دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حل‌پذیری معادلات انتگرال-دیفرانسیل تابعی در فضای سوبولوف $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$

معصومه حسینی فرهی[۱]، محمود حسنی[۲]، رضا الهیاری[۳*]

[۱و۲و۳] گروه ریاضیات، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۲/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۲/۲۳

چکیده

روش اندازه‌های نافشردگی اغلب درچندین شاخه آنالیزغیرخطی قابل اجرا است. به‌ویژه، این روش به عنوان ابزاری بسیار مفید برای چندین نوع از انواع معادلات انتگرالی و انتگرال دیفرانسیلی است. علاوه بر این، اندازه نافشردگی در معادلات تابعی، معادلات-دیفرانسیل جزئی کسری، معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، نظریه عملگر و نظریه کنترل بهینه نیز استفاده می‌شود. هدف این مقاله معرفی یک اندازه نافشردگی جدید درفضای سوبولف $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ است. نتایج بدست آمده در حل معادلات-انتگرال دیفرانسیلی بکار می‌رود. در پایان نیز با ارائه یک مثال کارایی نتایج حاصل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: اندازه‌های نافشردگی، قضیه نقطه ثابت داربو، معادلات انتگرال- دیفرانسیل، فضاهای سوبولوف، شرایط کاراتئودوری.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: rezaallhyari@mshdiau.ac.ir

۱. مقدمه

معادلات انتگرال دیفرانسیلی (IDE) کاربرد زیادی درشاخه‌های مختلف علوم و مهندسی مانند نظریه الاستیک، بیومکانیک، الکترومغناطیسی، الکترودینامیک، دینامیک سیال، انتقال گرما و جرم، نوسان میدان مغناطیسی و غیره دارند. مراجع [۱و۲و۳و۴] را ملاحظه کنید.

بسیاری از مقالات به مطالعه (IDE) و نسخه‌های آن با استفاده ازتکنیک‌های مختلف پرداخته‌اند. به عنوان مثال، روش تئو، روش‌های مستقیم، روش رانگ کوتا، روش‌های موجک و تقریب اسپلاین (برای مثال [۵و۶و۷] و منابع موجود را ببینید.)

در سال ۱۹۳۰، کراتوسکی [۸] مفهوم اندازه نا فشردگی را معرفی کرد. بعدها، بنس و گوبل [۹] این مفهوم را تعمیم دادندکه کارایی بیشتری دارد. ابزاراندازه‌های نافشردگی در نظریه معادلات عملگری در فضاهای باناخ استفاده شده است. قضایای نقطه ثابت حاصل از آنها کاربرد فراوانی دارند.

سابقه قابل توجهی پیرامون این موضوع وجود دارد. (به عنوان مثال مراجع [۱۸و۱۷و۱۶و۱۵و۱۴و۱۳و۱۲و۱۱و۱۰] را ببینید.) کاربرد اصلی اندازه‌های نافشردگی در نظریه نقطه ثابت، درقضیه نقطه ثابت داربو [۱۹] است. این یک ابزار برای بررسی وجود و رفتار جواب از تعدادی معادلات انتگرال مانند انواع ولترا، فردهولم و اوریسون است. (مراجع [۲۶و۲۵و۲۴و۲۳و۲۲و۲۱و۲۰و۱۵] را ببینید.)

اخیرا، بسیاری ازمحققان پژوهش‌های خود را بر روی مطالعه ساختارهای جدید اندازه‌های نافشردگی روی $BC(\mathbb{R}_+)$, $BC(\Omega)$, $C_p(\mathbb{R}_+)$, $C(\mathbb{R}_+)$ و سایر $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $BC^n(\mathbb{R}_+)$, $C^k_0(\Omega)$ فضاهای فرشه و باناخ متمرکز کرده‌اند (برای مثال، مراجع [۲۸و۲۷و۲۴و۱۷و۱۳و۹] و سایرمنابع موجود را ببینید) و همچنین ازاین اندازهای نافشردگی جدید برای بررسی وجود جواب معادلات انتگرالی و انتگرال دیفرانسیل استفاده کرده‌اند.

فضاهای سوبولوف توابعی بامشتقات در L^p هستند که نقش برجسته‌ای در آنالیز مدرن، به‌ویژه در نظریه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و کاربردهای آن در فیزیک ریاضی ایفا می‌کنند. همچنین یک ابزار ضروری در نظریه تقریب، نظریه طیفی، هندسه دیفرانسیل و غیره می‌باشند (مراجع [۳۰و۲۹] را ببینید).

این مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. بخش دو شامل نمادها و قضایای شناخته شده اولیه است. در بخش ۳، یک اندازه نافشردگی جدیدی را در فضای سوبولف $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ معرفی می‌کنیم. بخش ۴ به کاربرد نتایج بدست آمده درحل معادلات انتگرال–دیفرانسیل تابع

$$\begin{aligned}&u(x)=p(x)+q(x)u(x)\\&+\int_{\Omega'}k(x-\gamma(y))g(\gamma(y),u(\gamma(y)),\\&\frac{\partial u}{\partial x_1}(\gamma(y)),\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}(\gamma(y)))dy\end{aligned} \qquad (4\text{-}1)$$

اختصاص دارد که در آن $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$. در نهایت، جهت نشان دادن‌کارایی و سودمندی نتایج، یک مثال ارائه شده‌است.

۲. نمادها و قضایای اولیه

درسراسر این مقاله، $\mathbb{R}_+$ بازه $[0,+\infty)$ را نشان می‌دهد و برای زیر مجموعه اندازه‌پذیر لبگ D، $m(D)$ اندازه لبگ روی D رانشان می‌دهد. فرض کنید $(E,\|.\|)$ فضای باناخ حقیقی باشد. نماد $\overline{B}(x,r)$ گوی بسته به مرکز x و شعاع r رانشان می‌دهد. همچنین قرارمی‌دهیم $\overline{B_r}=\overline{B}(0,r)$. خانواده تمام زیر مجموعه‌های‌ناتهی و کران‌دا ر از E را با M_E و نیز خانواده تمام مجموعه‌های فشرده نسبی E را با N_E نشان می‌دهیم. نمادهای $\overline{X}$ و Conv X به ترتیب بستار و غلاف محدب بسته X را نشان می‌دهند که در آن X زیر مجموعه‌ای ناتهی از E می‌باشد.

تعریف ۲-۱. نگاشت $\mu: M_E \to \mathbb{R}_+$ اندازه نافشردگی در E گفته می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱- *خانواده* $\ker\mu=\{X\in\mathfrak{M}_E:\mu(X)=0\}$ *ناتهی باشد و* $\ker\mu\subseteq\mathfrak{N}_E$ ، ۲- $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \le \mu(Y)$.

۳- $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$.

۴- $\mu(ConvX) = \mu(X)$.

۵- به ازای هر $\lambda \in [0,1]$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y),$$

۶- اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته از $\mathfrak{M}_E$ باشد به‌طوری که برای هر $n=1,2,\cdots$ $X_{n+1} \subset X_n$ و $\lim_{n\to\infty}\mu(X_n)=0$، آن‌گاه $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$. [۹]

در ادامه، قضیه معروف نقطه ثابت داربو را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۲-۱. فرض‌کنید Ω یک زیرمجموعه ناتهی کران‌دار بسته و محدب از فضای باناخ E و $F:\Omega \to \Omega$ نگاشتی پیوسته باشد به‌طوری که ثابت $k \in [0,1)$ وجود داشته باشد بطوریکه خاصیت $\mu(FX) \le k\,\mu(X)$ به ازای هر زیرمجموعه ناتهی X از Ω برقرار باشد که در آن μ اندازه نافشردگی تعریف شده در E است. در این صورت F دارای نقطه ثابت در مجموعه Ω است. [۱۹]

۳. یک اندازه نا فشردگی در فضای سوبولوف

دراین بخش، یک اندازه نا فشردگی در فضای سوبولوف $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $k \in \mathbb{N}$. فضای توابع f همراه با تمام مشتقات توزیع $D^\alpha f$ از مرتبه $0 \le |\alpha| \le k$ که متعلق به $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ را را با نماد $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ نشان می‌دهیم. که در آن، $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ بطوریکه هر یک از α_jها $(j = 1, \dots, n)$ عددی صحیح نامنفی است و $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ و $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

فضای $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ مجهز به نرم کامل زیر است
عددی صحیح نامنفی است و
$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ و $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.
فضای $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ مجهز به نرم کامل زیر است

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \quad (4\text{-}1)$$

یک مشخصه سازی برای زیر مجموعه‌های فشرده در فضاهای سوبولوف در قضیه زیر ارائه شده‌است.

قضیه ۳-۱. مجموعه کراندار $\mathcal{F} \subset W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ دارای بستار فشرده است اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱- به ازای هر $\varepsilon > 0$ وهر $T > 0$، $\delta > 0$ چنان موجود است بطوریکه به‌ازای هر $x \in \mathcal{F}$ $0 \le |\alpha| \le k$، $\|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ داشته باشیم:

$$\left|\tau_h D^\alpha x(t) - D^\alpha x(t)\right| < \varepsilon,$$

تقریبا همه جا روی $\overline{B_T}$.

که در آن $\tau_h x(t) = x(t+h)$ و $\overline{B_T} = \{t \in \mathbb{R}^n : \|t\|_{\mathbb{R}^n} \le T\}$.

۲- به‌ازای $\varepsilon > 0$، $T > 0$ چنان موجود است‌که به ازای هر $x \in \mathcal{F}$ و $0 \le |\alpha| \le k$

$$|D^\alpha x(t)| < \varepsilon,$$

تقریب همه جا روی $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_T}$.

لم زیر جهت اثبات قضیه فوق استفاده می‌شود.

لم ۳-۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ و فضای متریک (W, d_1) و نگاشت $\Phi: X \to W$ به طوری که $\Phi[X]$ کراندار کلی باشد بطوریکه اگر به ازای $x, y \in X$ که $d_1(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta$، آن‌گاه $d(x,y) < \varepsilon$. دراین‌صورت X کراندارکلی‌است. [۳۱]

اثبات. (اثبات قضیه ۳-۱): فرض کنید $\varepsilon > 0$. با استفاده از شرایط ۱و ۲، $T > 0$و $\delta > 0$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $\|t\|_{\mathbb{R}^n} > T$، تقریبا همه جا $|D^\alpha x(t)| < \varepsilon$ و به ازای هر $\|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ و $t \in \overline{B_T}$، تقریبا همه جا $\left|\tau_h D^\alpha x(t) - D^\alpha x(t)\right| \le \varepsilon$.
خانواده‌ای از مجموعه‌های مجزای متناهی مانند $U_1, \dots, U_n$ را می‌توان یافت که $diam\, U_i \le \delta$ و

بستار $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ شامل $\overline{B_T}$ باشد. حال $t_i \in U_i$ را انتخاب کرده و نگاشت $\Phi: \mathcal{F} \to \mathbb{R}^{n(L+1)}$، با ضابطه $(\{\alpha: |\alpha| \le k\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L\})$ زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\Phi(x) = \left(x(t_1), \dots, x(t_n), D^{\beta_1}x(t_1), \dots, D^{\beta_1}x(t_n), \dots, D^{\beta_L}x(t_n)\right).$$

با توجه به کرانداری $\mathcal{F}$، تصویر $\Phi[\mathcal{F}]$ کراندار است و از این رو در $\mathbb{R}^{n(L+1)}$ به طورکراندار کلی می‌باشد. به علاوه، اگر به ازای $x, y \in \mathcal{F}$ که $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{\mathbb{R}^{n(L+1)}} < \varepsilon$، آن‌گاه به ازای هر $\mathrm{i} = 1, \dots, n$ و هر α که $0 \le |\alpha| \le k$ داریم:

حالت اول: اگر $x \in \bar{B}_T$، آن‌گاه چون هر $x \in \bar{B}_T$ متعلق به U_i است، نامساوی‌های زیر را بدست می‌آوریم:

$$|D^\alpha x(t) - D^\alpha y(t)| \le |D^\alpha x(t) - D^\alpha x(t_i)| + |D^\alpha x(t_i) - D^\alpha y(t_i)| + |D^\alpha y(t_i) - D^\alpha y(t)| \le 3\varepsilon.$$

حالت دوم: اگر $t \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_T}$، آن‌گاه

$$\left|D^\alpha x(t) - D^\alpha y(t)\right| \le \left|D^\alpha x(t)\right| + \left|D^\alpha y(t)\right| \le 2\varepsilon.$$

در نتیجه با توجه به

$$\|x\|_{k,\infty} = \max_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha x\|_{L^\infty}$$

داریم

$$\|x - y\|_{W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le \|x - y\|_{W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_T})} + \max_{1\le i\le n} \|x - y\|_{W^{k,\infty}(U_i)} \le 5\varepsilon.$$

بنابراین طبق لم ۳-۲، $\mathcal{F}$ کراندار کلی است.

اکنون به ارائه تعریف اندازه جدید نافشردگی روی فضای سوبولف $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ می‌پردازیم. فرض کنید X زیر مجموعه کراندار از فضای $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ باشد. به ازای $x \in X$، $\varepsilon > 0$ و $0 \le |\alpha| \le k$ نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم.

$$\omega^T(x, \varepsilon) = \sup\{\|\tau_h D^\alpha x - D^\alpha x\|_{L^\infty(\overline{B_T})} : h \in \mathbb{R}^n, \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon,\ 0 \le |\alpha| \le k\},$$

$$\omega^T(X, \varepsilon) = sup\{\omega^T(x, \varepsilon) : x \in X\},$$

$$\omega^T(X) = \lim_{\varepsilon\to 0} \omega^T(X, \varepsilon),$$

$$\omega(X) = \lim_{T\to\infty} \omega^T(X),$$

$$\mathrm{d}_T(X) = \sup\{\|\tau_h D^\alpha x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_T})} : x \in X, 0 \le |\alpha| \le k\},$$

$$\mathrm{d}(X) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{d}_T(X),$$

$$\omega_0(X) = \omega(X) + \mathrm{d}(X).$$

قضیه ۳-۳. تابع ω_0 که $\omega_0: M_{W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)} \to \mathbb{R}$، یک اندازه نافشردگی روی $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ است.

اثبات. به منظور اثبات این قضیه ابتدا نشان می‌دهیم ω_0 در شر ط ۱ از تعریف ۲-۱ صدق می‌کند. فرض کنید $X \in M_{W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)}$ به طوری که $\omega_0(X) = 0$. اسکالر ثابت و دلخواه α را در نظر بگیرید به طوری که $0 \le |\alpha| \le k$. چون $\omega_0(X) = 0$، لذا $\lim_{T\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \omega^T(X, \varepsilon) = 0$. بنابراین به ازای هر $\eta > 0$، T' و $\delta > 0$ چنان موجودند که به ازای هر $T > T'$، داریم $\omega^T(X, \delta) < \eta$ و این نیز نامساوی زیر را تقریبا همه جا روی $\bar{B}_T$ و به ازای هر $x \in X$ و هر $h \in \mathbb{R}^n$ که $\|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ ، ایجاب می‌کند.

$$|D^\alpha x(t + h) - D^\alpha x(t)| < \eta.$$

از طرف دیگر، هرگاه $T < T'$، حکم به وضوح برقرار است. از این رو، X در شرط ۱ از قضیه ۳-۱ صدق می‌کند. با استفاده مجدد از $\omega_0(X) = 0$ داریم

$$\lim_{T\to\infty} \sup\{\left|D^\alpha x(t)\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_T})} : x \in X,\ 0 \le |\alpha| \le k\} = 0.$$

پس به ازای $\varepsilon > 0$، $T > 0$ وجود دارد به طوری که تقریبا همه جا روی $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_T}$ و برای $0 \le |\alpha| \le k$ داریم

$$|D^\alpha x(t)| < \varepsilon.$$

لذا این نیز ایجاب می‌کندکه X در شرط ۲ از قضیه ۳-۱ صدق کند.

ازاین رو، از قضیه ۳-۱ نتیجه می‌گیریم X به طور نسبی فشرده است و $\ker \omega_0 \subset N_{W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)}$ بدیهی است که ω_0 در شرط ۲ صدق می‌کند. حال شرط ۳ را بررسی می‌کنیم. بدین منظور، فرض کنید $X \in M_{W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)}$ و $x \in \bar{X}$. بنابراین، دنباله $\{x_n\}$ در X وجود دارد به طوری که هرگاه $n \to \infty$، آن‌گاه $x_n \to x$ در $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$. با توجه به تعریف $\omega^T(X,\varepsilon)$ و $d(X)$، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، هر $\|h\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$، $0 \le |\alpha| \le k$ و $T > 0$ داریم

$$\|\tau_h D^\alpha x_n - D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\overline{B_T})} \le \omega^T(X,\varepsilon).$$

با در نظر گرفتن شرط $n \to \infty$ نتیجه زیر را بدست می‌آوریم

$$\|\tau_h D^\alpha x \quad - D^\alpha x \quad\|_{L^\infty(\overline{B_T})} \le \omega^T(X,\varepsilon).$$

از این رو

$$\lim_{T\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \omega^T(\bar{X},\varepsilon) \le \lim_{T\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \omega^T(X,\varepsilon),$$

نیز ایجاب می‌کند که $\omega(\bar{X}) \le \omega(X)$. از طرف دیگر، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و $T > 0$،

$$\|\tau_h D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_T})} \le sup\{\|\tau_h D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_T})} : x \in X, 0 \le |\alpha| \le k\}$$

لذا داریم

$$\lim_{T\to\infty} sup\{\|\tau_h D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_T})} : x \in \bar{X}, 0 \le |\alpha| \le k\} \le \lim_{T\to\infty} sup\{\|\tau_h D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_T})} : x \in X, 0 \le |\alpha| \le k\}.$$

این نشان می‌دهد که $d(\bar{X}) \le d(X)$.

با توجه به مطالب اخیر و نیز شرط ۲ نتیجه می‌گیریم $\omega_0(\bar{X}) = \omega_0(X)$. بنابراین ω_0 در شرط ۳ صدق می‌کند. شرط ۴ به طور مستقیم از تساوی

$$D^\alpha[Conv(X)] = Conv[D^\alpha X]$$

نتیجه می‌شود. اثبات شرط ۵ با استفاده از تساوی زیر

$$D^\alpha(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda\, D^\alpha x_1 + (1-\lambda) D^\alpha x_2.$$

به‌ازای‌هر $\lambda \in [0,1]$ و $x_2, x_1 \in X$ بدست می‌آید. فقط بررسی شرط ۶ باقی مانده است. فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه غیرتهی و بسته $M_{W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)}$ باشد به طوری که به ازای ...,$n = 1,2$، $X_{n+1} \subset X_n$ و $\lim_{n\to\infty} \omega_0(X_n) = 0$. حال به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in X_n$ و مجموعه $\mathcal{G} = \overline{\{x_n\}}$ را در نظر بگیرید.

ادعا: $\mathcal{G}$ مجموعه‌ای فشرده در $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ است.

فرض کنید $\varepsilon > 0$ ثابت باشد. چون $\lim_{n\to\infty} \omega_0(X_n) = 0$، عدد طبیعی به قدر کافی بزرگ $m_1 \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\omega_0(X_{m_1}) < \varepsilon$. از این رو، می‌توان مقادیر به قدر کافی کوچک $\delta_1 > 0$ و به قدر کافی بزرگ $T_1 > 0$ را یافت به‌طوری که $\omega^{T_1}(X_{m_1},\delta_1) < \varepsilon$ و $d_{T_1}(X_{m_1}) < \varepsilon$. بنابراین به ازای هر $n > m_1$، $0 \le |\alpha| \le k$ و $h \in \mathbb{R}^n$ با شرط $\|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_1$ داریم

$$\|\tau_h D^\alpha x_n - D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\overline{B_{T_1}})} < \varepsilon,$$

و

$$\|\tau_h D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{T_1}})} < \varepsilon.$$

لذا داریم

$$\le \|\tau_h D^\alpha - D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\overline{B_{T_1}})} + \|\tau_h D^\alpha x_n - D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{T_1}})} \le \|\tau_h D^\alpha x_n - D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\overline{B_{T_1}})} + \|\tau_h D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{T_1}})} + \|D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{T_1}})} < 3\varepsilon.$$

از طرف دیگر، می‌دانیم که مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_{m_1}\}$ فشرده است و از این رو، مقادیر $\delta_2 > 0$ و $T_2 > 0$ موجودند به‌طوری که به ازای هر $n = 1,2,\dots,m_1$ و $0 \le |\alpha| \le k$ و $h \in \mathbb{R}^n$ با شرط $\|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_2$ داریم

$$\|\tau_h D^\alpha x_n - D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\overline{B_{T_2}})} < \varepsilon.$$

به علاوه، $\|D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{T_2}})} < \varepsilon,$ که این نیز به ازای هر $n = 1,2,\dots,m_1$ نامساوی زیر را ایجاب می‌کند

$$\|\tau_h D^\alpha x_n - D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < 3\varepsilon.$$

بنابراین،

$$\|\tau_h D^\alpha x - D^\alpha x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < 3\varepsilon,$$

و

$$\|D^\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_T})} < \varepsilon < 3\varepsilon,$$

به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\|h\|_{\mathbb{R}^n} < \min\{\delta_1,\delta_2\}$ و $T = \max\{T_1,T_2\}$. بنابراین کلیه مفروضات قضیه ۳-۱ برقرار است که این نیز ادعا را اثبات می‌کند.
با استفاده از ادعای فوق، زیردنباله $\{x_{n_j}\}$ و $x_0 \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ وجود دارند به‌طوری که $x_{n_j} \to x_0$. چون $x_n \in X_n$ و $X_{n+1} \subset X_n$ و به علاوه X_n، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ بسته است، لذا ایجاب می‌کند که $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = X_\infty$، که این نیز اثبات ۶ را کامل می‌کند.

نتیجه ۳-۴. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ یک‌زیرمجموعه اندازه‌پذیر باشد. تابع ω_0 که $\omega_0: M_{W^{k,\infty}(\Omega)} \to \mathbb{R}$ یک اندازه نافشردگی روی $W^{k,\infty}(\Omega)$ است.
اثبات. می‌دانیم که $W^{k,\infty}(\Omega)$ زیرفضایی از $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ می‌باشد که ایجاب می‌کند ω_0 یک اندازه نافشردگی روی $W^{k,\infty}(\Omega)$ باشد.

۴. کاربردها

دراین بخش، وجودجواب‌هایی برای‌برخی ازمعادلات انتگرال- دیفرانسیلی تابعی را مطالعه و بررسی می‌کنیم. همچنین مثالی را برای بررسی صحت وکاربرد نتایج‌مان ارائه می‌دهیم.
این بخش را با ارائه برخی از مقدماتی که در ادامه به آن‌ها نیاز داریم، شروع می‌کنیم.

قضیه ۴-۱. فرض کنید Ω یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر لبگ از $\mathbb{R}^n$ باشد و $1 \le p \le \infty$. اگر $\{f_n\}$ در L^p- نرم همگرا به f باشد، دراین‌صورت زیردنباله $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد به طوری که تقریبا همه جا به f همگرا است و همچنین $g \in L^p(\Omega)$ که $g \ge 0$ وجود دارد به طوری که به ازای تقریبا هر به$x \in \Omega$.

$|f_{n_k}(x)| \le g(x)$, [32]

تعریف ۴-۱. تابع $f:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ دارای خاصیت کاراتئودوری گفته می‌شود هرگاه
۱) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$، تابع $x \longmapsto f(x,u)$ به ازای هر $u \in \mathbb{R}^m$، اندازه‌پذیر باشد.
۲) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$، تابع $u \longmapsto f(x,u)$ تقریبا به ازای هر $u \in \mathbb{R}^m$، پیوسته باشد.
فرض کنید Ω زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد و $k \in \mathbb{N}$. فضای‌توابع‌کراندارو k- مرتبه به طور پیوسته مشتق‌پذیر روی Ω همراه با نرم استاندارد زیر را با نماد $BC^k(\Omega)$ نشان می‌دهیم

$$\|f\|_{BC^k(\Omega)} = \max_{0\le|\alpha|\le k}\|D^\alpha f\|_u,$$

که در آن $D^\alpha f_u = \sup\left\{\left|D^\alpha f\left(x\right)\right| : x \in \Omega\right\}$.
معادله

$$\begin{aligned} u(x) &= p(x) + q(x)u(x) \\ &+ \int_{\Omega'} k\left(x-\gamma(y)\right) g\left(\gamma(y), u\left(\gamma(y)\right), \right. \\ &\left. \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\gamma(y)\right),\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(\gamma(y)\right)\right)dy \end{aligned} \tag{1-4}$$

را تحت مفروضات زیر در نظر می‌گیریم
i. $p \in W^{1,\infty}(\Omega)$، $q \in BC^1(\Omega)$ و

$$\lambda := \sup\left\{\|q\|_u, + \left\|\frac{\partial q}{\partial x_i}\right\|_u : i = 1,\dots,n\right\} < 1.$$

ii. $\gamma:\Omega' \to \Omega$ یک تابع اندازه‌پذیر است ($\Omega' \subset \mathbb{R}^n$).
iii. $g:\Omega' \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ در شرط کاراتئودوری صدق می‌کند و همچنین تابع کراندار پیوسته $a:\Omega \to \mathbb{R}_+$

که به ازای هر $x \in \Omega$ و یک $M > 0$، $|a(x)| \le M$ و نیز تابع مقعر نیمه پیوسته و غیرنزولی $\zeta: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ وجود دارند به طوری که

$|g(x, u_0, u_1, \dots, u_n)| \le a(x)\zeta(\max_{0\le i\le n}|u_i|)$.

iv. $k: \Omega \to \mathbb{R}$ دارای مشتق از مرتبه ۱ است و به علاوه، $g_3, g_1 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ و $g_2 \in L^\infty(\Omega)$ وجود دارند به طوری که تقریبا به ازای هر $x, x_1, x_2 \in \Omega$ و $y \in \Omega'$ و $1 \le i \le n$ داریم

$$|k(x-\gamma(y))| \le g_1(x)g_2(\gamma(y)),$$
$$|k(x_1-\gamma(y)) - k(x_2-\gamma(y))| \le g_2(\gamma(y))|g_3(x_1) - g_3(x_2)|,$$

و

$$\left|\frac{\partial k}{\partial x_i}(x-\gamma(y))\right| \le g_1(x)g_2(\gamma(y)),$$
$$\left|\frac{\partial k}{\partial x_i}(x_1-\gamma(y)) - \frac{\partial k}{\partial x_i}(x_2-\gamma(y))\right|$$

V: یک جواب مثبت مانند r_0 برای نامعادله زیر وجود دارد

$$\|p\|_{1,\infty} + \lambda r + Mm(\Omega')\|g_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|g_2\|_{L^\infty(\Omega)}\zeta(\|u\|_{1,\infty}) \le r.$$

قضیه ۴-۲. تحت مفروضات i تا v، معادله $(4-1)$ حداقل دارای یک جواب در فضای $W^{1,\infty}(\Omega)$ است.

اثبات. عملگر $F: W^{1,\infty}(\Omega) \to W^{1,\infty}(\Omega)$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$Fu(x) = p(x) + q(x)u(x) + \int_{\Omega'} k\left(x-\gamma(y)\right) g\left(\gamma(y), u\left(\gamma(y)\right), \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\gamma(y)\right), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(\gamma(y)\right)\right) dy$$

بدیهی است Fu به ازای هر $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ اندازه پذیر است. همچنین به ازای هر $x \in \Omega$، داریم

$$\frac{\partial (Fu)}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial p}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial q}{\partial x_i}(x)u(x) + q(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

$$+\int_{\Omega'} \frac{\partial k}{\partial x_i}\left(x-\gamma(y)\right) g\left(\gamma(y), u\left(\gamma(y)\right), \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\gamma(y)\right), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(\gamma(y)\right)\right) dy$$

و Fu دارای مشتقات اندازه‌پذیراست. با استفاده از فرضیات، به ازای هر عضو ثابت و دلخواه $x \in \Omega$، داریم

$$|Fu(x)| \le |p(x)| + |q(x)||u(x)| + \left|\int_{\Omega'} k\left(x-\gamma(y)\right) g\left(\gamma(y), u\left(\gamma(y)\right), \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\gamma(y)\right), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(\gamma(y)\right)\right) dy\right|$$

با استفاده از نامساوی ینسن می‌توان نتیجه گرفت

$$\|Fu\|_{L^\infty} \le \|p\|_{L^\infty} + \|q\|_u \|u\|_{L^\infty} + Mm(\Omega')\|g_1\|_{L^\infty}\|g_2\|_{L^\infty}\zeta(\|u\|_{L^\infty}).$$

چون

$$\left|\frac{\partial (Fu)}{\partial x_i}(x)\right| \le \left|\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)\right| + \left|\frac{\partial q}{\partial x_i}(x)\right||u(x)| + |q(x)|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| + \left|\int_{\Omega'} \frac{\partial k}{\partial x_i}\left(x-\gamma(y)\right) g\left(\gamma(y), u\left(\gamma(y)\right), \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\gamma(y)\right), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(\gamma(y)\right)\right) dy\right|.$$

با فرآیندی مشابه فوق، داریم

$$\left\|\frac{\partial (Fu)}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \le \left\|\frac{\partial p}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\|\frac{\partial p}{\partial x_i}\right\|_u \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|q\|_u \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\Omega)} + Mm(\Omega')\|g_1\|_{1,\infty}\|g_2\|_{L^\infty(\Omega)}\zeta(\|u\|_{1,\infty}).$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$\|Fu\|_{1,\infty} \le \|p\|_{1,\infty} + \lambda\,\|u\|_{1,\infty} + Mm(\Omega')\|g_1\|_{1,\infty}\|g_2\|_{L^\infty}\zeta(\|u\|_{1,\infty}). \quad (2\text{-}4)$$

طبق رابطه (4.2) و با استفاده از شرط v، نتیجه می‌گیریم F نگاشتی از $\overline{B_{r_0}}$ به توی $\overline{B_{r_0}}$ است. حال، نشان می‌دهیم نگاشت F پیوسته است. فرض کنید $\{u_m\}$ دنباله‌ای دلخواه در $W^{1,\infty}(\Omega)$ و همگرا به $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ باشد. بنا به قضیه ۱،۴، زیردنباله $\{u_{m_l}\}$ وجود دارد به طوری که تقریبا همه جا همگرا به u می‌باشد. همچنین $\left\{\frac{\partial u_{m_l}}{\partial x_i}\right\}$ تقریبا همه جا همگرا به

$\left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}$ همگراست و $h \in L^{\infty}(\Omega)$ که $h > 0$ وجود دارد به طوری که تقریبا به ازای هر $y \in \Omega'$ داریم

$$\max\{|u_{m_l}(\gamma(y))|, |\frac{\partial u_{m_l}}{\partial x_1}(\gamma(y))|, |\frac{\partial u_{m_l}}{\partial x_2}(\gamma(y))|, \dots, |\frac{\partial u_{m_l}}{\partial x_n}(\gamma(y))|\} \le h(\gamma(y)).$$

چون تقریبا همه جا $u_{m_l} \to u$ و همچنین g در شرط کاراتئودوری صدق می‌کند، لذا تقریبا به ازای هر $y \in \Omega'$ نتیجه می‌شود که

$$g(\gamma(y), u_{m_l}(\gamma(y)), \frac{\partial u_{m_l}}{\partial x_1}(\gamma(y)), \dots, \frac{\partial u_{m_l}}{\partial x_n}(\gamma(y))) \to g(\gamma(y), u(\gamma(y)), \frac{\partial u}{\partial x_1}(\gamma(y)), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(\gamma(y))).$$

از شرط ii تقریبا به ازای هر $y \in \Omega'$ داریم

$$g\begin{pmatrix} \gamma(y), u_{m_l}(\gamma(y)), \frac{\partial u_{m_l}}{\partial x_1}(\gamma(y)), \\ \dots, \frac{\partial u_{m_l}}{\partial x_n}(\gamma(y)) \end{pmatrix} \le a(y)\zeta\left(h(\gamma(y))\right).$$

با توجه به شرط (iv) و با استفاده از قضیه همگرایی تسلطی‌لبگ، نتیجه می‌شود تقریبا به ازای هر $y \in \Omega'$، هرگاه $l \to \infty$، آن‌گاه

$$\int_{\Omega'} k(x-\gamma(y))g(\gamma(y), u_{m_l}(\gamma(y)), \frac{\partial u_{m_l}}{\partial x_1}(\gamma(y)), \dots, \frac{\partial u_{m_l}}{\partial x_n}(\gamma(y)))dy.$$

نیز به

$$\int_{\Omega'} k(x-\gamma(y))g(\gamma(y), u(\gamma(y)), \frac{\partial u}{\partial x_1}(\gamma(y)), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(\gamma(y)))dy.$$

همگرا می‌باشد. از این رو، هرگاه $l \to \infty$، داریم $(1 \le i \le n)$

$$\left\|Fu_{m_l} - Fu\right\|_{1,\infty} \to 0,$$
$$\left\|\frac{\partial Fu_{m_l}}{\partial x_i} - \frac{\partial Fu}{\partial x_i}\right\|_{1,\infty} \to 0$$

بنابراین، $F: W^{1,\infty}(\Omega) \to W^{1,\infty}(\Omega)$ پیوسته است.
برای اتمام اثبات می‌بایست به ازای هر زیرمجموعه غیرتهی U از Ω برقراری شرط $\omega_0(F(U)) \le \lambda\omega_0(U)$ را بررسی کنیم. $T > 0$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه را ثابت در نظر می‌گیریم. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای غیرتهی و کراندار از $\overline{B_{r_0}}$ باشد. عناصر $u \in U$ و $x, h \in B_T$ را طوری انتخاب کنید که $\|h\|_{\mathbb{R}^n} \le \varepsilon$. $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ در این صورت داریم

$$\begin{aligned}&|Fu(x) - Fu(x+h)| \le |p(x) - p(x+h)| \\ &+|q(x) - q(x+h)||u(x)| \\ &+|q(x+h)||u(x) - u(x+h)| \\ &+\int_{\Omega'} k(x-\gamma(y)) - \\ &k(x+h-\gamma(y))|g(\gamma(y), u(\gamma(y)), \\ &\frac{\partial u}{\partial x_1}(\gamma(y)), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(\gamma(y)))dy|. \quad (3-4)\end{aligned}$$

بنابراین، طبق شرط (iv) و نامساوی $(3-4)$ داریم

$$\begin{aligned}&\sup\left\{\|Fu - F\tau_h u\|_{L^{\infty}(\bar{B}_T)} : h \in \mathbb{R}^n, \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\right\} \\ &\le \sup\left\{\|p - \tau_h p\|_{L^{\infty}(\bar{B}_T)} : h \in \mathbb{R}^n, \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\right\} \\ &+\sup\left\{\|q - \tau_h q\|_u \|u\|_{W^{1,\infty}(\bar{B}_T)} : h \in \mathbb{R}^n, \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\right\} \\ &+\sup\left\{\|\tau_h q\|_u \|u - \tau_h u\|_{W^{1,\infty}(\bar{B}_T)} : h \in \mathbb{R}^n, \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\right\} \\ &+\sup\{ess\sup_{x \in \bar{B}_T} \int_{\Omega'} |k(x-\gamma(y)) - k(x+h-\gamma(y))| \\ &|g(\gamma(y), u(\gamma(y)), \frac{\partial u}{\partial x_1}(\gamma(y)), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(\gamma(y)))| dy : \\ &h \in \mathbb{R}^n, \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\} \\ &\le \omega^T(p, \varepsilon) + \sup\{\|q - \tau_h q\|_u \|u\|_{W^{1,\infty}(\bar{B}_T)} : \\ &h \in \mathbb{R}^n, \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\} \\ &+\lambda\omega^T(U, \varepsilon) + Mm(\Omega')\|g_2\|_{L^{\infty}}\end{aligned}$$

$$\zeta\left(\|u\|_{1,\infty}\right)\omega^{T}\left(g_3,\varepsilon\right). \quad (4-4)$$

به وضوح، $\omega^T(p,\varepsilon)\to 0$، $\omega^T(g_3,\varepsilon)\to 0$ و با توجه به پیوستگی q نتیجه می‌شود وقتی $\varepsilon\to 0$ داریم
$\sup\{\|q-\tau_h q\|_u\|u\|_{W^{1,\infty}(\bar{B}_T)}: h\in \mathbb{R}^n, \|h\|_{\mathbb{R}^n}<\varepsilon\}\to 0.$

لذا سمت راست $(4-4)$ به $\lambda\omega^T(U)$ همگراست هرگاه $\varepsilon\to 0$.
با فرآیندی مشابه به ازای هر $i=1,2,\dots,n$ نتیجه می‌گیریم

$$\left|\frac{\partial(Fu)}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial(Fu)}{\partial x_i}(x+h)\right| \le\left|\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x+h)\right| +\left|\frac{\partial q}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial q}{\partial x_i}(x+h)\right||u(x)| +\left|\frac{\partial q}{\partial x_i}(x+h)\right||u(x)-u(x+h)| +|q(x)|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+h)\right| +\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+h)\right||q(x)-q(x+h)| +\left|\int_{\Omega'}\frac{\partial k}{\partial x_i}(x-\gamma(y))-\frac{\partial k}{\partial x_i}(x+h-\gamma(y))\right| \left|g(\gamma(y),u(\gamma(y)),\frac{\partial u}{\partial x_1}(\gamma(y)),\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}(\gamma(y))\right|dy$$

از نامساوی اخیر و نیز با استفاده از شرط (iv) نتیجه می‌گیریم به ازای هر $i=1,2,\dots,n$ داریم

$$\sup\left\{\left\|\frac{\partial Fu}{\partial x_i}-\frac{\partial F\tau_h u}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\bar{B}_T)}: h\in \mathbb{R}^n, \|h\|_{\mathbb{R}^n}<\varepsilon\right\}\le \omega^T(p,\varepsilon)+ \left\|\frac{\partial q}{\partial x_i}-\tau_h\frac{\partial q}{\partial x_i}\right\|_u\|u\|_{W^{1,\infty}(\bar{B}_T)}+ \lambda\omega^T(U,\varepsilon)+\left\|\tau_h\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty}\|q-\tau_h q\|_u+ Mm(\Omega')\|g_2\|_{L^\infty}\zeta\left(\|u\|_{1,\infty}\right)\omega^T(g_3,\varepsilon). \quad (5-4)$$

با به کارگیری استدلالی مشابه فوق، سمت راست $(5-4)$ همگرا به $\lambda\omega^T(U)$ است هرگاه $\varepsilon\to 0$.
با توجه به روابط $(4-4)$ و $(5-4)$ و دلخواه بودن عنصر u از U نتیجه می‌شود
$\omega^T(FU)\le\lambda\omega^T(U).$

اکنون دررابطه بالا T رابه سمت بی نهایت میل می دهیم داریم

$$\omega(FU)\le\lambda\omega(U) \qquad (6\text{-}4)$$

سپس، عدد دلخواه $T>0$ را ثابت می‌گیریم. در این صورت با در نظر گرفتن مفروضات، به ازای تابع دلخواه $u\in U$ بدست می‌آوریم

$$\|Fu\|_{L^\infty(\Omega\setminus\overline{B_T})}\le\|p\|_{L^\infty(\Omega\setminus\overline{B_T})}+ \|q\|_u\,\|u\|_{L^\infty(\Omega\setminus\overline{B_T})}+ Mm(\Omega')\|g_1\|_{L^\infty(\Omega\setminus\overline{B_T})} \|g_2\|_{L^\infty(\Omega\setminus\overline{B_T})}\zeta\left(\|u\|_{1,\infty}\right).$$

از آن جا که $\{p\}$ و $\{g_1\}$ مجموعه‌هایی فشرده هستند، لذا $d(\{p\})=0$ و $d(\{g_1\})=0$ و در نتیجه هرگاه $T\to\infty$

$$\|p\|_{L^\infty(\Omega\setminus\overline{B_T})}\to 0, \quad \|g_1\|_{L^\infty(\Omega\setminus\overline{B_T})}\to 0.$$

از این رو،

$$\lim_{T\to\infty}\|Fu\|_{L^\infty(\Omega\setminus\overline{B_T})}\le\lambda d(U).$$

به طوری مشابه،

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\left\|\frac{\partial(Fu)}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\Omega\setminus\overline{B_T})}: i=1,2,\dots,n\right\}\le\lambda d(U).$$

که

$$d(FU)\le\lambda d(U). \qquad (7\text{-}4)$$

در نهایت، از روابط (4.6) و (4.7) نتیجه می‌گیریم $\omega_0(F(U))\le\lambda\omega_0(U)$.
بنا به قضیه ۲-۱ نتیجه می‌گیریم عملگر F دارای نقطه ثابت x در $\overline{B_{r_0}}$ است و بنابراین معادله انتگرال-

دیفرانسیلی تابعی (4.1) حداقل دارای یک جواب در فضای $W^{1,\infty}(\Omega)$ است.

مثال ۴-۳. معادله انتگرال-دیفرانسیلی تابعی زیر را در نظر بگیرید.

$$u(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+e^{-(x+1)}u(x) + \int_0^1 \frac{e^{-(x+1)}}{(y+2)^2}\sin\big(yu(y)+yu'(y)+ u'(y)u(y)\big)\,dy. \qquad (8\text{-}4)$$

معادله $(8-4)$ حالت خاصی از معادله $(1-4)$ است که در آن

$$p(x)=\frac{x^2}{1+x^2},$$
$$q(x)=e^{-(x+1)},$$
$$k\big(x-\gamma(y)\big)=\frac{e^{-(x+1)}}{(y+2)^2},$$
$$\Omega=(0,+\infty),\ \ \Omega'=(0,1),\ \ \ \gamma(t)=\frac{1}{t}$$

و

$$g(y,u_0,u_1)=\sin(yu(y)+yu'(y)+ u'(y)u(y)).$$

به سادگی می‌توان نشان داد $g\in BC^1(\Omega)$ و $\lambda=2e^{-1}$ همچنین g در شرایط کاراتئودوری صدق می‌کند و اگر تعریف کنیم $a(x)=\zeta(x)=1$، آن‌گاه شرط (iii) از قضیه ۴-۲ برقرار می‌شود. به علاوه، k پیوسته و دارای مشتق مرتبه اول پیوسته می‌باشد. از طرف دیگر،

$$g_1(x)=g_3(x)=e^{-(x+1)}$$

و

$$g_2(y)=\frac{y^2}{(2y+1)^2}.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که هر عدد $r\geq 5$ در نامساوی شرط V صدق می‌کند؛ یعنی

$$\|p\|_{1,\infty}+\lambda\, r+ M\|g_1\|_{1,\infty}\|g_2\|_{L^\infty}\zeta(x)\leq 1+2e^{-1}r+ \frac{e^{-1}}{4}\leq r.$$

از این رو، به عنوان مقدار r_0 می‌توانیم قرار دهیم $r_0=5$. در نتیجه، تمام شرایط قضیه ۴-۲ برقرار هستند که این نیز ایجاب می‌کند معادله انتگرال-دیفرانسیلی تابعی (4.8) حداقل دارای یک جواب در فضای $W^{1,\infty}(\Omega)$ باشد.

فهرست مراجع

[1] Bloom, F., 1980. Asymptotic bounds for solutions to a system of damped integro-differential equations of electromagnetic theory. J. Math. Anal. Appl., 73(2), 524–542.

[2] Guo, D., 2001. Existence of Solutions for n^{th}-Order Integro-Differential Equations in Banach Spaces. Computers and Mathematics with Applications, 4, 597–606.

[3] Forbes, L. K., Crozier, S.D., Doddrell, M., 1997. Calculating current densities and fields produced by shielded magnetic resonance imaging probes. SIAM J. Appl. Math., 57(2), 401–425.

[4] Holmaker, K., 1993. Global asymptotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones. SIAM J. Math. Anal., 24(1), 116–128.

[5] Behiry, S. H., Hashish, H., 2002. Wavelet methods for the numerical solution of Fredholm integro-differential equations. Int. J. Appl. Math., 11(1), 27–35.

[6] Bica, A. M., Caus, V. A., Muresan, S., 2006. Application of a trapezoid tnequality to neutral Fredholm integro-differential equations in Banach spaces. J. Inequal Pure and Appl. Math.,7, Art. 173.

[7] Hosseini, S. M., Shahmorad, S., 2003. Tau numerical solution of Fredholm integro-differential equations with arbitrary polynomial base. Appl. Math Modelling, 27(2), 145–154.

[8] Kuratowski, K., 1930. Sur les espaces, Fund. Math., 15, 301–309.

[9] Bana's, J., & Goebel, K. (1980). *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Lect. Notes Pure Appl. Math., 60, Dekker, New York.

[10] Arab, R., Allahyari, R., Shole Haghighi, A., 2014. Existence of solutions of infinite systems of integral equations in two variables via measure of noncompactness. Applied Mathematics and Computation, 246, 283–291.

[11] Bana's, J., 2012. Measures of noncompactness in the study of solutions of nonlinear differential and integral equations. Cent. Eur. J. Math., 10(6), 2003–2011.

[12] Bana's, J., O'Regan, D., Sadarangani, K., 2009. On solutions of a quadratic hammerstein integral equation on an unbonded interval. Dynam. Systems Appl., 18, 251–264.

[13] Olszowy, L., 2014. A Family of Measures of Noncompactness in the Space $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ and its Application to Some Nonlinear Volterra Integral Equation. Mediterr. J. Math., 11, 687–701.

[14] Agarwal, R. P., Benchohra, M., Seba, D., 2009. On the application of measure of noncompactness to the existence of solutions for fractional differential equations. esults Math., 55, 221–230.

[15] Aghajani, J. A., Shole Haghighi, A., 2014. Existence of solutions for a class of functional integral equations of Volterra type in two variables via measure of noncompactness. Iran. J. Sci. Technol. Trans. A: Sci., 38 , A1: 1–8.

[16] Aghajani, A., Mursaleen, M., Shole Haghighi, A., 2015. Fixed point theorems for Meir-Keeler condensing operators via measure of noncompactness. Acta Mathematica Scientia, 35B (3), 552–566.

[17] Allahyari, R., Arab, R., Shole Haghighi, A., 2016. Construction of a Measure of Noncompactness on $BC(\Omega)$ and its Application to Volterra Integral Equations. Mediterr. J. Math., 13(3), 1197–1210.

[18] Arab, R., 2016. The existence of fixed points via the measure of non-compactness and its application to functional integral equations. Mediterr. J. Math., 13(2), 759–773.

[19] Darbo, G., 1955. Punti uniti in transformazioni a condomino non compatto. Rend. Sem. Mat.Uni. Padova, 24, 84–92.

[20] Agarwal, R., Meehan, M., O'Regan, D., (2004). *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press.

[21] Aghajani, A., Bana's, J., Sabzali, N., 2013. Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 20, 2: 345–358.

[22] Aghajani, A., Bana's, J., Jalilian, Y., 2011. Existence of solutions for a class of nonlinear Volterra singular integralm equations. Comput. Math. Appl., 62, 1215 –1227.

[23] Aghajani, A., Sabzali, N., 2014. Existence of coupled fixed points via measure of noncompactness and applications. J. Nonlinear Convex A, 941 –952.

[24] Aghajani, A., Allahyari, R., Mursaleen, M., 2014. A generalization of Darbo's theorem with application to the solvability of systems of integral equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 260, 68–77.

[25] Arab, R., 2015. Some fixed point theorems in generalized Darbo fixed point theorem and the existence of solutions for system of integral equations. J. Korean Math. Soc., 52(1) , 125–139.

[26] Ayad, A., 1999. Spline approximation for first order Fredholm delay integro-differential equations. Int. J. Comput. Math.,70(3), 467–476.

[27] Olszowy, L., 2010. Solvability of infinite systems of singular integral equations in Frechet space of coninuous functions. Comp. Math. Appl., 59, 2794–2801.

[28] Olszowy, L., 2012. Fixed point theorems in the Frechet space $C(\mathbb{R}_+)$ and functional integral equations on an unbounded interval, Appl. Math .Comput 218, 9066–9074.

[29] Brezis, H., (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer Science, Businnes Media, LLC.

[30] Runst, T., Sickel, W., (1996). *Sobolev Spaces of Fractional Order,* Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations, deGruyter, Berlin.

[31] Hanche-Olsen, H., Holden, H. ،2010. The Kolmogorov-Riesz compactness theorem. Expo. Math., 28, 385-394.

[32] Drabek, P., Milota, J. (2007). *Methods of nonlinear analysis,* Birkhauser Velgar AG.