)^{v-1} (v + \eta + r),$$

$$= \frac{\eta^r (1 + \eta)^r f(z, \gamma) (F(z, \gamma) + \eta + r)}{(F(z, \gamma) + \eta)^r (1 + \eta^r + r\eta)}.$$

با جایگذاری (۲) و (۱)، تابع PDF متغیر تصادفی Z_1 به دست می‌آید.

تابع CDF متغیر تصادفی Z_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$Q_1(z, \delta) = \int_0^z q_1(y, \delta) dy = \frac{\eta^r(1 + \eta)^r}{(1 + \eta^r + r\eta)} \int_0^z \frac{f(y, \gamma)(F(y, \gamma) + \eta + r)}{(F(y, \gamma) + \eta)^r} dy.$$

اکنون با در نظر گرفتن تغییر متغیر $u = F(y, \gamma)$ و $du = f(y, \gamma)dy$ داریم

$$Q_1(z, \delta) = \frac{(1 + \eta)^r F(z, \gamma)(\eta + r)F(z, \gamma) + \eta(\eta + r)}{(F(z, \gamma) + \eta)^r(1 + \eta^r + r\eta)},$$

و با جایگذاری (۱)، اثبات کامل می‌شود.

(ب) به طور مشابه برای $Z_r = \max_{1 \leq i \leq V} X_i$ داریم

$$\begin{aligned} q_r(z, \delta) &= \sum_{v=1}^{\infty} q_r(z|v, \gamma) f_1(v, \eta) = \sum_{v=1}^{\infty} v[F(z, \gamma)]^{v-1} f(z, \gamma) f_1(v) \\ &= \frac{\eta^r(1 + \eta)^r f(z, \gamma)(\eta + r - F(z, \gamma))}{(1 + \eta - F(z, \gamma))^r(1 + \eta^r + r\eta)}. \end{aligned}$$

با جایگذاری (۲) و (۱)، تابع PDF متغیر تصادفی Z_r به دست می‌آید.

به طور مشابه، تابع CDF متغیر تصادفی Z_r به صورت زیر ارائه می‌شود

$$Q_r(z, \delta) = \frac{\eta^r F(z, \gamma)(\eta^r + r\eta + r - F(z, \gamma)(\eta + r))}{(1 + \eta^r + r\eta)(1 + \eta - F(z, \gamma))^r},$$

و با جایگذاری (۱)، اثبات کامل می‌گردد.

نکته ۱. اگر $\eta \rightarrow \infty$ ، آنگاه توزیع‌های $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$ به توزیع LEIW تبدیل می‌شود که توسط [۱۵] معرفی شده است.

اثبات.

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} Q_1(z, \delta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{(1 + \eta)^r F(z, \gamma)((\eta + r)F(z, \gamma) + \eta(\eta + r))}{(1 + \eta^r + r\eta)(F(z, \gamma) + \eta)^r},$$

که معادل است با

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} Q_1(z, \delta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\eta^r F(z, \gamma)}{\eta^r} = F(z, \gamma),$$

و برای $PL-LEIW_2$ داریم

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} Q_r(z, \delta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\eta^r F(z, \gamma)(\eta^r + r\eta + r - F(z, \gamma)(\eta + r))}{(1 + \eta^r + r\eta)(1 + \eta - F(z, \gamma))^r} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\eta^r F(z, \gamma)}{\eta^r} = F(z, \gamma).$$

نکته ۲. اگر $\eta \rightarrow \infty$ و $\theta \rightarrow 0$ ، آنگاه توزیع‌های $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$ به توزیع وایبل معکوس

دوپارامتری با تابع توزیع تجمعی $G(x, \beta, \lambda) = e^{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^\beta}$ تبدیل می‌شود.

نکته ۳. اگر $\eta \rightarrow \infty$ و $\theta \rightarrow 0$ و $\beta = 1$ ، آنگاه توزیع‌های $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$ ، توزیع وایبل معکوس

تک‌پارامتری با پارامتر λ را نتیجه می‌دهد.

توابع بقا و نرخ شکست توزیع $PL-LEIW_1$ به ترتیب به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\bar{Q}_1(z, \delta) = \eta^r \frac{(\eta + 1)^r}{(F(z, \gamma) + \eta)^r (1 + \eta^r + r\eta)} + \frac{(\eta + F(z, \gamma))(1 - F(z, \gamma)(\eta + r))}{(F(z, \gamma) + \eta)^r (1 + \eta^r + r\eta)},$$

$$h_1(z, \delta) = \frac{(1 + \eta)^r f(z, \gamma)(F(z, \gamma) + \eta + r)}{(F(z, \gamma) + \eta)((F(z, \gamma) + \eta)[1 - F(z, \gamma)(r + \eta)] + (\eta + 1)^r)},$$

و توابع بقا و نرخ شکست توزیع PL-LEIW₂ به ترتیب به صورت زیر می‌باشد

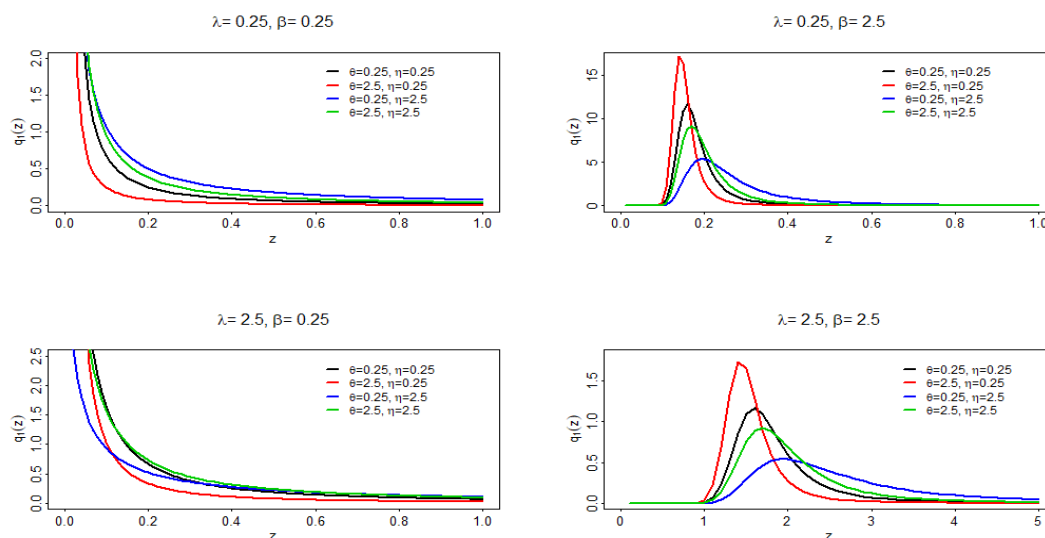
$$\bar{Q}_r(z, \delta) = \frac{(\eta + 1)^r}{(1 + \eta^r + r\eta)(1 + \eta - F(z, \gamma))^r + \eta^r + r\eta} [F(z, \gamma) \{F(z, \gamma)(\eta + 1) - \eta^r - r\eta - r\} + 1]$$

$$h_r(z, \delta) = \frac{\eta^r f(z, \gamma)(\eta + r - F(z, \gamma))}{(1 + \eta - F(z, \gamma))} \cdot \frac{1}{A}$$

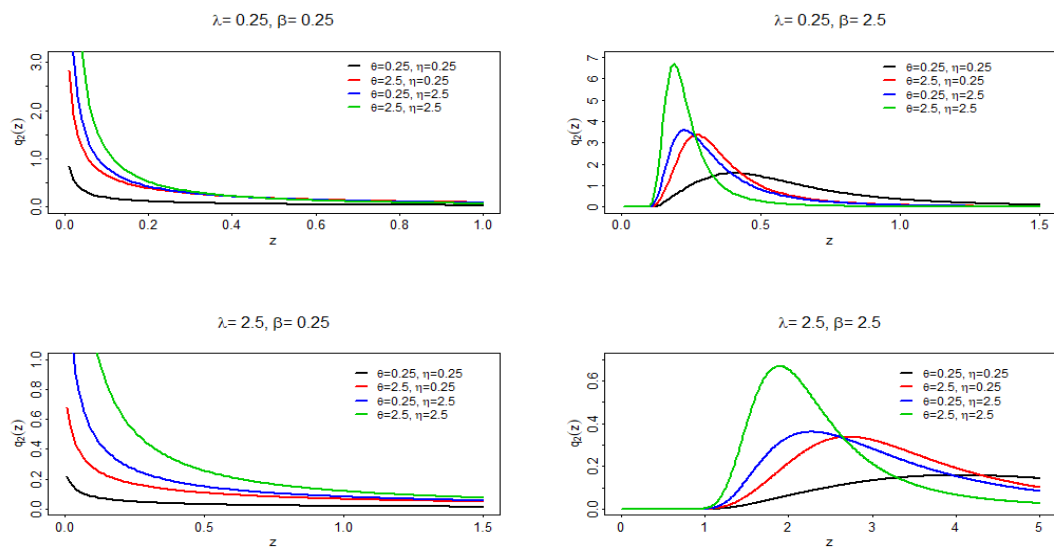
که در آن

$$A = F^r(z, \gamma)(\eta + 1) - F(z, \gamma)(\eta^r + r\eta + r) + 1 + \eta^r + r\eta.$$

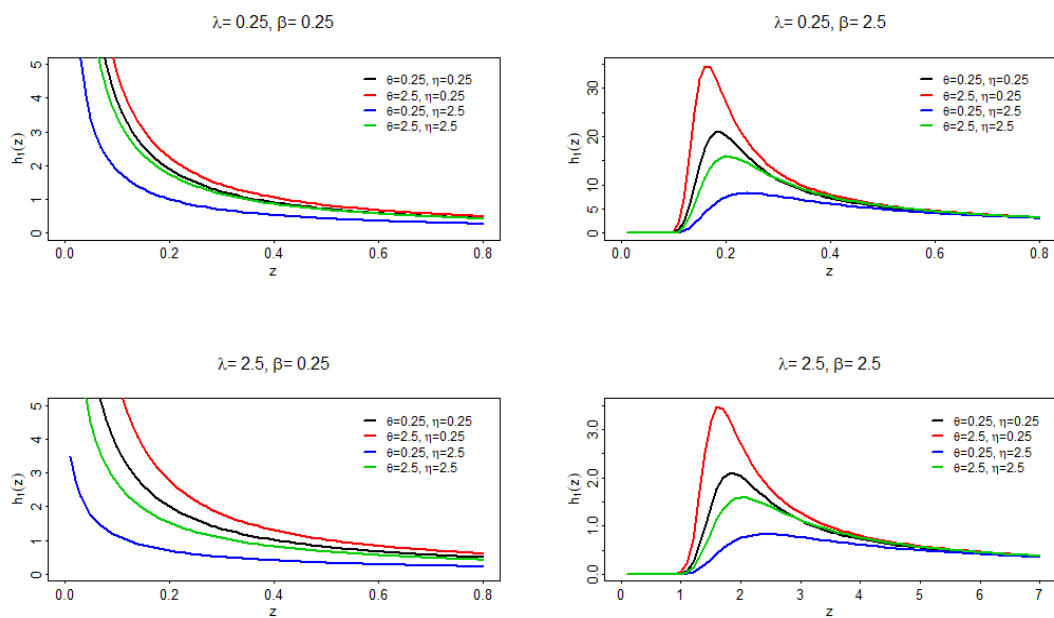
نمودارهای PDF و نرخ شکست برای ترکیب‌های مختلف پارامترهای توزیع‌های PL-LEIW₁ و PL-LEIW₂ به ترتیب در شکل‌های ۱ تا ۴ نشان داده شده است. توابع PDF توزیع‌های پیشنهادی حالت‌های مختلفی را پوشش می‌دهد که توانایی توزیع‌های PL-LEIW₁ و PL-LEIW₂ در مدل‌سازی انواع مختلف پدیده‌های طول عمر را نشان می‌دهد. تابع نرخ شکست توزیع‌های جدید PL-LEIW₁ و PL-LEIW₂ به صورت کاهشی، وان‌شکل و وارون می‌باشد و همچنین چوله به راست است.



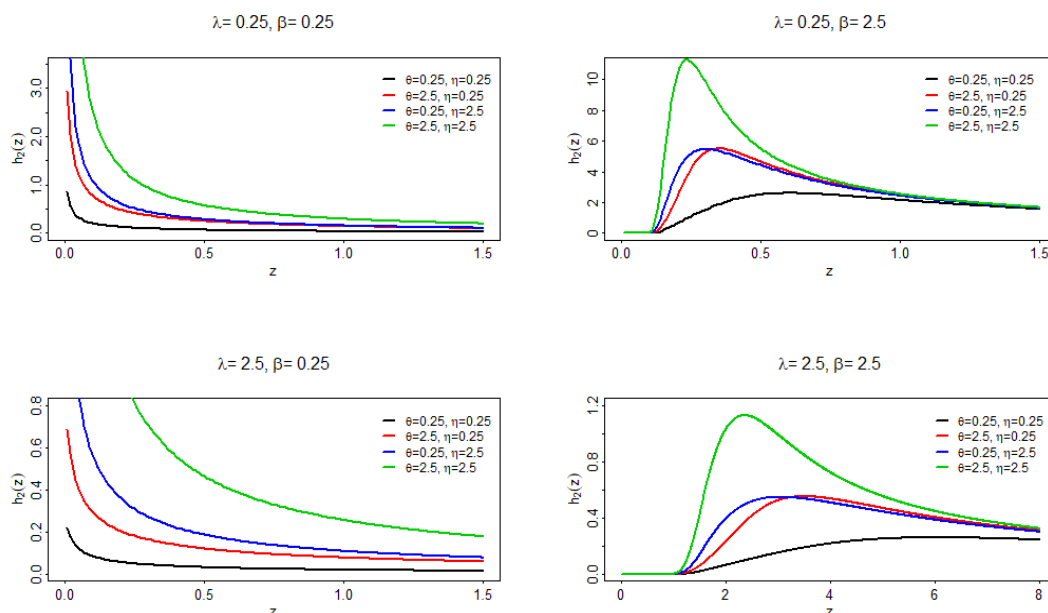
شکل ۱: نمودار PDF توزیع PL-LEIW₁ برای ترکیب‌های مختلف از پارامترها.



شکل ۲: نمودار PDF توزیع $PL-LEIW_2$ برای ترکیب‌های مختلف از پارامترها.



شکل ۳: نمودار نرخ شکست توزیع $PL-LEIW_1$ برای ترکیب‌های مختلف از پارامترها.



شکل ۴: نمودار نرخ شکست توزیع $PL-LEIW_2$ برای ترکیب‌های مختلف از پارامترها.

۱,۲ نمایش آمیخته تابع PDF توزیع‌های $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$

این بخش به معرفی نمایش آمیخته تابع PDF توزیع‌های $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$ می‌پردازد که نقش مهمی در محاسبه برخی ویژگی‌های آماری توزیع‌ها دارند. در ادامه تابع PDF توزیع‌های $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$ را به شکل کاربردی‌تری به صورت نمایش آمیخته که در محاسبه گشتاورهای r -ام توزیع‌ها کاربرد دارد را به دست می‌آوریم.

نماد $F_1^*(x, \gamma) = F^{k+1}(x, \gamma)$ را در نظر بگیرید

$$f_1^*(x, \gamma) = \frac{\partial F_1^*(x, \gamma)}{\partial x} = (k+1)F^k(x, \gamma)f(x, \gamma),$$

و بر اساس بسط دوجمله‌ای منفی، نمایش آمیخته PDF توزیع $PL-LEIW_1$ برای $F(x, \beta, \lambda, \theta) < \eta$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$q_1(z, \delta) = \frac{\eta^r(1+\eta)^r f(z, \gamma)}{(1+\eta^r + r\eta)} \left[\frac{1}{(F(z, \gamma) + \eta)^r} + \frac{r}{(F(z, \gamma) + \eta)^{r+1}} \right], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\eta^r(1+\eta)^r f(z, \gamma)}{(1+\eta^r + r\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)}{\eta^r} \left(\frac{F(z, \gamma)}{\eta} \right)^k (\eta + r(k+r)), \\ &= \frac{(1+\eta)^r}{\eta(1+\eta^r + r\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} (\eta + r(k+r)) f_1^*(z, \gamma). \end{aligned}$$

نماد زیر را در نظر بگیرید

$$F_r^*(x, \gamma) = 1 - (1 - F(x, \gamma))^{k+1},$$

بنابراین داریم

$$f_{\gamma}^*(x, \gamma) = \frac{\partial F_{\gamma}^*(x, \gamma)}{\partial x} = (k+1)(1-F(x, \gamma))^k f(x, \gamma),$$

و به طور مشابه برای توزیع PL-LEIW₂ تحت شرط $1-F(x, \gamma) < \eta$ داریم

$$q_{\gamma}(z, \delta) = \frac{\eta^{\gamma}(1+\eta)^{\gamma} f(z, \gamma)}{(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \left[\frac{1}{(\eta+1-F(z, \gamma))^{\gamma}} + \frac{\gamma}{(\eta+1-F(z, \gamma))^{\gamma+1}} \right], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\eta^{\gamma}(1+\eta)^{\gamma} f(z, \gamma)}{(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{\eta^{\gamma}} \left(\frac{1-F(z, \gamma)}{\eta} \right)^k (\eta + \gamma(k+\gamma)), \\ &= \frac{(1+\eta)^{\gamma}}{\eta(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} (\eta + \gamma(k+\gamma)) f_{\gamma}^*(z, \gamma). \end{aligned}$$

با توجه به (۴) و (۵)، تابع PDF توزیع‌های PL-LEIW₁ و PL-LEIW₂ به صورت حاصل ضرب پارامترها و مجموع سری توانی حاصلضربی به صورت $f_1^*(z, \gamma)$ و $f_2^*(z, \gamma)$ با وزن‌های $(\eta + \gamma(k+\gamma)) \frac{(-1)^k}{\eta^k}$ بیان می‌شود.

۲.۲ برخی ویژگی‌های آماری توزیع‌های PL-LEIW₁ و PL-LEIW₂

در این بخش، برخی ویژگی‌های توزیع‌های PL-LEIW₁ و PL-LEIW₂ محاسبه و الگوریتم تولید نمونه برای مقاصد شبیه‌سازی ارائه شده است. گشتاورهای غیرمرکزی، تابع مولد گشتاور و توابع چنک توزیع‌های PL-LEIW₁ و PL-LEIW₂ در گزاره بعد به دست آمده است.

گزاره ۱. برای $r = 1, 2, \dots$ ، گشتاورهای غیرمرکزی r -ام

(الف) در توزیع PL-LEIW₁ به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\mu'_r = \frac{(1+\eta)^{\gamma}}{\eta(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^N \frac{\gamma(-1)^k (\eta+\gamma(k+\gamma)) \omega_l}{\eta^k (1-\gamma_l)^{\gamma}} \left(\frac{1+\gamma_l}{1-\gamma_l} \right)^r f_1^* \left(\frac{1+\gamma_l}{1-\gamma_l}, \gamma \right). \quad (6)$$

(ب) در توزیع PL-LEIW₂ به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\mu'_r = \frac{(1+\eta)^{\gamma}}{\eta(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^N \frac{\gamma(-1)^k (\eta+\gamma(k+\gamma)) \omega_l}{\eta^k (1-\gamma_l)^{\gamma}} \left(\frac{1+\gamma_l}{1-\gamma_l} \right)^r f_2^* \left(\frac{1+\gamma_l}{1-\gamma_l}, \gamma \right), \quad (7)$$

که در آن γ_l و ω_l بیانگر صفرها و اعداد کریستوفل متناظر با فرمول مربع لژاندر-گاوس را در بازه $(-1, 1)$ نشان می‌دهند [۵] را ببینید.

اثبات. بر اساس نمایش آمیخته توزیع PL-LEIW₁، گشتاور غیرمرکزی r -ام به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mu'_r &= E(Z_1^r) = \frac{(1+\eta)^{\gamma}}{\eta(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} (\eta + \gamma(k+\gamma)) \int_{-1}^1 z^r f_1^*(z, \gamma) dz, \\ &= \frac{(1+\eta)^{\gamma}}{\eta(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} (\eta + \gamma(k+\gamma)) \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{(1-y)^{\gamma}} \left(\frac{1+y}{1-y} \right)^r f_1^* \left(\frac{1+y}{1-y}, \gamma \right) dy, \end{aligned}$$

و آخرین انتگرال توسط فرمول مربع لژاندر-گاوس به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$\sum_{l=0}^N \omega_l \frac{\gamma}{(1-y_l)^\gamma} \left(\frac{1+y_l}{1-y_l}\right)^{\gamma} f_1^*\left(\frac{1+y_l}{1-y_l}, \gamma\right),$$

که در آن $L'_{N+1}(y_l) = \frac{dL_{N+1}(y_l)}{dy}$ ، $\omega_l = \frac{\gamma}{(1-y_l)^{\gamma}(L'_{N+1}(y_l))^{\gamma}}$ و $y = y_l$ در $L_N(\cdot)$ چندجمله‌ای لژاندر از درجه N می‌باشد.

(ب) اثبات قسمت (ب) مشابه با قسمت (الف) به راحتی نتیجه می‌شود.

گزاره ۲. تابع مولد گشتاور (MGF)

الف) توزیع $PL\text{-}LEIW_1$ به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$M_{Z_1}(t) = \frac{(1+\eta)^{\gamma}}{\eta(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^N \frac{\gamma(-1)^k t^j \omega_l (\eta + \gamma(k+\gamma))}{j! \eta^k (1-y_l)^{\gamma}} \left(\frac{1+y_l}{1-y_l}\right)^j f_1^*\left(\frac{1+y_l}{1-y_l}, \gamma\right),$$

(ب) توزیع $PL\text{-}LEIW_2$ به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\mu'_r = \frac{(1+\eta)^{\gamma}}{\eta(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^N \frac{\gamma(-1)^k t^j \omega_l (\eta + \gamma(k+\gamma))}{j! \eta^k (1-y_l)^{\gamma}} \left(\frac{1+y_l}{1-y_l}\right)^j f_r^*\left(\frac{1+y_l}{1-y_l}, \gamma\right).$$

اثبات. بر اساس نمایش آمیخته توزیع $PL\text{-}LEIW_1$ و با استفاده از بسط $e^{tx} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l x^l}{l!}$ می‌توان تابع MGF توزیع $PL\text{-}LEIW_1$ را به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} M_{Z_1}(t) &= E(Z_1^r) = \frac{(1+\eta)^{\gamma}}{\eta(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\eta^k} (\eta + \gamma(k+\gamma)) \int_0^{\infty} e^{tz} f_1^*(z, \gamma) dz, \\ &= \frac{(1+\eta)^{\gamma}}{\eta(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^j}{j! \eta^k} (\eta + \gamma(k+\gamma)) \int_0^{\infty} z^j f_1^*(z, \gamma) dz, \\ &= \frac{(1+\eta)^{\gamma}}{\eta(1+\eta^{\gamma}+\gamma\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^N \frac{\gamma(-1)^k t^j \omega_l (\eta + \gamma(k+\gamma))}{j! \eta^k (1-y_l)^{\gamma}} \left(\frac{1+y_l}{1-y_l}\right)^j f_1^*\left(\frac{1+y_l}{1-y_l}, \gamma\right). \end{aligned}$$

(ب) اثبات قسمت (ب) مشابه با قسمت (الف) می‌باشد.

گزاره ۳. الگوریتم تولید نمونه تصادفی از توزیع‌های $PL\text{-}LEIW_1$ و $PL\text{-}LEIW_2$ مرحله به مرحله به صورت زیر فهرست شده است.

۱. نمونه تصادفی گسسته v را از توزیع $ZTPL$ با پارامتر η به صورت زیر تولید کنید ([۱۹] را ببینید)

$$\diamond \quad \text{نمونه تصادفی } u \text{ را از توزیع یکنواخت در بازه } (0, 1) \text{ تولید کنید و قرار دهید } p = \frac{\eta(\eta+\gamma)}{\eta^{\gamma}+\gamma\eta+1}$$

$\diamond$ اگر $u \leq p$ ، آن‌گاه نمونه تصادفی α را از توزیع نمایی با پارامتر η و در غیر این‌صورت از توزیع گاما با پارامترهای (γ, η) تولید کنید.

$\diamond$ نمونه تصادفی ζ را از توزیع پواسن با پارامتر α تولید کنید و قرار دهید $v = 1 + \zeta$.

۲. نمونه X_i را از توزیع LEIW برای $i = 1, 2, \dots, v$ با استفاده از روش نمونه‌گیری تبدیل معکوس به صورت زیر تولید کنید

❖ نمونه $u_i, i = 1, 2, \dots, v$ را از توزیع یکنواخت در بازه $(0, 1)$ تولید کنید

❖ قرار دهید

$$x_i = \lambda(-\ln[-\frac{1}{\theta} \ln(r - (r - e^{-\theta})^{u_i}))])^{-\frac{1}{\beta}}$$

❖ قرار دهید $z_v = \max_{1 \leq i \leq v} x_i$ و $z_1 = \min_{1 \leq i \leq v} x_i$

۳- رویکردهای مختلف برآوردیابی

در این بخش، به بحث جامع پیرامون چندین رویکرد برآورد پارامتری و ناپارامتری می‌پردازیم. روش‌های برآورد شامل حداکثر درستنمایی، حداقل مربعات، حداقل فاصله کرامر-ون-میسز و حداکثر فاصله حاصل ضربی می‌باشد. عملکرد روش‌های برآوردیابی توسط شبیه‌سازی مونت کارلو، ارزیابی و مقایسه می‌شوند.

۱.۳ برآورد حداکثر درستنمایی

برآوردگرهای حداکثر درستنمایی (ML) پارامترهای مدل توسط حداکثرسازی تابع لگاریتم درستنمایی به دست می‌آید. تابع لگاریتم درستنمایی توزیع $PL\text{-}LEIW_1$ به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\mathcal{L}_1(\delta, z_1, \dots, z_n) = r \ln(\eta) + r \ln(1 + \eta) + n \ln(\theta) + n \ln(\beta) \quad (8)$$

$$+ n\beta \ln(\lambda) - n \ln(1 + \eta^r + r\eta) + n \ln(\ln(r - e^{-\theta}))$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta - \theta \sum_{i=1}^n e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta} - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \ln(z_i) \right) - \sum_{i=1}^n \ln(r - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta}}) \\ & + \sum_{i=1}^n \ln[(\eta + r) \ln(r - e^{-\theta}) + \ln(r - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta}})] \\ & - r \sum_{i=1}^n \ln \left[\ln \left(r - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta}} \right) \right] + \eta \ln(r - e^{-\theta}). \end{aligned}$$

تابع امتیاز بر حسب هر یک از پارامترهای نامعلوم η, λ, θ و β به صورت زیر محاسبه شده است

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_1(\delta, z_1, \dots, z_n)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + n \ln(\lambda) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta \ln \left(\frac{\lambda}{z_i} \right) + r \theta \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta \ln \left(\frac{\lambda}{z_i} \right) e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta}}{r - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta}}} \\ & - \sum_{i=1}^n \ln(z_i) - \theta \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta \ln \left(\frac{\lambda}{z_i} \right) e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta}}{(r \theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta} - 1)((\eta + r) \ln(r - e^{-\theta}) + \ln(r - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta}}))} \\ & + r \theta \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta \ln \left(\frac{\lambda}{z_i} \right) e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta}}{(r \theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta} - 1)(\eta \ln(r - e^{-\theta}) + \ln(r - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta}}))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_1(\delta, z_1, \dots, z_n)}{\partial \lambda} &= \frac{n\beta}{\lambda} - \beta \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^{\beta-1}}{z_i^\beta} + \theta \beta \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^{\beta-1} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{z_i^\beta} + \frac{\beta \theta}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{\tau e^{\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}} - 1} \\ &\quad - \frac{\beta \theta}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{(\tau e^{\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}} - 1)((\eta + \tau) \ln(\tau - e^{-\theta}) + \ln(\tau - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}))} \\ &\quad + \tau \frac{\beta \theta}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{(\tau e^{\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}} - 1)(\eta \ln(\tau - e^{-\theta}) + \ln(\tau - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_1(\delta, z_1, \dots, z_n)}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} + \frac{n}{(\tau e^\theta - 1) \ln(\tau - e^{-\theta})} - \sum_{i=1}^n e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta} - \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{\tau e^{\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}} - 1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{(\eta + \tau)(\tau e^{\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}} - 1) + e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}(\tau e^\theta - 1)}{(\tau e^\theta - 1)(\tau e^{\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}} - 1)((\eta + \tau) \ln(\tau - e^{-\theta}) + \ln(\tau - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}))} \\ &\quad - \tau \sum_{i=1}^n \frac{\eta \left(\tau e^{\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}} - 1 \right) + e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}(\tau e^\theta - 1)}{(\tau e^\theta - 1) \left(\tau e^{\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}} - 1 \right) \left(\eta \ln(\tau - e^{-\theta}) + \ln(\tau - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}) \right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_1(\delta, z_1, \dots, z_n)}{\partial \eta} &= \frac{\tau n}{\eta} + \frac{\tau n}{1 + \eta} - \frac{n(\tau \eta + \tau)}{1 + \eta^\tau + \tau \eta} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\ln(\tau - e^{-\theta})}{(\eta + \tau) \ln(\tau - e^{-\theta}) + \ln(\tau - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}})} \\ &\quad - \tau \sum_{i=1}^n \frac{\ln(\tau - e^{-\theta})}{\eta \ln(\tau - e^{-\theta}) + \ln(\tau - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}})}. \end{aligned}$$

تابع لگاریتم درست‌نمایی توزیع PL-LEIW₂ به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\mathcal{L}_\tau(\delta, z_1, \dots, z_n) = \tau n \ln(\eta) + \tau n \ln(1 + \eta) + n \ln(\theta) + n \ln(\beta) + n\beta \ln(\lambda) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &- n \ln(1 + \eta^\tau + \tau \eta) + n \ln(\ln(\tau - e^{-\theta})) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{z_i} \right)^\beta - \theta \sum_{i=1}^n e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta} \\ &\quad - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \ln(z_i) - \sum_{i=1}^n \ln(\tau - e^{-\theta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \ln[(\eta + \tau) \ln(\tau - e^{-\theta}) - \ln(\tau - e^{-\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta})]$$

$$- \tau \sum_{i=1}^n \ln[(\eta + 1) \ln(\tau - e^{-\theta}) - \ln(\tau - e^{-\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta})].$$

تابع امتیاز برحسب پارامترهای نامعلوم $\eta, \beta, \lambda, \theta$ به صورت زیر به دست آمده است

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\tau(\delta, z_1, \dots, z_n)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + n \ln(\lambda) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta \ln\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)$$

$$+ \tau \theta \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta \ln\left(\frac{\lambda}{z_i}\right) e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{\tau - e^{-\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}} - \sum_{i=1}^n \ln(z_i)$$

$$+ \theta \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta \ln\left(\frac{\lambda}{z_i}\right) e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{(\tau e^{\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta} - 1)((\eta + \tau) \ln(\tau - e^{-\theta}) - \ln(\tau - e^{-\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}))}$$

$$- \tau \theta \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta \ln\left(\frac{\lambda}{z_i}\right) e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{\left(\tau e^{\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta} - 1\right) \left((\eta + 1) \ln(\tau - e^{-\theta}) - \ln\left(\tau - e^{-\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}\right)\right)},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\tau(\delta, z_1, \dots, z_n)}{\partial \lambda} = \frac{n\beta}{\lambda} - \beta \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^{\beta-1}}{z_i^\beta}$$

$$+ \theta \beta \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^{\beta-1} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{z_i^\beta} + \frac{\beta \theta}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{\tau e^{\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta} - 1}$$

$$+ \frac{\beta \theta}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{(\tau e^{\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta} - 1)((\eta + \tau) \ln(\tau - e^{-\theta}) - \ln(\tau - e^{-\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}))}$$

$$- \tau \frac{\beta \theta}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{\left(\tau e^{\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta} - 1\right) \left((\eta + 1) \ln(\tau - e^{-\theta}) - \ln\left(\tau - e^{-\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}\right)\right)},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\tau(\delta, z_1, \dots, z_n)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \frac{n}{(\tau e^{\theta} - 1) \ln(\tau - e^{-\theta})}$$

$$- \sum_{i=1}^n e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta} - \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta}}{\tau e^{\theta} e^{-\left(\frac{\lambda}{z_i}\right)^\beta} - 1}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{(\eta + \tau)(\tau e^{\theta e^{-(\frac{\lambda}{z_i})^\beta}} - 1) - e^{-(\frac{\lambda}{z_i})^\beta}(\tau e^\theta - 1)}{(\tau e^\theta - 1)(\tau e^{\theta e^{-(\frac{\lambda}{z_i})^\beta}} - 1)((\eta + \tau)\ln(\tau - e^{-\theta}) - \ln(\tau - e^{-\theta e^{-(\frac{\lambda}{z_i})^\beta}}))} \\ - \tau \sum_{i=1}^n \frac{(\eta + 1)\left(\tau e^{\theta e^{-(\frac{\lambda}{z_i})^\beta}} - 1\right) - e^{-(\frac{\lambda}{z_i})^\beta}(\tau e^\theta - 1)}{(\tau e^\theta - 1)(\tau e^{\theta e^{-(\frac{\lambda}{z_i})^\beta}} - 1)((\eta + 1)\ln(\tau - e^{-\theta}) - \ln(\tau - e^{-\theta e^{-(\frac{\lambda}{z_i})^\beta}}))},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\tau(\delta, z_1, \dots, z_n)}{\partial \eta} = \frac{\tau n}{\eta} + \frac{\tau n}{1 + \eta} - \frac{n(\tau \eta + \tau)}{1 + \eta + \tau \eta} \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\ln(\tau - e^{-\theta})}{(\eta + \tau)\ln(\tau - e^{-\theta}) - \ln(\tau - e^{-\theta e^{-(\frac{\lambda}{z_i})^\beta}})} \\ - \tau \sum_{i=1}^n \frac{\ln(\tau - e^{-\theta})}{(\eta + 1)\ln(\tau - e^{-\theta}) - \ln(\tau - e^{-\theta e^{-(\frac{\lambda}{z_i})^\beta}})}.$$

همان‌طور که مشهود است، پاسخ تحلیلی توابع امتیاز امکان‌پذیر نمی‌باشد، لذا با استفاده از روش‌های عددی برآوردهای ML پارامترها را محاسبه می‌نماییم.

برآوردهای ML، پارامترهای توزیع‌های PL-LEIW_۱ و PL-LEIW_۲ را با حداکثرسازی تابع لگاریتم درستنمایی با استفاده از نرم‌افزار R و دستور nlm محاسبه می‌نماییم.

۲.۳ برآورد حداقل مربعات

روش برآورد حداقل مربعات (LS) توسط [۲۰] برای برآورد پارامترهای توزیع بتا معرفی شده است. برآوردهای LS پارامترهای توزیع‌های PL-LEIW_۱ و PL-LEIW_۲ را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود.

آماره‌های ترتیبی $z_{(1)} < \dots < z_{(n)}$ از یک نمونه تصادفی از توزیع‌های PL-LEIW_۱ و PL-LEIW_۲ را در نظر بگیرید، امید تابع CDF تجربی به صورت تعریف می‌شود

$$E(Q_j(z_{(i)}, \delta)) = \frac{i}{n+1}, \quad j = 1, 2, i = 1, \dots, n.$$

برآوردهای LS پارامترهای نامعلوم با حداقل نمودن تابع زیر به دست می‌آید

$$T_j(\delta) = \sum_{i=1}^n \left(Q_j(z_{(i)}, \delta) - \frac{i}{n+1} \right)^2, \quad j = 1, 2 \quad (10)$$

که در آن $Q_1(\cdot)$ و $Q_2(\cdot)$ به ترتیب تابع CDF توزیع‌های PL-LEIW_۱ و PL-LEIW_۲ می‌باشد.

متعاقباً، برآوردهای LS را می‌توان به صورت پاسخ معادلات زیر در نظر گرفت

$$\frac{\partial T_j(\delta)}{\partial \beta} = \tau \sum_{i=1}^n \left(Q_j(z_{(i)}, \delta) - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_{j,1}(z_{(i)}) = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\frac{\partial T_j(\delta)}{\partial \lambda} = \tau \sum_{i=1}^n \left(Q_j(z_{(i)}, \delta) - \frac{i}{n+1} \right)$$

$$\Delta_{j,r}(z_{(i)}) = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\frac{\partial T_j(\delta)}{\partial \theta} = r \sum_{i=1}^n \left(Q_j(z_{(i)}, \delta) - \frac{i}{n+1} \right)$$

$$\Delta_{j,r}(z_{(i)}) = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\frac{\partial T_j(\delta)}{\partial \eta} = r \sum_{i=1}^n \left(Q_j(z_{(i)}, \delta) - \frac{i}{n+1} \right)$$

$$\Delta_{j,r}(z_{(i)}) = 0, \quad j = 1, 2$$

به طوری که

$$\Delta_{1,1}(z_{(i)}) = \frac{\partial Q_1(z_{(i)}, \delta)}{\partial \beta} = \frac{F'_\beta(1+\eta)^r \eta^r (F(z_{(i)}, \gamma) + \eta + r)}{(1+\eta^r + r\eta)(\eta + F(z_{(i)}, \gamma))^r}, \quad (11)$$

$$\Delta_{1,2}(z_{(i)}) = \frac{\partial Q_1(z_{(i)}, \delta)}{\partial \lambda} = \frac{F'_\lambda(1+\eta)^r \eta^r (F(z_{(i)}, \gamma) + \eta + r)}{(1+\eta^r + r\eta)(\eta + F(z_{(i)}, \gamma))^r}, \quad (12)$$

$$\Delta_{1,3}(z_{(i)}) = \frac{\partial Q_1(z_{(i)}, \delta)}{\partial \theta} = \frac{F'_\theta(1+\eta)^r \eta^r (F(z_{(i)}, \gamma) + \eta + r)}{(1+\eta^r + r\eta)(\eta + F(z_{(i)}, \gamma))^r}, \quad (13)$$

$$\Delta_{1,4}(z_{(i)}) = \frac{\partial Q_1(z_{(i)}, \delta)}{\partial \eta} \quad (14)$$

$$= \frac{F(z_{(i)}, \gamma)(1+\eta)}{(1+\eta^r + r\eta)(\eta + F(z_{(i)}, \gamma))^r} \\ [rF(z_{(i)}, \gamma)(\eta + 1) + r(1 + r\eta + r\eta^r) \\ - \frac{(1+\eta)(F(z_{(i)}, \gamma)(\eta + 1) + \eta^r + r\eta)(F(z_{(i)}, \gamma)(r\eta + r) + r\eta^r + \eta + r)}{(1+\eta^r + r\eta)(\eta + F(z_{(i)}, \gamma))}]$$

9

$$\Delta_{r,1}(z_{(i)}) = \frac{\partial Q_r(z_{(i)}, \delta)}{\partial \beta} = \frac{F'_\beta(1+\eta)^r \eta^r (\eta + r - F(z_{(i)}, \gamma))}{(1+\eta^r + r\eta)(1+\eta - F(z_{(i)}, \gamma))^r}, \quad (15)$$

$$\Delta_{r,2}(z_{(i)}) = \frac{\partial Q_r(z_{(i)}, \delta)}{\partial \lambda} = \frac{F'_\lambda(1+\eta)^r \eta^r (\eta + r - F(z_{(i)}, \gamma))}{(1+\eta^r + r\eta)(1+\eta - F(z_{(i)}, \gamma))^r}, \quad (16)$$

$$\Delta_{r,3}(z_{(i)}) = \frac{\partial Q_r(z_{(i)}, \delta)}{\partial \theta} = \frac{F'_\theta(1+\eta)^r \eta^r (\eta + r - F(z_{(i)}, \gamma))}{(1+\eta^r + r\eta)(1+\eta - F(z_{(i)}, \gamma))^r}, \quad (17)$$

$$\Delta_{r,4}(z_{(i)}) = \frac{\partial Q_r(z_{(i)}, \delta)}{\partial \eta}, \quad (18)$$

$$= \frac{F(z_{(i)}, \gamma)\eta}{(1+\eta^r + r\eta)(1+\eta - F(z_{(i)}, \gamma))^r}$$

$$\begin{aligned} & [-F(z_{(i)}, \gamma)(\gamma\eta + \epsilon) + \gamma(\gamma + \epsilon\eta + \gamma\eta^\gamma) \\ & - \frac{\eta(\eta^\gamma + \epsilon\eta + \gamma - F(z_{(i)}, \gamma)(\eta + \gamma))(\epsilon\eta^\gamma + \gamma\eta + \gamma - F(z_{(i)}, \gamma)(\gamma\eta + \gamma))}{\gamma + \eta - F(z_{(i)}, \gamma)}], \end{aligned}$$

که در آن

$$F'_\beta = \frac{\partial F(z_{(i)}, \gamma)}{\partial \beta} = \frac{-\theta(\frac{\lambda}{z_{(i)}})^\beta \ln(\frac{\lambda}{z_{(i)}}) e^{-\theta(\frac{\lambda}{z_{(i)}})^\beta}}{\ln(\gamma - e^{-\theta})(\gamma e^{\theta e^{-\theta(\frac{\lambda}{z_{(i)}})^\beta}} - \gamma)},$$

$$F'_\lambda = \frac{\partial F(z_{(i)}, \gamma)}{\partial \lambda} = \frac{-\theta\beta(\frac{\lambda}{z_{(i)}})^\beta e^{-\theta(\frac{\lambda}{z_{(i)}})^\beta}}{\lambda \ln(\gamma - e^{-\theta})(\gamma e^{\theta e^{-\theta(\frac{\lambda}{z_{(i)}})^\beta}} - \gamma)},$$

$$F'_\theta = \frac{\partial F(z_{(i)}, \gamma)}{\partial \theta} = \frac{e^{-\theta(\frac{\lambda}{z_{(i)}})^\beta}}{\ln(\gamma - e^{-\theta})(\gamma e^{\theta e^{-\theta(\frac{\lambda}{z_{(i)}})^\beta}} - \gamma)} - \frac{\ln(\gamma - e^{-\theta e^{-\theta(\frac{\lambda}{z_{(i)}})^\beta}})}{(\ln(\gamma - e^{-\theta}))^2 (\gamma e^{\theta} - \gamma)}.$$

بهینه‌سازی رابطه (۱۰) با استفاده از روش‌های عددی انجام می‌شود.

۳,۳ برآورد حداقل فاصله کرامر-ون-میسز

[۲۱] برآوردگر حداقل فاصله کرامر-ون-میسز (C-MMD) را برای خانواده‌های پارامتری توزیع‌ها ارائه نمودند و ویژگی‌های مجانبی حاصل از برآوردگرها را به دست آوردند. برآوردگرهای C-MMD پارامترهای نامعلوم، با کمینه کردن تابع $C(\delta)$ بر حسب مولفه‌های بردار پارامتر δ به دست می‌آیند

$$C(\delta) = \frac{1}{\gamma n} + \sum_{i=1}^n \left(Q(z_{(i)}, \delta) - \frac{\gamma i - 1}{\gamma n} \right)^2.$$

برآوردگرها با حل معادلات غیرخطی زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_j(\delta)}{\partial \beta} &= \gamma \sum_{i=1}^n \left(Q_j(z_{(i)}, \delta) - \frac{\gamma i - 1}{\gamma n} \right) \\ \Delta_{j,1}(z_{(i)}) &= 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_j(\delta)}{\partial \lambda} &= \gamma \sum_{i=1}^n \left(Q_j(z_{(i)}, \delta) - \frac{\gamma i - 1}{\gamma n} \right) \\ \Delta_{j,2}(z_{(i)}) &= 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_j(\delta)}{\partial \theta} &= \gamma \sum_{i=1}^n \left(Q_j(z_{(i)}, \delta) - \frac{\gamma i - 1}{\gamma n} \right) \\ \Delta_{j,3}(z_{(i)}) &= 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_j(\delta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \left(Q_j(z_{(i)}, \delta) - \frac{2i-1}{2n} \right)$$

$$\Delta_{j,r}(z_{(i)}) = 0, \quad j = 1, 2$$

که در آن $\Delta_{j,k}(z_{(i)})$, $k = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2$ در (۱۱)–(۱۸) معرفی شده است.

۴.۳ برآورد حداکثر فاصله حاصلضربی

روش برآورد حداکثر فاصله حاصلضربی (MPS) به عنوان جایگزینی برای روش برآورد حداکثر درستنمایی به منظور برآورد پارامتر توزیع‌ها، توسط [۲۲] و [۲۳] معرفی شده است که با به حداکثر رساندن میانگین هندسی فاصله‌ها برحسب پارامترهای مجهول به دست می‌آید.

برآوردگر MPS بردار پارامترهای نامعلوم δ از توزیع‌های $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$ با حداکثر نمودن تابع زیر و $j = 1, 2$ محاسبه می‌شوند

$$V_j(\delta) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \ln \left(Q_j(z_{(i)}, \delta) - Q_j(z_{(i-1)}, \delta) \right),$$

که در آن $Q(z_{(n+1)}, \delta) = 1$ و $Q(z_{(0)}, \delta) = 0$ می‌باشد و

$$\frac{\partial V_j(\delta)}{\partial \beta} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\Delta_{j,1}(z_{(i)}) - \Delta_{j,1}(z_{(i-1)})}{Q_j(z_{(i)}, \delta) - Q_j(z_{(i-1)}, \delta)} = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\frac{\partial V_j(\delta)}{\partial \lambda} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\Delta_{j,2}(z_{(i)}) - \Delta_{j,2}(z_{(i-1)})}{Q_j(z_{(i)}, \delta) - Q_j(z_{(i-1)}, \delta)} = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\frac{\partial V_j(\delta)}{\partial \theta} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\Delta_{j,3}(z_{(i)}) - \Delta_{j,3}(z_{(i-1)})}{Q_j(z_{(i)}, \delta) - Q_j(z_{(i-1)}, \delta)} = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\frac{\partial V_j(\delta)}{\partial \eta} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\Delta_{j,4}(z_{(i)}) - \Delta_{j,4}(z_{(i-1)})}{Q_j(z_{(i)}, \delta) - Q_j(z_{(i-1)}, \delta)} = 0, \quad j = 1, 2$$

[۲۳] نشان داد که برآوردگرهای MPS به اندازه برآوردگرهای ML کارا هستند و تحت شرایط عمومی‌تری از برآوردگرهای ML سازگار هستند.

۴- مقایسات شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد روش‌های برآورد را ارزیابی می‌کنیم. از این‌رو، از توزیع‌های $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$ نمونه تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ برای مقادیر مختلف پارامترها و با اندازه‌های $n = (200, 500, 1000)$ تولید می‌نماییم. شایان ذکر است که فرآیند تولید داده در گزاره ۳ توضیح داده شده است. برآورد پارامترهای نامعلوم با استفاده از روش‌های حداکثر درستنمایی، حداقل مربعات، حداقل فاصله کرامر-ون-میسز و حداکثر فاصله حاصلضربی محاسبه

شده است. در هر تکرار، داده‌های شبیه‌سازی تولید و پارامترهای نامعلوم را با روش‌های مختلف برآورد می‌نماییم. روند مذکور را ۱۰۰۰ مرتبه تکرار می‌کنیم. محاسبات عددی با استفاده از نرم‌افزار R به دست آمده است. میانگین برآوردهای مختلف پارامترها و ریشه میانگین مربعات خطاها (RMSE) در جداول ۱ تا ۴ گزارش شده است. نتایج جداول ۱ تا ۴ نشان می‌دهد که برآوردها پایدار هستند و به مرور به مقادیر واقعی پارامترها نزدیک می‌شوند. زمانی که n افزایش یابد، برآوردها به مقدار واقعی پارامترها همگرا می‌شوند. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش حجم نمونه n ، اریبی و RMSE کاهش می‌یابد، که دقت و سازگاری روش‌های مختلف برآورد را نشان می‌دهد. در بین رویکردهای مختلف برآورد، برآوردهای ML کوچکترین مقادیر RMSE را شامل می‌شوند که نشان می‌دهد روش ML کارآمدتر از دیگر روش‌های برآوردیابی است. پس از ML، برآورد MPS از سایر روش‌های برآورد، بهتر عمل می‌کند. بنابراین، برتری روش‌های ML و MPS نسبت به روش‌های تخمین LS و C-MMD برای توزیع‌های PL-LEIW^۱ و PL-LEIW^۲ تأیید می‌شوند.

جدول ۱: نتایج شبیه‌سازی برای برآوردهای ML و LS پارامترهای توزیع PL-LEIW^۱ و مقادیر RMSE در پرانتز.

n	ML				LS			
	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\eta}$
$(\beta, \theta, \lambda, \eta) = (2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$								
۲۰۰	۲,۰۶۳۸۳ (۰,۳۲۶۳۵)	۰,۵۵۱۱۳ (۰,۷۵۶۶۷)	۱,۵۲۰۱۳ (۰,۳۲۷۴۸)	۰,۶۳۱۰۲ (۰,۳۶۷۰۲)	۲,۱۳۳۰۹ (۰,۷۷۲۰۱)	۰,۵۶۶۶۱ (۰,۸۶۱۹۷)	۱,۵۶۱۹۲ (۰,۳۸۸۵۷)	۰,۶۲۸۷۲ (۰,۵۴۱۶۲)
۵۰۰	۲,۰۳۳۸۳ (۰,۲۸۲۲۱)	۰,۵۳۱۳۱ (۰,۵۹۸۳۱)	۱,۵۲۳۹۳ (۰,۲۴۶۰۶)	۰,۵۶۹۶۸ (۰,۲۹۶۰۶)	۲,۰۸۴۶۸ (۰,۵۳۵۹۵)	۰,۴۴۲۰۴ (۰,۷۰۴۶۳)	۱,۵۳۲۱۶ (۰,۳۴۶۷۷)	۰,۶۲۴۰۴ (۰,۵۱۵۸۱)
۱۰۰۰	۲,۰۱۵۷۹ (۰,۲۰۶۷۸)	۰,۶۴۷۴۶ (۰,۵۴۰۲۴)	۱,۵۱۲۷۱ (۰,۱۷۷۹۷)	۰,۵۴۶۹۲ (۰,۲۷۸۸۵)	۲,۰۸۳۳۸ (۰,۳۴۰۱۸)	۰,۴۷۸۴۷ (۰,۵۶۹۶۷)	۱,۴۸۳۰۲ (۰,۲۴۹۸۷)	۰,۵۹۶۸۸ (۰,۴۶۹۷۶)
$(\beta, \theta, \lambda, \eta) = (4, 2, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0)$								
۲۰۰	۴,۲۰۲۳۷ (۱,۱۸۱۰۷)	۱,۷۹۴۹۲ (۱,۹۷۰۱۸)	۲,۵۹۰۸۸ (۰,۴۷۹۳۷)	۱,۴۷۱۱۶ (۱,۴۰۶۲۴)	۳,۷۸۹۳۸ (۰,۹۲۷۳۲)	۱,۶۳۷۴۶ (۱,۵۴۵۹۶)	۲,۶۹۳۵۷ (۰,۴۸۰۸۷)	۱,۲۸۹۲۲ (۱,۴۶۳۴۸)
۵۰۰	۴,۰۸۲۲۴ (۰,۷۷۸۹۶)	۱,۳۱۴۱۴ (۱,۴۱۱۴۶)	۲,۵۳۵۷۲ (۰,۲۹۷۹۹)	۱,۰۸۳۳۷ (۱,۰۱۷۶۱)	۳,۸۶۴۷۸ (۰,۷۷۰۶۴)	۱,۵۷۷۷۶ (۱,۳۶۹۵۸)	۲,۶۲۱۱۸ (۰,۳۴۲۰۷۴)	۱,۰۳۶۸۷ (۱,۲۰۹۵۴۲)
۱۰۰۰	۴,۰۷۹۶۷ (۰,۵۴۹۹۶)	۱,۶۱۸۷۷ (۰,۹۹۸۷۹)	۲,۵۰۷۶۹ (۰,۱۹۳۹۴)	۱,۷۹۰۳۷ (۲,۰۴۱۷۴)	۳,۸۰۷۲۳ (۰,۸۵۱۳۶)	۱,۸۶۹۲۰ (۱,۲۳۶۲۹)	۲,۶۵۸۴۵ (۰,۳۷۶۱۵)	۱,۶۳۱۰۵ (۱,۶۵۲۲۹)

جدول ۲: نتایج شبیه‌سازی برای برآوردهای MPS و C-MMD پارامترهای توزیع PL-LEIW^۱ و مقادیر RMSE در پرانتز.

n	MPS				C-MMD			
	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\eta}$
$(\beta, \theta, \lambda, \eta) = (2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$								
۲۰۰	۱,۹۴۵۴۷ (۰,۵۹۱۶۷)	۰,۵۷۷۱۶ (۰,۷۰۰۵۹)	۱,۷۷۳۳۱ (۱,۰۳۲۰۷)	۰,۳۴۵۰۸ (۰,۲۹۴۹۸)	۲,۱۳۲۰۹۶ (۰,۸۶۳۲۴۱)	۰,۲۸۰۵۳ (۰,۴۵۴۰۸)	۱,۷۱۵۷۹ (۰,۷۱۴۰۴)	۰,۵۹۵۶۵ (۰,۵۸۶۲۷)
۵۰۰	۱,۹۲۰۷۹ (۰,۳۸۸۶۱)	۰,۴۲۶۷۳ (۰,۸۲۱۸۴)	۱,۶۶۳۸۱ (۰,۴۴۶۵۸)	۰,۳۶۳۷۲ (۰,۲۵۹۹۳)	۲,۰۳۸۹۷ (۰,۴۱۲۲۷)	۰,۵۹۹۳۱ (۰,۶۰۵۴۴)	۱,۵۸۰۵۳ (۰,۴۱۳۵۹)	۰,۶۵۳۸۶ (۰,۵۱۵۰۳)
۱۰۰۰	۱,۹۵۳۱۱ (۰,۲۵۱۵۶)	۰,۳۶۶۶۳۸ (۰,۷۴۲۹۱)	۱,۵۷۱۲۷ (۰,۲۳۹۶۱)	۰,۳۷۳۵۸ (۰,۲۳۴۶۴۶)	۲,۰۵۷۱۴۶ (۰,۳۶۸۹۸)	۰,۳۷۲۲۲ (۰,۶۳۸۳۵)	۱,۵۱۶۰۱ (۰,۲۸۶۲۸)	۰,۵۲۶۷۰۸ (۰,۳۴۷۹۵)
$(\beta, \theta, \lambda, \eta) = (4, 2, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0)$								
۲۰۰	۳,۴۷۹۶۶ (۱,۰۵۵۷۹)	۲,۳۶۲۷۲ (۱,۸۸۸۹۱)	۲,۸۵۵۷۹ (۰,۵۷۴۳۵)	۱,۳۷۳۳۱ (۱,۴۷۳۹۳)	۳,۸۲۴۱۶ (۰,۹۸۸۶۷)	۲,۰۲۷۸۲ (۱,۹۴۰۵۷)	۲,۷۰۳۱۸ (۰,۵۳۳۳۷)	۱,۲۶۵۲۴ (۱,۲۸۷۶۹)
۵۰۰	۳,۸۰۷۲۳ (۰,۸۵۱۳۶)	۱,۸۶۹۲۱ (۱,۲۳۶۲۹)	۲,۶۵۸۴۵ (۰,۳۷۶۱۵)	۱,۶۳۱۰۵ (۱,۶۵۲۲۹)	۴,۱۴۰۶۱ (۰,۷۷۴۰۵)	۱,۴۸۵۸۵ (۱,۴۱۹۹۸)	۲,۵۷۰۰۳ (۰,۳۲۸۴۹۲)	۱,۱۹۵۷۸ (۱,۴۳۷۱۳)
۱۰۰۰	۳,۸۶۳۹۵۷ (۰,۵۲۸۱۴)	۱,۸۵۱۹۷ (۰,۸۷۰۵۵)	۲,۵۸۴۹۶ (۰,۲۲۲۴۷)	۱,۶۰۷۱۸ (۱,۵۱۰۱۲)	۴,۱۰۲۴۳ (۰,۸۱۶۲۱)	۱,۳۷۶۳۱ (۱,۲۲۵۸۴)	۲,۵۳۲۹۸ (۰,۲۸۹۴۳)	۱,۴۹۷۳۲ (۱,۷۹۸۳۹)

جدول ۳: نتایج شبیه‌سازی برای برآوردهای ML و LS پارامترهای توزیع PL-LEIW^۲ و مقادیر RMSE در پرانتز.

n	ML				LS			
	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\eta}$
	$(\beta, \theta, \lambda, \eta) = (200, 501, 500, 5)$							
۲۰۰	۱,۹۴۷۷۷ (۰,۲۸۴۷۷)	۰,۷۹۳۴۶ (۱,۲۶۰۵)	۱,۶۱۰۸۴ (۰,۵۸۳۶۳۱)	۰,۶۷۳۴۸ (۰,۵۰۸۷۹)	۱,۹۱۰۷۹۴ (۰,۴۷۵۸۶)	۰,۹۶۶۷۹ (۱,۸۹۳۷۱)	۱,۵۷۱۸۶۸ (۰,۸۰۱۸۲)	۰,۳۲۳۱۰۲ (۰,۴۴۶۳۴)
۵۰۰	۱,۹۹۴۶۳۲ (۰,۱۷۳۸۲)	۰,۵۲۹۸۸ (۰,۸۱۴۰۹)	۱,۵۰۲۹۰۶ (۰,۲۸۲۶۷)	۰,۵۹۷۴۱ (۰,۳۱۸۴۳)	۲,۰۳۴۱۶ (۰,۳۴۹۳۳)	۰,۵۶۳۱۶ (۱,۴۱۴۱۲)	۱,۴۳۳۴۶ (۰,۲۹۷۶۶)	۰,۶۶۲۲۹ (۰,۷۱۱۱۸)
۱۰۰۰	۱,۹۷۳۱۶ (۰,۱۰۵۵۶)	۰,۴۹۹۳۹ (۰,۶۵۲۲۴)	۱,۵۰۹۱۸ (۰,۱۴۶۸۱)	۰,۶۵۸۴۲ (۰,۳۷۹۰۷)	۲,۰۲۶۳۵ (۰,۲۵۲۰۴)	۰,۴۰۰۶۴ (۱,۱۱۱۵۹)	۱,۴۷۴۰۱ (۰,۳۱۹۵۱)	۰,۷۱۳۸۵ (۰,۷۲۹۱۵)
	$(\beta, \theta, \lambda, \eta) = (420, 205, 105, 5)$							
۲۰۰	۴,۳۲۶۳۸ (۰,۸۴۸۹۱)	۱,۷۳۸۸۴ (۱,۴۶۷۹۶)	۲,۴۱۶۹۹ (۰,۲۸۲۳۹)	۱,۸۳۴۶۱ (۲,۳۴۲۹۰۶)	۳,۷۳۹۶۱ (۰,۷۱۸۶۲)	۲,۲۶۸۳۰۹ (۱,۷۶۳۶۴)	۲,۵۹۶۱۶ (۰,۳۳۴۸۶)	۱,۸۶۴۵۹ (۳,۰۲۰۶۷)
۵۰۰	۴,۰۷۹۶۹۳ (۰,۶۷۵۶۶)	۱,۹۴۰۴۳ (۱,۰۲۱۴۹)	۲,۵۱۲۰۳ (۰,۲۵۶۲۹)	۱,۹۷۲۹۸ (۱,۸۳۴۹۴)	۳,۷۷۱۸۱ (۰,۶۴۸۱۴)	۲,۱۳۷۲۴ (۱,۳۸۳۴۱)	۲,۶۲۲۵۲ (۰,۳۱۳۳۳)	۲,۳۱۶۲۹ (۲,۲۳۲۳۴)
۱۰۰۰	۳,۹۶۲۴۷ (۰,۴۵۵۰۲)	۱,۸۸۷۹۹ (۰,۷۸۹۸۹)	۲,۵۳۷۹۶ (۰,۱۸۰۶۳)	۲,۰۸۸۰۹ (۱,۸۲۲۲۵)	۳,۹۴۸۳۱۷ (۰,۶۳۰۶۱)	۱,۹۱۰۲۴ (۱,۱۳۶۹۱)	۲,۵۶۱۶۹۸ (۰,۲۴۶۲۹۴)	۲,۶۴۲۰۵۵ (۲,۳۷۰۶۷)

جدول ۴: نتایج شبیه‌سازی برای برآوردهای MPS و C-MMD پارامترهای توزیع PL-LEIW^۲ و مقادیر RMSE در پرانتز.

n	MPS				C-MMD			
	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\eta}$
	$(\beta, \theta, \lambda, \eta) = (200, 501, 500, 5)$							
۲۰۰	۲,۰۹۹۴۶ (۰,۴۸۷۹۳)	۰,۷۴۳۲۷ (۱,۶۰۷۱۸)	۱,۳۸۵۰۷ (۰,۹۱۵۵۵)	۰,۵۹۹۶۷۲ (۰,۷۴۶۹۲)	۲,۰۸۰۵۵ (۰,۶۱۴۶۴)	۰,۶۲۷۲۵ (۱,۵۴۳۱۲)	۱,۶۰۸۹۹ (۰,۷۷۳۵۷)	۰,۸۴۰۳۰ (۰,۸۷۸۰۴)
۵۰۰	۲,۰۵۰۶۷ (۰,۲۳۴۶۵)	۰,۵۵۸۳۱ (۱,۱۰۸۸۲)	۱,۳۸۱۵۲ (۰,۲۹۴۵۲)	۰,۶۱۰۵۵ (۰,۶۰۶۲۹)	۲,۰۷۲۶۰ (۰,۳۶۰۹۲)	۰,۳۲۹۷۲ (۱,۲۸۴۷۰)	۱,۴۸۸۲۳ (۰,۴۳۹۹۸)	۰,۷۴۷۶۵ (۰,۸۹۷۹۸)
۱۰۰۰	۲,۰۲۹۹۶ (۰,۱۲۵۷۶)	۰,۶۰۱۴۹ (۰,۹۵۷۰۱)	۱,۴۱۳۰۸ (۰,۲۰۲۳۵)	۰,۵۳۵۴۲ (۰,۵۳۷۰۵)	۲,۰۳۹۰۷ (۰,۲۰۸۱۷)	۰,۵۱۴۰۵ (۱,۰۰۱۵۶)	۱,۴۳۵۱۵ (۰,۲۰۳۴۴)	۰,۶۹۵۱۸ (۰,۶۹۳۵۴)
	$(\beta, \theta, \lambda, \eta) = (420, 205, 105, 5)$							
۲۰۰	۴,۰۳۴۶۵ (۱,۰۳۹۰۸)	۲,۴۳۶۳۷ (۲,۱۴۳۲۲)	۲,۵۰۴۴۴ (۰,۴۳۱۸۵)	۱,۷۶۰۳۷ (۲,۱۳۱۰۳)	۳,۸۹۶۷۳ (۰,۹۰۰۷۵)	۲,۲۷۳۶۵ (۱,۹۸۴۹۱)	۲,۵۵۷۵۵ (۰,۳۶۲۸۴۹)	۳,۰۳۱۳۲ (۳,۴۹۲۱۱۲)
۵۰۰	۴,۲۲۰۰۵ (۰,۷۱۱۱۹)	۱,۹۴۳۰۲ (۱,۱۹۹۰۱)	۲,۴۳۴۵۳ (۰,۲۸۹۹۵)	۱,۳۸۴۱۴ (۱,۳۰۷۸۱)	۳,۹۶۳۰۷ (۰,۶۳۱۱۲)	۲,۰۱۴۴۱ (۱,۲۳۰۸۲)	۲,۵۳۳۵۱ (۰,۲۴۷۱۳)	۲,۸۸۵۹۴ (۳,۱۶۰۱۴)
۱۰۰۰	۴,۰۳۲۳۵ (۰,۵۱۹۵۵)	۱,۹۶۰۶۹ (۰,۸۶۴۴۵)	۲,۵۱۰۳۴ (۰,۲۲۲۳۲)	۱,۸۷۹۲۴ (۱,۷۶۵۰۸)	۳,۹۳۷۱۵ (۰,۶۶۹۵۳)	۱,۹۸۹۹۷ (۱,۱۵۱۰۳)	۲,۵۶۸۳۱ (۰,۲۵۹۴۱)	۲,۸۴۸۶۹ (۲,۶۵۶۸۱)

۵. آنالیز داده‌های واقعی

در این بخش، به مقایسه کاربرد توزیع‌های PL-LEIW^۱ و PL-LEIW^۲ در مقابل سایر مدل‌های مربوطه می‌پردازیم. اولین مجموعه از داده‌ها مربوط به زمان بهبودی (بر حسب ماه) برای ۱۲۸ بیمار مبتلا به سرطان مثانه را نشان می‌دهد [۲۴] و مجموعه دوم از داده‌ها مربوط به زمان خرابی سیستم تهویه مطبوع یک هواپیما است [۲۵]. جدول ۵، برخی معیارهای آماری مجموعه داده‌های زمان‌های بهبودی و زمان‌های خرابی تهویه مطبوع را نشان می‌دهد. با توجه به نتایج به دست آمده، توزیع‌های تجربی چوله به راست و کشیده می‌باشند.

با حداکثر نمودن روابط (۸) و (۹) توسط نرم‌افزارهای آماری، می‌توان برآوردهای ML توزیع $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$ را با استفاده از محاسبات عددی، به دست آورد. برآوردهای ML و فاصله کولموگروف-اسمیرنوف (KS) بین مقادیر برازش‌شده و توابع توزیع تجربی در جدول ۶ نشان داده شده است. بر اساس جدول ۶، هر دو توزیع $PL-LEIW_1$ و $PL-LEIW_2$ را می‌توان در برازش مجموعه داده‌های واقعی در سطح معناداری ۰/۰۵ به کار برد. ولیکن، با توجه به فاصله KS و P-value، توزیع $PL-LEIW_2$ برازش بهتری نسبت به $PL-LEIW_1$ برای مجموعه داده‌های پیشنهادی ارائه می‌نماید.

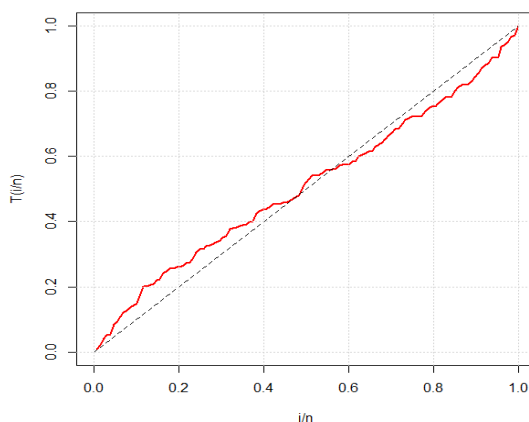
در ادامه، نمودار زمان کل آزمایش (TTT) برای هر دو مجموعه داده واقعی را در شکل ۵ و ۶ نشان می‌دهیم تا شکل نرخ شکست را شناسایی کنیم. بر اساس شکل ۵، مجموعه داده دارای نرخ شکست غیریکنوا و تک‌مدی است. با توجه به شکل ۶، مجموعه داده دوم دارای نرخ شکست یکنوا (کاهشی) است، بنابراین استفاده از توزیع‌های پیشنهادی را می‌توان برای هر دو مجموعه داده پیشنهاد کرد.

جدول ۵: آماره‌های توصیفی دو مجموعه داده واقعی

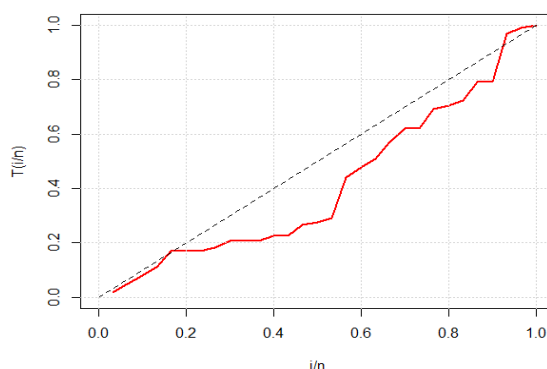
Data set	Mean	Median	Variance	Skewness	Kurtosis
First data	۹,۴۴۳۷	۶,۶۵	۱۱۰,۲۵۲۶	۳,۲۷۳۸	۱۸,۴۴۲۱
Second data	۵۹,۶	۲۲	۵۱۶۷,۴۲۱	۱,۶۹۳۶	۴,۹۶۶۶

جدول ۶: نتایج آنالیز مجموعه داده واقعی

Data set	Distribution	$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\lambda}_{ML}$	$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\eta}_{ML}$	K-S	P-value
First data	$PL-LEIW_1$	۰,۱۵۴۷	$3,4787e6$	$1,2202e3$	۵,۵۲۵۷e۵	۰,۰۴۵۸	۰,۹۴۶۱
	$PL-LEIW_2$	۰,۲۲۳۱	$446,6074$	$33,8816$	۰,۱۳۲۵	۰,۰۳۲۳۸	۰,۹۹۹۱
Second data	$PL-LEIW_1$	۰,۱۴۸۱	$9,0861e6$	$339,2007$	$1,3218e6$	۰,۱۱۹۹	۰,۷۵۴۳
	$PL-LEIW_2$	۰,۱۶۴۹	$1,2810e6$	$170,0223$	$1276,280$	۰,۱۱۷۱	۰,۷۷۹۳



شکل ۵: نمودار TTT برای مجموعه داده‌های اول



شکل ۶: نمودار TTT برای مجموعه داده‌های اول

دو توزیع جدید را با برخی از نسخه‌های قبلی توزیع وایبل از قبیل وایبل (Wei)، وایبل تعمیم‌یافته (MW)، کوماسائومی وایبل (KW)، وایبل معکوس (IW)، وایبل-نمایی شده (EW^۱)، وایبل معکوس تعمیم‌یافته (GIW)، نمایی-وایبل (EW^۲)، مارشال-اولکین وایبل (MOW)، مارشال-اولکین نمایی-وایبل (MOEW) و آلفا توانی تبدیل‌یافته وایبل (APTW) برای برازش مجموعه داده‌های واقعی. مقایسه می‌کنیم. جدول ۷ و ۸، به ترتیب برآوردهای ML پارامترها و آماره نیکویی برازش (معیار اطلاع آکائیک (AIC)) هر دو مجموعه داده را نشان می‌دهند. بر اساس جدول‌های ۷ و ۸، توزیع‌های PL-LEIW^۱ و PL-LEIW^۲ کمترین مقدار AIC را دارند، که موید برتری توزیع‌های پیشنهادی در میان توزیع‌های رقیب برای مدل‌سازی هر دو مجموعه داده واقعی است.

جدول ۷: مقادیر MLE مدل‌های برازش‌شده و معیار اطلاع آکائیک برای مجموعه اول داده‌ها.

Models	ML estimates	AIC
Wei	$\hat{\beta} = 0.3254655, \hat{\lambda} = 2.2144559$	۱۰۳۴,۵۶۸
MW	$\hat{\alpha} = 0.0088, \hat{\gamma} = 0.0151, \hat{\theta} = 1.6995$	۸۸۰,۳۸۰.۵
KW	$\hat{a} = 3.9594, \hat{b} = 3.1408, \hat{\theta} = 0.4605, \hat{\gamma} = 0.4642$	۸۳۱,۶۶۶.۵
IW	$\hat{\beta} = 0.7495, \hat{\lambda} = 3.2884$	۸۹۵,۵۸۸.۶
EW ^۱	$\hat{\alpha} = 2.6633, \hat{\theta} = 0.6698, \hat{\gamma} = 0.4243$	۸۲۹,۹۰۱.۳
GIW	$\hat{\alpha} = 0.2199, \hat{\beta} = 0.7495, \hat{\gamma} = 0.7072$	۸۹۷,۵۸۸.۶
EW ^۲	$\hat{\beta} = 28.4479, \hat{\lambda} = 28.3627, \hat{k} = 1.002$	۸۳۵,۹۲۴.۷
MOW	$\hat{\alpha} = 170.31486, \hat{\beta} = 269.8764, \hat{\theta} = 0.2668$	۸۳۱,۲۰۶.۷
MOEW	$\hat{\alpha} = 2.9109, \hat{\beta} = 2.2668, \hat{\lambda} = 1.9797, \hat{k} = 0.9817$	۸۳۷,۲۹۶.۸
APTW	$\hat{\alpha} = 0.0132, \hat{\theta} = 0.0156, \hat{\gamma} = 1.2721$	۸۲۹,۷۲۴.۱
PL-LEIW ^۱	$\hat{\beta} = 0.1547, \hat{\lambda} = 3.4787e6, \hat{\theta} = 1.2252e3, \hat{\eta} = 0.5257e5$	۸۲۷,۲۲۸.۶
PL-LEIW ^۲	$\hat{\beta} = 0.2231, \hat{\lambda} = 446.6074, \hat{\theta} = 33.8816, \hat{\eta} = 0.1325$	۸۲۲,۴۵۰.۴

جدول ۸: مقادیر MLE مدل‌های برازش‌شده و معیار اطلاع آکائیک برای مجموعه دوم داده‌ها.

Models	ML estimates	AIC
Wei	$\hat{\beta} = 0.1976019, \hat{\lambda} = 2.3239698$	377.6592
MW	$\hat{\alpha} = 0.0003, \hat{\gamma} = 0.0311, \hat{\theta} = 0.8747$	309.8496
KW	$\hat{a} = 3.2743, \hat{b} = 0.1438, \hat{\theta} = 0.6906, \hat{\gamma} = 0.0498$	310.2021
IW	$\hat{\beta} = 0.7239766, \hat{\lambda} = 14.6108841$	314.2288
EW ^۱	$\hat{\alpha} = 3.8290, \hat{\theta} = 0.3812, \hat{\gamma} = 0.4011$	308.7388
GIW	$\hat{\alpha} = 0.2817, \hat{\beta} = 0.7239, \hat{\gamma} = 2.0894$	316.2288
EW ^۲	$\hat{\beta} = 0.0128, \hat{\lambda} = 0.0418, \hat{k} = 1.1202$	309.0661
MOW	$\hat{\alpha} = 0.2060, \hat{\beta} = 0.0073, \hat{\theta} = 1.1371$	308.0069
MOEW	$\hat{\alpha} = 1.7301280, \hat{\beta} = 0.2006, \hat{\lambda} = 0.1971, \hat{k} = 0.9712$	312.2408
APTW	$\hat{\alpha} = 0.1920, \hat{\theta} = 0.0124, \hat{\gamma} = 0.9732$	309.1910
PL-LEIW ^۱	$\hat{\beta} = 0.1481, \hat{\lambda} = 9.0861e6, \hat{\theta} = 339.2007, \hat{\eta} = 1.3218e6$	304.0300
PL-LEIW ^۲	$\hat{\beta} = 0.1649, \hat{\lambda} = 1.2810e6, \hat{\theta} = 170.0223, \hat{\eta} = 1276.280$	304.0902

نتیجه‌گیری

در این تحقیق به ارائه یک توزیع جدید برای یک سیستم منسجم با تعداد نامعلومی از مولفه‌ها، با ویژگی‌های انعطاف‌پذیرتر و مطابق با انواع مختلفی از پدیده‌های طول عمر، پرداخته شده است. دو توزیع جدید ترکیبی از توزیع‌های LEIW و پواسن‌لیندلی است. خواص آماری توزیع پیشنهادی به طور جامع مورد بحث قرار گرفته است. توزیع‌های جدید دارای نرخ شکست انعطاف‌پذیر با رفتار یکنوا و غیر یکنوا است. روش‌های مختلف برآورد پارامتری و ناپارامتری شامل حداکثر درست‌نمایی، حداقل مربعات، حداقل فاصله کرامر-ون-میسز و حداکثر فاصله حاصلضربی است.

برای توزیع‌های PL-LEIW^۱ و PL-LEIW^۲، روش حداکثر درست‌نمایی بهترین عملکرد را در میان سایر روش‌های برآوردیابی دارد. با مقایسه شبیه‌سازی، نشان دادیم که روش حداکثر درست‌نمایی، ریشه میانگین مربعات خطاهای کمتری دارد و پس از برآورد حداکثر درست‌نمایی، حداکثر فاصله حاصلضربی از روش‌های دیگر بهتر عمل می‌کند. کاربرد دو توزیع پیشنهادی نیز توسط دو مجموعه داده واقعی بررسی شده است. بر اساس مجموعه داده‌های واقعی و برحسب معیار اطلاع آکائیک، توزیع‌های PL-LEIW^۱ و PL-LEIW^۲ بهترین برازش را در میان سایر مدل‌های مبتنی بر توزیع وایبل دارند.

فهرست منابع

- [۱] C. Kuş, "A new lifetime distribution," *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. ۵۱, pp. ۴۴۹۷–۴۵۰۹, ۲۰۱۷.
- [۲] V.G. Cancho, F. Louzada-Neto and G.D.C. Barriga, "The Poisson-exponential lifetime distribution," *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. ۵۵, no. ۱, pp. ۶۷۷–۶۸۶, ۲۰۱۱.
- [۳] M. Goldoust, S. Rezaei, Y. Si and S. Nadarajah, "A lifetime distribution motivated by parallel and series structures," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. ۴۷, no. ۱۳, pp. ۳۰۵۲–۳۰۷۲, ۲۰۱۸.
- [۴] Y. Sun., T. Sun, M.G. Pecht and C. Yu, "Computing lifetime distributions and reliability for systems with outsourced components: A case study," *IEEE Access*, vol. ۶, pp. ۳۱۳۵۹–۳۱۳۶۶, ۲۰۱۸.
- [۵] A.F. Hashem and S.A. Alyami, "Inference on a New Lifetime Distribution under Progressive Type II Censoring for a Parallel-Series Structure," *Complexity*, vol. ۱۱, pp. ۱–۱۸, <https://doi.org/10.1155/2021/6684918>, ۲۰۲۱.
- [۶] C. Li and X. Li, "Preservation of increasing convex/concave order under the formation of parallel/series system of dependent components," *Metrika*, vol. ۸۱, no. ۴, pp. ۴۴۵–۴۶۴, ۲۰۱۸.
- [۷] L. Xie, M.A. Lundteigen and Y. Liu, "Reliability and barrier assessment of series and parallel systems subject to cascading failures," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, vol. ۲۳۴, no. ۳, pp. ۴۵۵–۴۶۹, ۲۰۲۰.
- [۸] A.L. Morais. and S.L.P. Ferrari, "A class of regression models for parallel and series systems with a random number of components," *Statistics*, vol. ۵۱, no. ۲, pp. ۲۹۴–۳۱۳, ۲۰۱۷.
- [۹] L. Zhang and R. Yan, "Stochastic comparisons of series and parallel systems with dependent and heterogeneous Topp-Leone generated components," *AIMS Mathematics*, vol. ۶, no. ۳, pp. ۲۰۳۱–۲۰۴۷, ۲۰۲۱.
- [۱۰] P.E. Oguntunde, A. Mundher, M.A. Khaleel, M.T. Ahmed and H.I. Okagbue, "The Gompertz Fréchet distribution: Properties and applications," *Cogent Mathematics and Statistics*, vol. ۶, no. ۱, pp. ۱–۱۲, ۲۰۱۹.
- [۱۱] Z. Ahmad, "A new generalized class of distributions: properties and estimation based on type-I censored samples," *Annals of Data Science*, vol. ۷, no. ۲, pp. ۲۴۳–۲۵۶, ۲۰۲۰.
- [۱۲] F. Jamal, M.A. Nasir, G. Ozel, M. Elgarhy and N. Mamode Khan, "Generalized inverted Kumaraswamy generated family of distributions: theory and applications," *Journal of Applied Statistics*, vol. ۴۶, no. ۱۶, pp. ۲۹۲۷–۲۹۴۴, ۲۰۱۹.

- [۱۳] H. Pourreza, E. Baloui Jamkhaneh and E. Deiri, "A family of Gamma generated distributions: Statistical properties and applications," *Statistical Methods in Medical Research*, vol. ۳۰, no. ۸, pp. ۱۸۵۰-۱۸۷۳, ۲۰۲۱.
- [۱۴] R. Tahmasbi and S. Rezaei, "A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate," *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. ۵۲, pp. ۳۸۸۹-۳۹۰۱, ۲۰۰۸.
- [۱۵] M. Aslam, C. Ley, Z. Hussain, S.F. Shah and Z. Asghar, "A new generator for proposing flexible lifetime distributions and its properties," *PLOS ONE*, vol. ۱۵, no. ۴, e-۰۲۳۱۹۰۸, ۲۰۲۰.
- [۱۶] E. Mahmoudi, A. Sepahdar and A.J. Lemonte, "Exponentiated Weibull-logarithmic distribution: Model, properties and applications," arXiv:۱۴۰۲.۲۵۶۴۷۱, ۲۰۱۴.
- [۱۷] R.A. Khan and M. Mitra, "Estimation issues in the Exponential-Logarithmic model under hybrid censoring," *Statistical Papers*, ۱۰, ۱۰۰۷/s۰۰۳۶۲-۰۱۹-۰۱۱۰۰-۳, ۲۰۱۹.
- [۱۸] M. Sankaran, "The discrete Poisson-Lindley distribution," *Biometrics*, vol. ۲۶, pp. ۱۴۵-۱۴۹, ۱۹۷۰.
- [۱۹] M.E. Ghitany, D.K. Al-Mutairi and S. Nadarajah, "Zero-truncated Poisson-Lindley distribution and its application," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. ۷۹, no. ۳, pp., ۲۷۹-۲۸۷, ۲۰۰۸.
- [۲۰] J.J. Swain, S. Venkatraman and J.R. Wilson, "Least-squares estimation of distribution functions in johnson's translation system," *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. ۲۹, no. ۴, pp. ۲۷۱-۲۹۷, ۱۹۸۸.
- [۲۱] T. Duchesne, J. Rioux and A. Luong, "Minimum cramér-von mises distance methods for complete and grouped data" *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. ۲۶, no. ۲, pp., ۴۰۱-۴۲۰, ۱۹۹۷.
- [۲۲] R.C.H. Cheng and N.A.K. Amin, "Maximum Product-of-Spacings Estimation with Applications to the Lognormal Distribution," [Technical report]. Cardiff, UK: Department of Mathematics, University of Wales, ۱۹۹۷.
- [۲۳] R.C.H. Cheng and N.A.K. Amin, "Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin," *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, vol. ۳, pp. ۳۹۴-۴۰۳, ۱۹۸۳.
- [۲۴] E.T. Lee and J.W. Wang, "Statistical Methods for Survival Data Analysis," Wiley, New York, ۲۰۰۳.
- [۲۵] H. Linhart and W. Zucchini, "Model Selection," John Wiley, New York, USA, ۱۹۸۶.

