

حل عددی مدل اپیدمیک SIR به کمک روش تفاضل متناهی غیراستاندارد

عبدالرحمان یعقوبی^۱، هاشم صابری نجفی^{۲*}

^(۱) گروه ریاضی، واحد سراوان، دانشگاه آزاد اسلامی، سراوان، ایران

^(۲) گروه ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۷/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۲۶

چکیده

در این مقاله، یک حالت خاص از روش تفاضل متناهی که روش تفاضل متناهی غیراستاندارد نامیده می‌شود برای حل عددی یک مدل ریاضی از بیماری‌های اپیدمیک مورد مطالعه قرار گرفته است. طرح تفاضل متناهی غیر استاندارد ساخته شده دارای ویژگی‌های مهم مدل پیوسته از قبیل مثبت بودن، کران‌داری و پایداری می‌باشد. پایداری نقاط تعادل سیستم بررسی شده است. طرح تفاضل متناهی غیر استاندارد ارائه شده همگرا به نقاط تعادل مدل می‌باشد. در حل مسائل غیرخطی، یکی از مزایای مهم این روش گسسته‌سازی جملات غیرخطی با استفاده از تقریب‌های غیر محلی می‌باشد. در اغلب موارد فرمول‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد حتی وقتی اندازه طول گام شبکه بزرگ در نظر گرفته می‌شود پایدار هستند. لذا در سیستم‌های دینامیکی که در بازه‌های زمانی بزرگ مورد مطالعه قرار می‌گیرند استفاده از روش غیراستاندارد مقرون به صرفه خواهد بود. مثال‌های عددی دقت و کارایی روش تفاضل متناهی غیر استاندارد را تأیید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: روش تفاضل متناهی غیر استاندارد، پایداری، نقاط تعادل، بیماری‌های اپیدمیک.

1- مقدمه

$$y = 2y - y \rightarrow 2y_k - y_{k+1}$$

$$y^2 = yy \rightarrow y_k y_{k+1}$$

• گسسته‌سازی مشتقات مرتبه اول و دوم بصورت زیر انجام شود:

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{y_{k+1} - \psi(h)y_k}{\phi(h)}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \rightarrow \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\varphi(h)}$$

که $\psi(h)$ را تابع صورت و $\phi(h)$ و $\varphi(h)$ را توابع مخرج می‌نامند. توابع مخرج در حالت کلی باید توابع پیچیده‌تری از طول گام نسبت به فرم‌های متداول باشند. این توابع ممکن است به پارامترهای مختلفی که در معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شود وابسته باشند و دارای ویژگی‌های زیر می‌باشند:

$$0 < \psi(h) < 1, \quad \psi(h) = 1 + O(h) \quad (1)$$

$$0 < \phi(h) < 1, \quad \phi(h) = h + O(h^2) \quad (2)$$

$$0 < \varphi(h) < 1, \quad \varphi(h) = h^2 + O(h^4) \quad (3)$$

در دو دهه گذشته روش تفاضل متناهی غیراستاندارد مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته است و نتایج مهمی حاصل شده است [26-14]. پایداری نقاط تعادل معادلات دیفرانسیل یکی از این نتایج است زیرا نقش اساسی در مطالعه رفتار مجانبی معادلات دیفرانسیل دارد. ساختن فرمول‌های تفاضلی که ویژگی پایداری نقاط تعادل را حفظ کنند در شبیه سازی عددی معادلات دیفرانسیل دارای اهمیت زیادی است. در این مقاله مدل اپیدمیک SIR مورد مطالعه قرار گرفته است و یک طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد بگونه‌ای طراحی گردیده است که ویژگی‌های مهم مدل اصلی را حفظ نماید. بخش‌های باقیمانده این مقاله بصورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم، مدل ریاضی ارائه گردیده است. در بخش سوم، طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد طراحی شده است. در بخش چهارم تجزیه و تحلیل پایداری طرح پیشنهادی ارائه شده است. در بخش پنجم نتایج

بسیاری از پدیده‌ها و فرایندها در علوم مهندسی، فیزیک، شیمی و بسیاری از علوم دیگر با معادلات دیفرانسیل معمولی یا جزئی غیرخطی مدل سازی می‌شود. در حالت کلی، یافتن جواب تحلیلی این معادلات پیچیده است و بدست آوردن جواب دقیق مشکل و در برخی موارد غیرممکن است. بنابراین استفاده از روش‌های عددی برای تقریب این معادلات دیفرانسیل از اهمیت بالایی برخوردار است. روش تفاضل متناهی یکی از روش‌های عددی رایج برای تقریب معادلات دیفرانسیل است. در بسیاری از مسائل غیرخطی روش تفاضل متناهی دارای ناپایداری عددی است [3-1]. در حالت کلی طرح‌های تفاضل متناهی استاندارد ویژگی‌های معادلات دیفرانسیل متناظر مانند مثبت بودن و کرانداری جواب‌ها، پایداری و دیگر خواص مهم را در صورتی حفظ می‌کنند که اندازه طول گام شبکه به اندازه کافی کوچک باشد. بنابراین در مطالعه سیستم‌های دینامیکی در بازه‌های زمانی بزرگ، انتخاب طول گام کوچک حجم محاسبات را بسیار افزایش می‌دهد. علاوه براین در برخی از سیستم‌های دینامیکی روش تفاضل متناهی استاندارد با هر طول گامی ویژگی‌های مدل پیوسته متناظر را حفظ نمی‌کند. روش تفاضل متناهی غیراستاندارد که در دهه 1980 توسط رونالد میکنز [9-4] ارائه شد ویژگی‌های اصلی معادلات دیفرانسیل متناظر را حفظ می‌کند. این روش که حالت خاصی از روش تفاضل متناهی کلاسیک می‌باشد، یک ابزار قوی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌باشد. طرح‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد از پایداری و دقت بالاتری نسبت به روش تفاضل متناهی استاندارد برخوردار هستند [13-10]. یک فرمول تفاضل متناهی غیر استاندارد است اگر حداقل یکی از شرایط زیر را داشته باشد [6]:

- تقریب‌های غیرمحلّی استفاده شود. برای مثال:

(4) را تنها با حل دو معادله اول حل کنیم. $\tilde{R}(t)$ بوسیله معادله زیر بدست می‌آید.

$$\tilde{S}(t) + \tilde{I}(t) + \tilde{R}(t) = N \quad (5)$$

معادله (5) را قانون بقاء متناظر با سیستم (4) می‌نامیم. برای سادگی بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود قرار می‌دهیم:

$$S = \frac{\tilde{S}}{N}, \quad I = \frac{\tilde{I}}{N}, \quad R = \frac{\tilde{R}}{N}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S'(t) = \mu - \mu S(t) - N\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = N\beta S(t)I(t) - (\mu + \tau)I(t) \\ R'(t) = \tau I(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (6)$$

با قانون بقاء جدید:

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1 \quad (7)$$

با مساوی صفر قراردادن سمت راست دستگاه (6) نقاط تعادل مدل بدست می‌آید.

• نقطه تعادل فاقد بیماری

$$E_0 = (S_0, I_0, R_0) = (1, 0, 0)$$

• نقطه تعادل همه‌گیر

$$\begin{aligned} E_e &= (S_e, I_e, R_e) \\ &= \left(\frac{1}{R}, \frac{\mu}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{1}{R} \right), \frac{\tau}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{1}{R} \right) \right) \end{aligned}$$

که $R = \frac{N\beta}{\mu + \tau} > 1$ عدد پایه مدل می‌باشد.

3- طرح تفاضل متناهی غیر استاندارد

در این بخش یک طرح تفاضل متناهی غیر استاندارد می‌سازیم بطوری که فرمول تفاضلی حاصل با هر مقدار از اندازه طول گام $h > 0$ دارای ویژگی‌های مدل پیوسته اصلی باشد. ما طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد زیر را برای مدل (6) ارائه می‌کنیم:

عددی ارائه گردیده است و در بخش ششم نتیجه-گیری آورده شده است.

2- مدل ریاضی

بیماری‌های مسری از قبیل ایدز، سرخک، وبا، آنفلوانزا و ... از بزرگترین چالش‌های بشر می‌باشند. از اینرو مدل‌های ریاضی از الگوهای گسترش بیماری‌های مسری و ارزیابی استراتژی‌های کنترل بیماری، ابزارهای موثری در مبارزه با همه‌گیری یک بیماری واگیردار هستند. مدل مورد مطالعه در این مقاله که مورد مطالعه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است [27-30]، یک مدل همه‌گیر است که تعداد افراد مبتلا شده به یک بیماری مسری در یک جمعیت بسته در یک محدوده زمانی را محاسبه می‌کند. این مدل شامل جفت معادلاتی است که بین تعداد افراد مستعد مبتلا به بیماری، تعداد افراد مبتلا شده و تعداد افرادی که از بیماری بهبود یافته‌اند برقرار است. بنابراین در این مدل افراد به سه کلاس زیر تقسیم می‌شوند.

• $\tilde{S}(t)$ افراد مستعد مبتلا به بیماری در زمان t .

• $\tilde{I}(t)$ افراد مبتلا به بیماری در زمان t .

• $\tilde{R}(t)$ افراد بهبود یافته از بیماری در زمان t . فرض می‌شود که این کلاس دارای مصونیت می‌باشد.

این مدل بصورت سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی زیر می‌باشد [15].

$$\begin{cases} \tilde{S}'(t) = \mu N - \mu \tilde{S}(t) - \beta \tilde{S}(t)\tilde{I}(t) \\ \tilde{I}'(t) = \beta \tilde{S}(t)\tilde{I}(t) - (\mu + \tau)\tilde{I}(t) \\ \tilde{R}'(t) = \tau \tilde{I}(t) - \mu \tilde{R}(t) \end{cases} \quad (4)$$

که در آن β ضریب انتقال می‌باشد. μ نرخ مرگ و میر است و فرض بر این است که با سرعت زاد و ولد برابر است. τ سرعت بهبود از بیماری است. N جمعیت کل افراد مورد مطالعه است. چون فرض می‌شود تعداد کل افراد ثابت است می‌توانیم سیستم

آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 0 < S_{n+1} < 1, \quad 0 < I_{n+1} < 1 \\ 0 < R_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

اکنون نشان می‌دهیم نقاط ثابت سیستم (8) دقیقاً همان نقاط تعادل سیستم (6) می‌باشند. فرض کنید:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = I \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = R$$

با توجه به سیستم (10) داریم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{S+\phi\mu}{1+\phi\mu+\phi N\beta I} \\ I &= \frac{I(1+\phi N\beta S)}{1+\phi(\mu+\tau)} \\ R &= 1 - S - I \end{aligned}$$

با حل این سیستم بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (S, I, R) &= (1, 0, 0) \\ (S, I, R) &= \left(\frac{1}{R}, \frac{\mu}{\mu+\tau} \left(1 - \frac{1}{R} \right), \frac{\tau}{\mu+\tau} \left(1 - \frac{1}{R} \right) \right) \end{aligned}$$

این نقاط همان نقاط تعادل سیستم (6) هستند. بنابراین طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (8) به نقاط تعادل سیستم پیوسته (6) همگرا است.

4- تجزیه و تحلیل پایداری

در این بخش پایداری سیستم گسسته (8) را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با توجه به (10-ا) و (10-ب) توابع F و G را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(S, I) = \frac{\phi\mu+S}{1+\phi\mu+\phi N\beta I} \quad (11-ا)$$

$$G(S, I) = \frac{I+\phi N\beta I F(S, I)}{1+\phi(\mu+\tau)} \quad (11-ب)$$

ماتریس ژاکوبین F و G برابر است با:

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix}$$

رفتار مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین فرمول خطی شده در نقطه تعادل فاقد بیماری و در نقطه تعادل

$$\begin{cases} \frac{S_{n+1}-S_n}{\phi(h)} = \mu - \mu S_{n+1} - N\beta S_{n+1} I_n \\ \frac{I_{n+1}-I_n}{\phi(h)} = N\beta S_{n+1} I_n - (\mu + \tau) I_{n+1} \\ \frac{R_{n+1}-R_n}{\phi(h)} = \tau I_{n+1} - \mu R_{n+1} \end{cases} \quad (8)$$

که در آن تابع مخرج $\phi(h)$ در ویژگی (2) صدق می‌کند. از این پس برای سادگی در تابع $\phi(h)$ پارامتر h را حذف می‌کنیم.

3-1. ویژگی‌های طرح تفاضل متناهی غیر

استاندارد (8)

ابتدا نشان می‌دهیم سیستم گسسته (8) نیز در قانون بقاء صدق می‌کند. با جمع طرفین (8) بدست می‌آوریم:

$$S_{n+1} + I_{n+1} + R_{n+1} = \frac{\phi\mu+(S_n+I_n+R_n)}{1+\phi\mu} \quad (9)$$

بنابراین اگر برای هر $n \geq 0$

$$S_n + I_n + R_n = 1$$

آنگاه

$$S_{n+1} + I_{n+1} + R_{n+1} = 1$$

لذا قانون بقاء (7) در حالت گسسته نیز برقرار است. پس از مرتب کردن (8) سیستم زیر بدست می‌آید.

$$S_{n+1} = \frac{S_n+\phi\mu}{1+\phi\mu+\phi N\beta I_n} \quad (10-ا)$$

$$I_{n+1} = \frac{I_n(1+\phi N\beta S_{n+1})}{1+\phi(\mu+\tau)} \quad (10-ب)$$

$$R_{n+1} = 1 - S_{n+1} - I_{n+1} \quad (11-ب)$$

در صورتی که برای هر $n \geq 0$ داشته باشیم:

$$0 < S_n < 1, \quad 0 < I_n < 1, \quad 0 < R_n < 1$$

ویژگی مثبت بودن S_{n+1} و I_{n+1} و R_{n+1} تضمین می‌شود. بنابراین سیستم گسسته (8) در قانون بقاء صدق می‌کند. در شرط مثبت بودن وکرانداری نیز صدق می‌کند به عبارت دیگر اگر برای هر $n \geq 0$ داشته باشیم:

$$0 < S_n < 1, \quad 0 < I_n < 1, \quad 0 < R_n < 1$$

$$J(1, 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\phi\mu} & -\frac{\phi N\beta}{1+\phi\mu} \\ 0 & \frac{1+\phi N\beta}{1+\phi(\mu+\tau)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

اگر $R < 1$ باشد یعنی $N\beta < \mu + \tau$ آنگاه صرف نظر از اندازه طول گام h ، شعاع طیفی $J(1, 0)$ بطور اکید از یک کمتر است. بنابراین اگر $R < 1$ باشد با هر مقدار آغازین

$$R_0 > 0 \text{ و } I_0 \geq 0, S_0 \geq 0$$

که $S_0 + I_0 + R_0 = 1$ ، نقطه تعادل فاقد بیماری $(S_0, I_0) = (1, 0)$ بطور مجانبی پایدار محلی است. اگر $R > 1$ باشد سیستم (8) دارای یک نقطه تعادل همه گیر است. بنابراین با محاسبه ژاکوبین در نقطه تعادل $(S_e, I_e) = \left(\frac{1}{R}, \frac{\mu}{\mu+\tau}\left(1 - \frac{1}{R}\right)\right)$ داریم:

$$J(S_e, I_e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\phi\mu R} & \frac{\phi\mu(R-1)}{(1+\phi\mu R)\left(1+\frac{\phi N\beta}{R}\right)} \\ -\frac{(\phi\mu+\frac{1}{R})\phi N\beta}{(1+\phi\mu R)^2} & \frac{1}{1+\frac{\phi N\beta}{R}}\left(1 + \frac{(\phi\mu+\frac{1}{R})\phi N\beta}{1+\phi\mu R} - \frac{(\phi\mu(R-1))\left((\phi\mu+\frac{1}{R})\phi N\beta\right)}{(1+\phi\mu R)^2}\right) \end{bmatrix}$$

تعریف می کنیم:

$$A = tr(J(S_e, I_e)) = \frac{(1+\phi\mu R)\left(1+\frac{\phi N\beta}{R}\right) + (1+\phi\mu R)^2 + (1+\phi\mu)\left(\phi\mu+\frac{1}{R}\right)\phi N\beta}{(1+\phi\mu R)^2\left(1+\frac{\phi N\beta}{R}\right)}$$

$$> 0$$

$$B = \det(J(S_e, I_e)) = \frac{1+\phi\mu R + (\phi\mu+\frac{1}{R})\phi N\beta}{(1+\phi\mu R)^2\left(1+\frac{\phi N\beta}{R}\right)} > 0$$

تابع $f(\lambda)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(\lambda) = \lambda^2 - A\lambda + B$$

توجه کنید که $f(\lambda)$ همان معادله مشخصه $J(S_e, I_e)$ می باشد. اکنون کافی است نشان دهیم

فراگیر را بررسی می کنیم. نقطه تعادل (S, I) سیستم تفاضل متناهی غیراستاندارد (8) بطور مجانبی پایدار محلی است اگر و تنها اگر شعاع طیفی ژاکوبین $J(S, I)$ در نقطه تعادل، در شرط $\rho(J) < 1$ صدق نماید.

لم 4-1. هر دو ریشه معادله درجه دوم

$$f(\lambda) = \lambda^2 - A\lambda + B = 0$$

در شرط $|\lambda_i| < 1$ ، $i = 1, 2$ صدق می کند اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد.

- $f(-1) = 1 + A + B > 0$
- $f(0) = B < 1$
- $f(1) = 1 - A + B > 0$

برهان. به [31] مراجعه شود.

قضیه 4-1. اگر $R < 1$ باشد آنگاه نقطه تعادل $(S_0, I_0) = (1, 0)$ از سیستم تفاضل متناهی غیر استاندارد (8) بطور مجانبی پایدار محلی است. همچنین اگر $R > 1$ باشد آنگاه نقطه تعادل

$$(S_e, I_e) = \left(\frac{1}{R}, \frac{\mu}{\mu+\tau}\left(1 - \frac{1}{R}\right)\right)$$

بطور مجانبی پایدار محلی است.

برهان. نقطه تعادل سیستم (8) را با (S_*, I_*) نشان می دهیم. با محاسبه $J(S, I)$ در نقطه (S_*, I_*) ماتریس زیر بدست می آید.

$$J(S_*, I_*) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\phi\mu+\phi N\beta I_*} & \frac{\phi N\beta I_*}{1+\phi\mu+\phi N\beta I_*} \\ -\frac{(\phi\mu+S_*)\phi N\beta}{(1+\phi\mu+\phi N\beta I_*)^2} & \frac{1+\phi N\beta F(S_*, I_*) - I_*\frac{(\phi N\beta)^2(\phi\mu+S_*)}{(1+\phi\mu+\phi N\beta I_*)^2}}{1+\phi(\mu+\tau)} \end{bmatrix}$$

در نقطه $(S_0, I_0) = (1, 0)$ داریم:

$$R_0 > 0 \text{ و } I_0 > 0, S_0 > 0$$

شرایط لم 1-4 برقرار است. چون A و B مثبت هستند داریم:

$$f(-1) = 1 + A + B > 0$$

چون $\frac{1}{1+\phi\mu R} < 1$ داریم:

$$\begin{aligned} f(0) = B &= \frac{1}{(1+\phi\mu R)\left(1+\frac{\phi N\beta}{R}\right)} \\ &+ \frac{\left(\phi\mu + \frac{1}{R}\right)\phi N\beta}{(1+\phi\mu R)^2\left(1+\frac{\phi N\beta}{R}\right)} < \frac{1}{(1+\phi\mu R)\left(1+\frac{\phi N\beta}{R}\right)} \\ &+ \frac{\left(\phi\mu + \frac{1}{R}\right)\phi N\beta}{(1+\phi\mu R)\left(1+\frac{\phi N\beta}{R}\right)} \quad (14) \\ &= \frac{1+\phi^2\mu N\beta + \frac{\phi N\beta}{R}}{1+\phi^2\mu N\beta + \frac{\phi N\beta}{R} + \phi\mu R} < 1 \end{aligned}$$

با فرض

$$\begin{aligned} a &= 1 + \phi\mu R \\ b &= 1 + \frac{\phi N\beta}{R} \\ c &= \phi\mu(R-1) \\ d &= \left(\phi\mu + \frac{1}{R}\right)\phi N\beta \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} a^2b + a + d &= 1 + \frac{2\phi N\beta}{R} + 3\phi\mu R \\ &+ 3\phi^2\mu N\beta + \phi^2\mu^2R^2 + \phi^3\mu^2N\beta R \\ &= a^2 + ab + ad \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 1 + B &= 1 + \frac{1}{ab} + \frac{d}{a^2b} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{d}{ab} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{d}{ab} - \frac{cd}{a^2b} \\ &= \frac{ab+a^2+(a-c)d}{a^2b} = A \end{aligned}$$

در نتیجه بدست می‌آوریم:

$$f(1) = 1 - A + B > 0 \quad (15)$$

از (13)، (14) و (15) ملاحظه می‌شود که تمام شرایط لم 1-4 برقرار است. بنابراین صرف نظر از اندازه طول گام h وقتی که $R > 1$ قدر مطلق مقادیر ویژه $J(S_e, I_e)$ بطور اکید از یک کوچکتر می‌باشد. لذا با هر مقدار آغازین

که $S_0 + I_0 + R_0 = 1$ برای هر $h > 0$ نقطه تعادل همه‌گیر بطور مجانبی پایدار محلی است.

5- نتایج عددی

در این بخش برای تایید نتایج تئوری بدست آمده در بخش‌های قبل و اثبات کارایی روش تفاضل متناهی غیراستاندارد، مثال‌های عددی ارائه می‌شود. ابتدا باید یک تابع مخرج مناسب پیدا نماییم. می‌کنز برای ϕ توابع زیر را در نظر گرفته است [6]. $\sinh(h), \sin(h), 1 - e^{-h}, e^h - 1, h$

با جمع طرفین سیستم (8) داریم:

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = \mu - \mu(S(t) + I(t) + R(t))$$

با فرض $y = S(t) + I(t) + R(t)$ معادله دیفرانسیل زیر را داریم:

$$y' = \mu - \mu y \quad (16)$$

معادله تفاضلی دقیق متناظر با (16) برابر است با [6]:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\frac{1 - e^{-\mu h}}{\mu}} = \mu - \mu y_n \quad (17)$$

بنابراین سازنده خواهد بود اگر قرار دهیم:

$$\phi = \frac{1 - e^{-\mu h}}{\mu}$$

واضح است که ϕ در ویژگی (2) صدق می‌کند. بنابراین دو معادله اول طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (8) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{S_{n+1} - S_n}{\frac{1 - e^{-\mu h}}{\mu}} = \mu - \mu S_{n+1} - N\beta S_{n+1} I_n \\ \frac{I_{n+1} - I_n}{\frac{1 - e^{-\mu h}}{\mu}} = N\beta S_{n+1} I_n - (\mu + \tau) I_{n+1} \end{cases} \quad (18)$$

تفاضل متناهی غیراستاندارد (18) با مقادیر طول گام $h = 0/1, 1, 10, 100$ و پارامترهای (19) به نقطه تعادل $(S_0, I_0) = (1, 0)$ نشان داده شده است. در شکل 6 جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی (6) با استفاده از دستور ode45 در نرم افزار متلب نشان داده شده است. شکل‌های 1 تا 4 نشان می‌دهند وقتی $R < 1$ است طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد ارائه شده بدون توجه به مقدار طول گام h ، به نقطه تعادل فاقد بیماری همگرا می‌شود.

مثال (1): اگر پارامترهای سیستم (18) را بصورت زیر انتخاب کنیم [32]

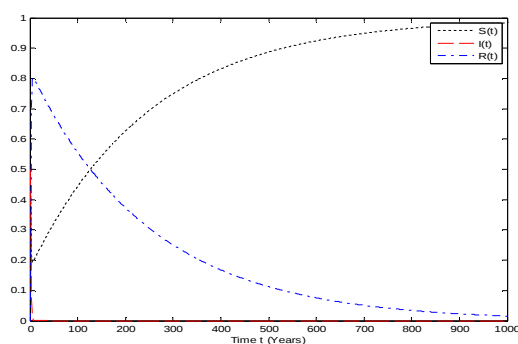
$$\mu = 0/04, \tau = 24, N\beta = 15$$

$$S_0 = I_0 = 0/5 \quad (19)$$

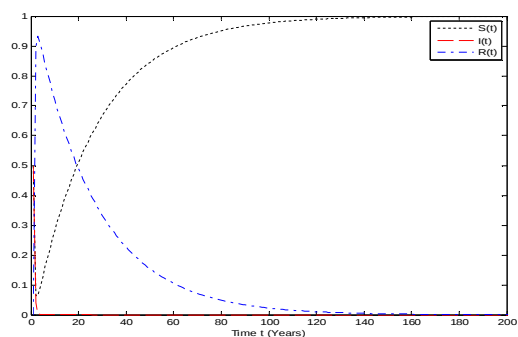
خواهیم داشت:

$$R = \frac{N\beta}{\mu + \tau} < 1$$

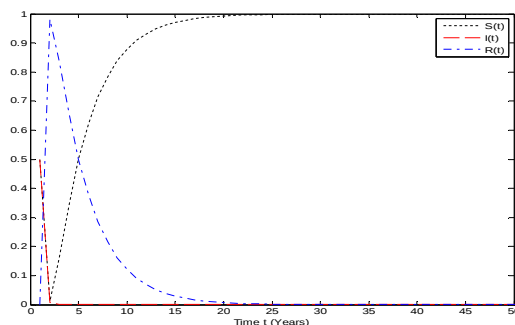
لذا بنا به قضیه 1-4 طرح تفاضل متناهی غیر استاندارد (18) به نقطه تعادل $(S_0, I_0) = (1, 0)$ همگرا می‌شود. در شکل‌های 1 تا 5 همگرایی طرح



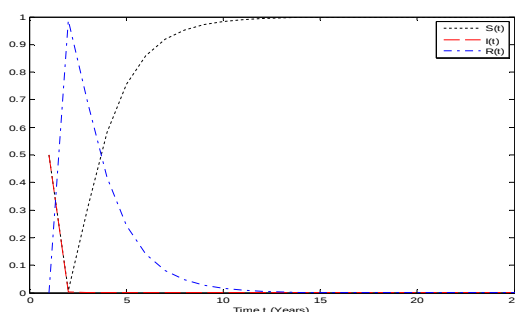
شکل 1. همگرایی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (18) با پارامترهای (19) با $h = 0/1$ به نقطه تعادل $(S_0, I_0, R_0) = (1, 0, 0)$.



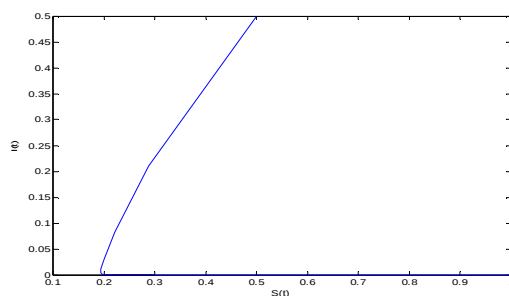
شکل 2. همگرایی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (18) با پارامترهای (19) با $h = 1$ به نقطه تعادل $(S_0, I_0, R_0) = (1, 0, 0)$.



شکل 3. همگرایی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (18) با پارامترهای (19) با $h = 10$ به نقطه تعادل $(S_0, I_0, R_0) = (1, 0, 0)$.



شکل 4. همگرایی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (18) با پارامترهای (19) با $h = 100$ به نقطه تعادل $(S_0, I_0, R_0) = (1, 0, 0)$.



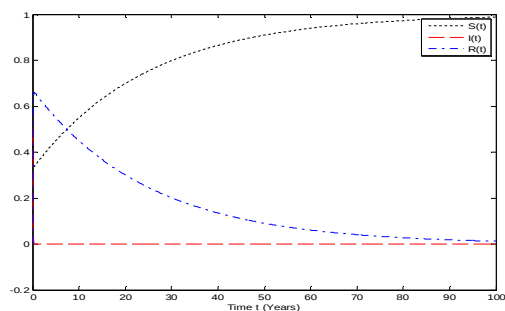
شکل 5. چرخه همگرا به نقطه تعادل $(S_0, I_0) = (1, 0)$ با پارامترهای (19) و $h = 0/1$.

گام $h = 0/1, 1, 10, 100$ و پارامترهای (20) به نقطه تعادل $(S_e, I_e) = (0/1954, 0/0013)$ نشان داده شده است. در شکل 12 جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی (6) با استفاده از دستور ode45 در نرم افزار متلب نشان داده شده است. شکل‌های 7 تا 10 نشان می‌دهند وقتی $R > 1$ است طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد ارائه شده بدون توجه به مقدار طول گام h ، به نقطه تعادل همه‌گیر (S_e, I_e) همگرا می‌شود.

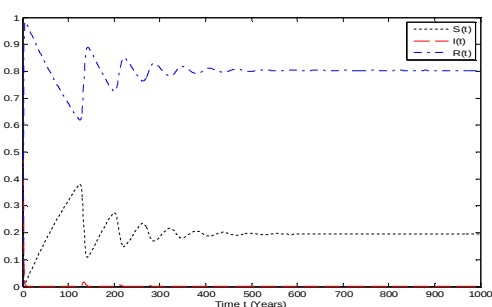
مثال (2): اگر پارامترهای سیستم (18) را بصورت زیر انتخاب کنیم [32]

$$\mu = 0/04, \tau = 24, N\beta = 123 \quad (20)$$

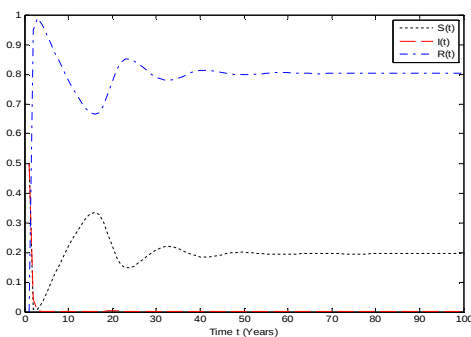
در این حالت $R = \frac{N\beta}{\mu + \tau} > 1$ و بنا به قضیه 4-1، سیستم (18) به نقطه تعادل همه‌گیر (S_e, I_e) همگرا می‌شود. در شکل‌های 7 تا 11 همگرایی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (18) با مقادیر طول



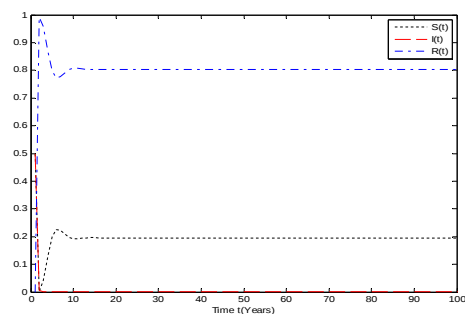
شکل 6. جواب مدل غیرخطی (6) با پارامترهای (19) و با استفاده از دستور ode45 در نرم افزار متلب.



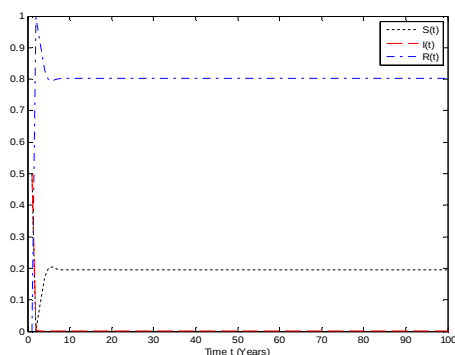
شکل 7. همگرایی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (18) با پارامترهای (20) با $h = 0/1$, $S_0 = I_0 = 0/5$ به نقطه تعادل $(S_e, I_e, R_e) = (0/1954, 0/0013, 0/8033)$



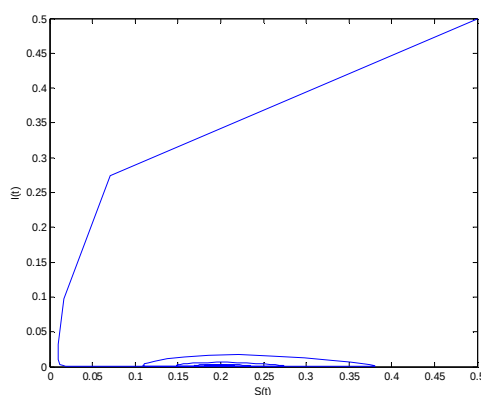
شکل 8. همگرایی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (18) با پارامترهای (20) با $h = 1$, $S_0 = I_0 = 0/5$ به نقطه تعادل $(S_e, I_e, R_e) = (0/1954, 0/0013, 0/8033)$



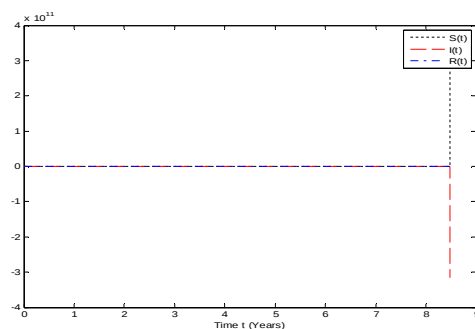
شکل 9. همگرایی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (18) با پارامترهای (20) با $h = 10$, $S_0 = I_0 = 0/5$ به نقطه تعادل $(S_e, I_e, R_e) = (0/1954, 0/0013, 0/8033)$



شکل 10. همگرایی طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد (18) با پارامترهای (20) با $S_0 = I_0 = 0/5$ ، $h = 100$ به نقطه تعادل $(S_e, I_e, R_e) = (0/1954, 0/0013, 0/8033)$



شکل 11. چرخه همگرا به نقطه تعادل $(S_e, I_e) = (0/1954, 0/0013)$ با پارامترهای (20) با $h = 0/1, S_0 = I_0 = 0/5$



شکل 12. جواب مدل غیرخطی (6) با پارامترهای (20) با $S_0 = I_0 = 0/5$ استفاده از دستور ode45 در نرم افزار متلب.

در مثال 1، طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد پیشنهادی و روش ode45 هر دو به نقطه تعادل $(S_0, I_0, R_0) = (1, 0, 0)$ همگرا می‌شوند اما در مثال 2، طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد با هر طول گام دلخواه به نقطه تعادل همه‌گیر

نتیجه‌گیری
در این مقاله کارایی روش تفاضل متناهی

غیراستاندارد برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی نشان داده شده است. فرمول ساخته شده ویژگی‌های مدل پیوسته از قبیل پایداری، کرانداری و مثبت بودن جواب‌ها را حفظ می‌کند. با توجه به اینکه جواب تحلیلی مدل SIR معلوم نیست، طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد ارائه شده با نتایج حاصل از دستور ode45 در نرم افزار متلب که مبتنی بر روش رانگ-کوتا مرتبه چهار می‌باشد مقایسه شده است. نتایج عددی حاصل از طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد ارائه شده در این مقاله صرف‌نظر از اندازه طول گام h ، به نقاط تعادل مدل همگرا است. لذا در سیستم‌های دینامیکی که دارای بازه زمانی بزرگ می‌باشند جهت کاهش حجم محاسبات می‌توان اندازه طول گام را به قدر کافی بزرگ انتخاب کرد. این یک مزیت بسیار خوب می‌باشد برتری دیگر این روش نسبت به روش‌های عددی دیگر مانند روش تفاضل متناهی کلاسیک مربوط به نحوه گسسته‌سازی جملات غیرخطی در معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌باشد. در روش تفاضل متناهی غیراستاندارد جملات غیرخطی بصورت غیرمحلی گسسته‌سازی می‌شود. همچنین در فرمول‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد در صورتی که توابع مخرج بطور مناسب انتخاب شوند رفتار پایداری بهتری نسبت به فرمول‌های تفاضل متناهی استاندارد دارند و از دقت خوبی برخوردار هستند. ویژگی دیگر این فرمول‌ها سادگی کاربرد آنها در حل مدل‌های غیرخطی است. این روش یک ابزار قوی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌باشد. ضعف روش تفاضل متناهی غیراستاندارد این است که در مواردی که یافتن فرمول تفاضلی دقیق ممکن نیست تاکنون روش مشخصی برای یافتن بهترین تابع مخرج ارائه نشده است.

- [9] Ronald E. Mickens, (2007), Determination of Denominator Functions for a NSFD Scheme for the Fisher PDE with Linear Advection, *Mathematics and Computers in Simulation*. 74, 190-195.
- [10] Najafi, H. S., Yaghoubi, A. R., (2014), Solving Dynamic Equation by the Non-Standard Finite Difference Method, *Journal of Computer Science & Computational Mathematics*, 4 (4), 57-60.
- [11] Yaghoubi, A. R., Najafi, H. S., (2015), Comparison Between Standard and Non-standard Finite Difference Methods for Solving First and Second Order Ordinary Differential Equations, *International Journal of Applied Mathematical Research*, 4 (2), 316-324.
- [1] R. E. Mickens, (1994), Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations, *World Scientific, Singapore*.
- [2] R. E. Mickens, (2000), Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes, *World Scientific, Singapore*.
- [3] Ronald E. Mickens, (2001), A Nonstandard Finite Difference Scheme for a Nonlinear PDE Having Diffusive Shock Wave Solutions, *Mathematics and Computers in Simulation*. 55, 549-555.
- [4] Ronald E. Mickens, (2003), A Nonstandard Finite Difference Scheme for a Fisher PDE Having Nonlinear Diffusion, *Diffusion, Comput. Math. Appl.* 45, 429-436.
- [5] R. E. Mickens, (2005), Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 8, No. 9, pp. 823-847
- [6] Ronald E. Mickens, (2005), *Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*, World Scientific, Singapore.
- [7] Ronald E. Mickens, (2005), A Nonstandard Finite Difference Scheme for a PDE Modeling Combustion with Nonlinear Advection and Diffusion, *Mathematics and Computers in Simulation*. 69, 439-446.
- [8] Ronald E. Mickens, (2006), Calculation of Denominator Functions for Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Equations Satisfying a Positivity Condition, *Wiley Inter Science*, 23 (3), 672-691.