دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و نهم، آذر و دی ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

شعاع پوششی کدهای تکرار $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ با متر لی

فریبا محمودی[1]، لطف الله پور فرج[1*]

(۱) گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۱۳

چکیده

شعاع پوششی یک کد $C \subseteq (\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s})^n$ با متر لی، کوچکترین عدد صحیح r است که هر بردار $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s})^n$ در فاصله لی حداکثر r از کد کلمات C قرار می‌گیرد. شعاع پوششی یک کد برای محاسبه مقدار تصحیح کنندگی خطای آن کد مهم است. در این مقاله، ما کدهای تکرار را که با استفاده از مقسوم‌علیه‌های صفر و یکاهای $Z_2Z_{2^s}$ ساخته می‌شود، معرفی می‌کنیم و شعاع پوششی آن‌ها را با فاصله لی محاسبه می‌کنیم. همچنین، شعاع پوششی کدهای تکرار روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: $Z_2Z_{2^s}$ -کدهای جمعی، نگاشت گری، کدهای روی حلقه‌ها، کدهای تکرار بلوکی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: pourfaraj@iauctb.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید $\mathbb{Z}_m$ حلقه اعداد صحیح به مدول m و $\mathbb{Z}_m^n$ مجموعه همه n-تایی روی $\mathbb{Z}_m$ باشد. زیر مجموعه ناتهی C از $\mathbb{Z}_m^n$ یک کد به طول n و هر عضو C یک کد کلمه نامیده می‌شود. هر زیر گروه $\mathbb{Z}_m^n$ یک کد خطی و هر زیر فضای $\mathbb{Z}_2^n$ را کد خطی دودویی می‌گویند.

دلسارت، کدهای جمعی را به روش انتقال جمعی به صورت زیرگروه‌هایی از گروه‌های آبلی تعریف کرد [۱,۲]. در سال ۱۹۹۷ ثابت شد که تمام کدهای دودویی با زیرگروه‌هایی از $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta \times Q_8^\sigma$ ایزومورف هستند، که در آن Q_8 گروه غیرآبلی کواترنیون[۱] از مرتبه ۸ است. بنابراین تنها ساختار برای گروه‌های آبلی جمعی به صورت زیرگروه‌هایی از $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ است که $\alpha+2\beta=n$ [۳]. هر زیر گروه $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ یک $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-کد جمعی نامیده می‌شود. اخیرا، تعریف کدهای جمعی روی $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ به $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ برای s بزرگتر از یک تعمیم داده شده است[۴]. هر زیرگروه $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_{2^s}^\beta$، یک $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$- کد جمعی نامیده می‌شود. در نتیجه، کدهای جمعی روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ ایزومورف با ساختار یک گروه آبلی $\mathbb{Z}_2^{k_1} \times \mathbb{Z}_4^{k_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{2^s}^{k_s}$ است، پس α مولفه اول هر کد کلمه از یک کد جمعی روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ متعلق به $\mathbb{Z}_2$ و β مولفه بعدی متعلق به $\mathbb{Z}_{2^s}$ است.

اگر مجموعه بردارها در فاصله کوچکتر یا مساوی r از یک کدکلمه c را به عنوان کره‌هایی به شعاع r در نظر بگیرید، شعاع پوششی یک کد $C \subseteq \mathbb{Z}_m^n$، کوچکترین مقدار صحیح r است که کره‌هایی به شعاع r حول کدکلمات C بتوانند کل فضا $\mathbb{Z}_m^n$ را پوشش دهند. کوهن و همکاران، شعاع پوششی بسیاری از کدهای دودویی را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۵]. در دهه اخیر نویسندگان زیادی شعاع پوششی کدهای روی $\mathbb{Z}_4$، $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ و $\mathbb{Z}_{p^k}$ را برای اعداد اول p مورد بررسی قرار داده‌اند [۶-۸]. در این مقاله شعاع پوششی کدهای روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ابتدا پیش‌زمینه‌ای از کدهای جمعی روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ ارائه می‌کنیم. سپس، کدهای تکرار و شعاع پوششی آن‌ها روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ را بررسی می‌کنیم. در انتها به بررسی شعاع پوششی کدهای تکرار می‌پردازیم.

۲- پیش نیاز

تعاریف مورد استفاده در این بخش از منبع [۹] و [۱۰] است.

فرض کنید C یک $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ کد جمعی باشد. چون C یک زیرگروه $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_{2^s}^\beta$ است، بنابراین ایزومورفیک با یک ساختار آبلی مانند $\mathbb{Z}_2^{k_1} \times \mathbb{Z}_4^{k_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^s}^{k_s}$ می‌باشد. در نتیجه تعداد کد کلمات C، برابر $|C| = 2^{k_1+2k_2+\cdots+sk_s}$ است. ماتریس $k \times n$، G که سطرهایش یک پایه برای کد C تشکیل می دهند ماتریس مولد C نامیده می‌شود.

وزن همینگ $x \in \mathbb{Z}_2^n$، برابر تعداد مولفه‌های غیر صفر x است. وزن لی یک عضو $i \in Z_m$ به صورت مینیمم i و $m-i$ تعریف می‌شود. وزن لی هر $x \in \mathbb{Z}_{2^s}^n$، مجموع وزن لی مولفه‌های آن است. فاصله همینگ[۲] و فاصله لی[۳] میان دو بردار $x, y \in \mathbb{Z}_{2^s}^n$، به ترتیب برابر $d_H(x,y) = wt_H(x-y)$ و $d_L(x,y) = wt_L(x-y)$ تعریف می‌شود. مینیمم فاصله همینگ و مینیمم فاصله لی یک کد C، برابر حداقل فاصله همینگ و

[۱] Nonabelian quaternion group

[۲] Hamming

[۳] Lee

حداقل فاصله لی میان تمام کد کلمات C می‌باشد و با $d_H(C)$ و $d_L(C)$ نشان می‌دهند. همچنین مینیمم وزن همینگ و مینیمم وزن لی یک کد C، برابر حداقل وزن همینگ و حداقل وزن لی میان تمام کدکلمات C می‌باشد و با $wt_H(C)$ و $wt_L(C)$ نشان می‌دهند.

یک کد به طول n، اندازه M و مینیمم فاصله d به صورت (n,M,d) و یک کد خطی به طول n ، بعد k و مینیمم فاصله d_H و d_L به صورت $[n,k,d_H,d_L]$ نمایش داده می‌شود.

نگاشت‌گری[۱] $\varphi:\mathbb{Z}_{2^s}\to\mathbb{Z}_2^{2^{s-1}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود[۱۱]:

$$\varphi(i)=\begin{cases} 0_{2^{s-1}-i}1_i & 0\le i\le 2^{s-1} \\ 1_{2^{s-1}}+\varphi(i-2^{s-1}) & i>2^{s-1} \end{cases} \quad (۱)$$

حال این نگاشت را با تعریف $\varphi(v_1,v_2,...,v_n)=(\varphi(v_1),\varphi(v_2),...,\varphi(v_n))$ به $\mathbb{Z}_{2^s}^n$ تعمیم می‌دهیم. توجه داشته باشید که نگاشت گری یک ایزومتری است که فاصله لی روی $\mathbb{Z}_{2^s}^n$ را به فاصله همینگ در $\mathbb{Z}_2^{2^{s-1}}$ می‌نگارد. برای $n=\alpha+2^{s-1}\beta$ نگاشت گری را به صورت $\phi(x,y):\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_{2^s}^\beta\to\mathbb{Z}_2^n$ توسیع می‌دهیم، $\phi(x,y)=(x,\varphi(y_1),\varphi(y_2),...,\varphi(y_\beta))$ و $x=(x_1,x_2,...,x_\alpha)\in\mathbb{Z}_2^\alpha$ و $y=(y_1,y_2,...,y_\beta)\in\mathbb{Z}_{2^s}^\beta$ و φ همان است که در رابطه (۱) تعریف شده است، آنگاه ϕ یک ایزومتری بین فاصله لی تعریف شده روی $\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_{2^s}^\beta$ و فاصله همینگ تعریف شده روی $\mathbb{Z}_2^n$ ایجاد می‌کند. بر اساس این تعریف $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$- کدهای جمعی را می‌توان به صورت کدهای دودویی نشان داد. این کدها را $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$- کدهای دودویی می‌نامند.

برای هر بردار $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_{2^s}^\beta$، وزن لی v برابر $wt_H(v_1)+wt_L(v_2)$ است. حاصلضرب داخلی دو بردار u,v متعلق به $\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_{2^s}^\beta$ برابر است با:

$$<u,v>=2^{s-1}\sum_{i=1}^{\alpha}u_iv_i+\sum_{j=\alpha+1}^{\alpha+\beta}u_iv_j.$$

فرض کنید C یک $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$-کد جمعی باشد. کد دوگان جمعی C با $C^\perp$ نشان داده می‌شود و داریم:

$$C^\perp=\{v\in\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_{2^s}^\beta:<u,v>=0 \text{ for all } u\in C\}.$$

توضیحات بیشتر درباره ساختار C و $C^\perp$ روی $\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_{2^s}^\beta$ در [۴] آورده شده است.

در این مقاله، 0_i و 1_i نشان دهنده کد کلمات $\overbrace{0\ldots0}^{i}$ و $\overbrace{1\ldots1}^{i}$ است. همچنین $\mathbf{2^{s-i}}$ کد کلمه ای است که تمام مولفه‌های آن 2^{s-i} است و طول آن با توجه به متن مشخص می‌شود.

۳- شعاع پوششی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$-کدها

در این فصل شعاع پوششی یک کد C روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ معرفی شده است. در ابتدا شعاع پوششی کدهای دودویی را یادآوری می‌کنیم. شعاع پوششی یک کد دودیی C برابر است با:

$$r(C)=\max_{u\in\mathbb{Z}_2}\{\min_{c\in C}d_H(u,c)\}.$$

این تعریف معادل تعریفی است که در چکیده بیان این تعریف را به کدهای روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ با متر لی تعمیم می‌دهیم. به این ترتیب، شعاع پوششی یک

[۱] Gray map

کد C در $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ کوچکترین مقدار r است که هر نقطه در $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ در فاصله لی حداکثر r از کدکلمات C قرار می‌گیرد. بنابراین،

$$r_L(C) = \max_{u\in\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_{2^s}^\beta}\{\min_{c\in C} d_L(u,c)\}.$$

پس می‌توانیم بگوییم $\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_{2^s}^\beta=\bigcup_{c\in C}S_{r_L}(c)$، به طوری که $S_{r_L}(c)=\{v\in\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_{2^s}^\beta; d_L(u,v)\le r_L\}$.

گزاره زیر برای کدهای روی $\mathbb{Z}_4$ توسط آوکی (گزاره ۳،۲، [۶]) و برای کدهای روی $\mathbb{Z}_{2^s}$ توسط گوپتا (گزاره ۲، [۱۲]) بیان شده است. از آنجایی که نگاشت ϕ حافظ وزن و فاصله است، پس با استفاده از تعریف شعاع پوششی می‌توان آن را به $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ تعمیم داد، که در گزاره زیر بیان می‌شود.

گزاره ۳-۱. فرض کنید C یک $\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_{2^s}^\beta$ کد و $\phi(C)$ تصویر نگاشت گری از کد C باشد. در این صورت، $r_L(C)\le r_H(\phi(C))$.

۴- کدهای تکرار روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ و شعاع پوششی آن‌ها

به طور کلی، اگر $F_q=\{\alpha_0=0,\alpha_1=1,\dots,\alpha_{q-1}\}$ یک میدان متناهی باشد، یک کد تکرار q آرایه‌ای $C=\{\overline{\alpha}=(\alpha,\alpha,\dots,\alpha)\,|\,\alpha\in F_q^n\}$ یک (n,q,n) کد است. شعاع پوششی این کد روی F_q برابر $\left\lceil \frac{n(q-۱)}{q}\right\rceil$ است [۱۳]. در این بخش برخی کدهای تکرار روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ را معرفی می‌کنیم.

۴-۱. کدهای تکرار مقسوم علیه صفر

فرض کنید z یک مقسوم علیه صفر روی $\mathbb{Z}_{۲^s}$ باشد. کد تولید شده توسط ماتریس مولد $[zz\dots z]$، یک کد تکرار مقسوم علیه صفر نامیده می‌شود.

تعداد مقسوم علیه صفر $\mathbb{Z}_{2^s}$ که به صورت $a_1 2^{s-1}+a_2 2^{s-2}+\dots+a_{s-1}2^1$، $a_i\in\{0\ \ \}$، برابر $2^{s-1}-1$ است [۴].

ابتدا مقسوم علیه‌های صفر $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ از مرتبه ۲ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید C_2 کد تولید شده به وسیله ماتریس مولد $G_2=[\overbrace{02^{s-1}02^{s-1}\dots02^{s-1}}^{n}]$ باشد.

قضیه ۴-۱. $r_L(C_2)=\frac{n}{4}+n2^{s-3}$.

اثبات: برای بررسی شعاع پوششی $C_۲$، یک بردار

$$x=\overbrace{00\dots00}^{l}\overbrace{01\dots01}^{l}\dots\overbrace{02^{s-1}\dots02^{s-1}}^{l}\overbrace{10\dots10}^{l}\overbrace{11\dots11}^{l}\dots\overbrace{12^{s-1}\dots12^{s-1}}^{n-(2^{s+1}-1)l}$$

را در $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s})^n$ نظر بگیرید. فرض کنید $x=(x_1,x_2)$، به طوری که x_1 در $\mathbb{Z}_2$ و x_2 در $\mathbb{Z}_{2^s}$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}d_L(x,\overbrace{00\dots00}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\dots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{0\dots0}^{n/2})\\ &=\frac{n}{4}+2\left(2\times\frac{2^{s-1}(2^{s-1}+1)}{2}-2^{s-1}\right)\frac{l}{2}-1\frac{l}{2}\\ &\quad+\frac{n}{2}-(2^{s+1}-1)\frac{l}{2}\\ &=\frac{n}{4}+n2^{s-3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_L(x,\overbrace{02^{s-1}\dots02^{s-1}}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\dots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{2^{s-1}\dots2^{s-1}}^{n/2})\\ &=\frac{n}{4}+2\left(2\times\frac{2^{s-1}(2^{s-1}+1)}{2}-2^{s-1}\right)\frac{l}{2}\\ &\quad-(2^s-1+2^{s-1})\frac{l}{2}\\ &\quad+(2^s-1+2^{s-1})\left(\frac{n}{2}-(2^{s+1}-1)\frac{l}{2}\right)\\ &=\frac{n}{4}+n2^{s-3},\end{aligned}$$

بنابراین،

$$r_L(C_2)\ge d_L(x,C)=\frac{n}{4}+n2^{s-3}.$$

برعکس، فرض کنید x یک بردار دلخواه در $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s})^n$ باشد و x_1 و x_2 مانند قبل تعریف شود.

فرض کنید w_i تعداد مولفه‌های i در x_2 برای $0 \le i \le 2^{s+1}-1$ باشد. یعنی $x_2=(w_0,w_1,\dots,w_{2^{s+1}-1})$ که $\sum_{i=0}^{2^{s+1}-1} w_i = n$.

$$
\begin{aligned}
d_L(x,\overbrace{00\dots00}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\dots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{0\dots0}^{n/2})\\
&=\frac{n}{4}+0(w_0+w_{2^s})\\
&\quad+1(w_1+w_{2^s-1}+w_{2^s+1}+w_{2^{s+1}-1})\\
&\quad+\dots+2^{s-1}(w_{2^{s-1}}+w_{2^s+2^{s-1}}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_L(x,\overbrace{02^{s-1}\dots02^{s-1}}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\dots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{2^{s-1}\dots2^{s-1}}^{n/2})\\
&=\frac{n}{4}+0(w_{2^{s-1}}+w_{2^s+2^{s-1}})\\
&\quad+1(w_{2^{s-1}-1}+w_{2^{s-1}+1}\\
&\quad+w_{2^s+2^{s-1}-1}+w_{2^s+2^{s-1}+1})\\
&\quad+\dots+2^{s-1}(w_0+w_{2^s}),
\end{aligned}
$$

می‌دانیم که مینیمم حد فاصل بین کد کلمات از میانگین آن‌ها کوچکتر است. بنابراین $r_L(C_2) \le \frac{n}{4}+\frac{n}{2}2^{s-2}$. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

اکنون قضیه فوق را تعمیم می‌دهیم. فرض کنید C_{2^i} کد تولید شده به وسیله ماتریس مولد $[02^{s-i}02^{s-i}\dots02^{s-i}]$ باشد، در این صورت قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۴-۲. $r_L(C_{2^i})=\frac{n}{4}+n2^{s-3}$.

اثبات. روند اثبات مانند قضیه ۴-۱ است. برای بررسی شعاع پوششی C_i، یک بردار

$$
x=\overbrace{00\dots00}^{l}\overbrace{01\dots01}^{l}\dots\overbrace{02^{s-1}\dots02^{s-1}}^{l}\overbrace{10\dots10}^{l}\overbrace{11\dots11}^{l}\dots\overbrace{12^{s-1}\dots12^{s-1}}^{n-(2^{s+1}-1)l}
$$

را در $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s})^n$ نظر بگیرید و فرض کنید $x=(x_1,x_2)$، به طوری که x_1 در $\mathbb{Z}_2$ و x_2 در $\mathbb{Z}_{2^s}$ باشد. در این صورت،

$$
\begin{aligned}
d_L(x,\overbrace{00\dots00}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\dots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{0\dots0}^{n/2})\\
&=\frac{n}{4}+2\left(2\times\frac{2^{s-1}(2^{s-1}+1)}{2}-2^{s-1}\right)\frac{l}{2}-1\frac{l}{2}\\
&\quad+\frac{n}{2}-(2^{s+1}-1)\frac{l}{2}\\
&=\frac{n}{4}+n2^{s-3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_L(x,\overbrace{02^{s-i}\dots02^{s-i}}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\dots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{2^{s-i}\dots2^{s-i}}^{n/2})\\
&=\frac{n}{4}+2\left(2\times\frac{2^{s-1}(2^{s-1}+1)}{2}-2^{s-i}\right)\frac{l}{2}\\
&\quad-(2^s-1+2^{s-i})\frac{l}{2}\\
&\quad+(2^s-1+2^{s-i})\left(\frac{n}{2}-(2^{s+1}-1)\frac{l}{2}\right)\\
&=\frac{n}{4}+n2^{s-3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_L(x,\overbrace{02^{s-1}\dots02^{s-1}}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\dots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{2^{s-1}\dots2^{s-1}}^{n/2})\\
&=\frac{n}{4}+2\left(2\times\frac{2^{s-1}(2^{s-1}+1)}{2}-2^{s-1}\right)\frac{l}{2}\\
&\quad-(2^s-1+2^{s-1})\frac{l}{2}\\
&\quad+(2^s-1+2^{s-1})\left(\frac{n}{2}-(2^{s+1}-1)\frac{l}{2}\right)\\
&=\frac{n}{4}+n2^{s-3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_L(x,\overbrace{02^s-2^{s-i}\dots02^s-2^{s-i}}^{l}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\dots0}^{n/2})\\
&\quad+d_L(x_2,\overbrace{2^s-2^{s-i}\dots2^s-2^{s-i}}^{n/2})\\
&=\frac{n}{4}+2\left(2\times\frac{2^{s-1}(2^{s-1}+1)}{2}-2^{s-i}\right)\frac{l}{2}\\
&\quad-(2^s-1+2^s-2^{s-i})\frac{l}{2}
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
r_L(C_2)\ge d_L(x,C)=\frac{n}{4}+n2^{s-3}.
$$

برعکس، فرض کنید x یک بردار دلخواه در $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s})^n$ باشد که x_1، x_2 و w_i مانند قبل تعریف شده باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned} d_L(x,\overbrace{00\ldots00}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\ldots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{0\ldots0}^{n/2}) \\ &= \frac{n}{4}+0(w_0+w_{2^s})+1(w_1+w_{2^s-1}+w_{2^s+1}+w_{2^{s+1}-1}) \\ &\quad +\ldots+2^{s-1}(w_{2^{s-1}}+w_{2^s+2^{s-1}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_L(x,\overbrace{02^{s-i}\ldots02^{s-i}}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\ldots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{2^{s-i}\ldots2^{s-i}}^{n/2}) \\ &= \frac{n}{4}+0(w_{2^{s-i}}+w_{2^s+2^{s-i}}) \\ &\quad +1(w_{2^{s-i}-1}+w_{2^{s-i}+1}+w_{2^s+2^{s-i}-1}+w_{2^s+2^{s-i}+1}) \\ &\quad +\ldots+2^{s-1}(w_{2^{s-i}-2^{s-1}}+w_{2^{s-i}+2^{s-1}} \\ &\quad +w_{2^s+2^{s-i}-2^{s-1}}+w_{2^s+2^{s-i}+2^{s-1}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_L(x,\overbrace{02^{s-1}\ldots02^{s-1}}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\ldots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{2^{s-1}\ldots2^{s-1}}^{n/2}) \\ &= \frac{n}{4}+0(w_{2^{s-1}}+w_{2^s+2^{s-1}})+1(w_{2^{s-1}-1}+w_{2^{s-1}+1} \\ &\quad +w_{2^s+2^{s-1}-1}+w_{2^s+2^{s-1}+1})+\ldots+2^{s-1}(w_0+w_{2^s}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_L(x,\overbrace{02^s-2^{s-i}\ldots02^s-2^{s-i}}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\ldots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{2^s-2^{s-i}\ldots2^s-2^{s-i}}^{n/2}) \\ &= \frac{n}{4}+0w_{2^s-2^{s-i}}+1(w_{2^s-2^{s-i}-1}+w_{2^s-2^{s-i}+1}) \\ &\quad \ldots+2^{s-1}(w_{2^s-2^{s-i}-2^{s-1}}+w_{2^s-2^{s-i}+2^{s-1}}), \end{aligned}$$

می‌دانیم که مینیمم حد فاصل بین کد کلمات از میانگین آن‌ها کوچکتر است. بنابراین $r_L(C_{2^i}) \le \frac{n}{4}+\frac{n}{2}2^{s-2}$. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۴-۳. فرض کنید $\overbrace{11\ldots11}^{n}$ یک واحد در $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ باشد. در این صورت، $[n,s+1,n,n]$ یک کد تکرار تولید شده توسط ماتریس $[\overbrace{11\ldots11}^{n}]$ است.

اثبات. با استفاده از تعاریف قبلی،

$$x=\overbrace{00\ldots00}^{l}\overbrace{01\ldots01}^{l}\ldots\overbrace{02^{s-1}\ldots02^{s-1}}^{l}\overbrace{10\ldots10}^{l}\overbrace{11\ldots11}^{l}\ldots\overbrace{12^{s-1}\ldots12^{s-1}}^{n-(2^{s+1}-1)l}$$

را در $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s})^n$ نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} d_L(x,\overbrace{00\ldots00}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\ldots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{0\ldots0}^{n/2}) \\ &= \frac{n}{4}+2\Big(2\times\frac{2^{s-1}(2^{s-1}+1)}{2}-2^{s-1}\Big)\frac{l}{2}-1\frac{l}{2} \\ &\quad +\frac{n}{2}-(2^{s+1}-1)\frac{l}{2} \\ &= \frac{n}{4}+n2^{s-3}, \end{aligned}$$

بنابراین، $r_L(C_2) \ge d_L(x,C)=\frac{n}{4}+n2^{s-3}$. برعکس، فرض کنید x یک بردار دلخواه در $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s})^n$ باشد که x_1، x_2 و w_i مانند قبل تعریف شود. پس داریم:

$$\begin{aligned} d_L(x,\overbrace{00\ldots00}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\ldots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{0\ldots0}^{n/2}) \\ &= \frac{n}{4}+0(w_0+w_{2^s})+1(w_1+w_{2^s-1}+w_{2^s+1}+w_{2^{s+1}-1}) \\ &\quad +\ldots+2^{s-1}(w_{2^{s-1}}+w_{2^s+2^{s-1}}), \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} d_L(x,\overbrace{02^{s-1}\ldots02^{s-1}}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{0\ldots0}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{2^{s-1}\ldots2^{s-1}}^{n/2}) \\ &= \frac{n}{4}+0(w_{2^{s-1}}+w_{2^s+2^{s-1}})+1(w_{2^{s-1}-1}+w_{2^{s-1}+1} \\ &\quad +w_{2^s+2^{s-1}-1}+w_{2^s+2^{s-1}+1})+\ldots+2^{s-1}(w_0+w_{2^s}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_L(x,\overbrace{10\ldots10}^{n}) &= d_H(x_1,\overbrace{1\ldots1}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{0\ldots0}^{n/2}) \\ &= \frac{n}{4}+0(w_0+w_{2^s})+1(w_1+w_{2^s-1}+w_{2^s+1}+w_{2^{s+1}-1}) \\ &\quad +\ldots+2^{s-1}(w_{2^{s-1}}+w_{2^s+2^{s-1}}), \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$d_L(x,\overbrace{12^s-2^{s-i}\ldots12^s-2^{s-i}}^{n})=d_H(x_1,\overbrace{1\ldots1}^{n/2})+d_L(x_2,\overbrace{2^s-2^{s-i}\ldots2^s-2^{s-i}}^{n/2})$$
$$=\frac{n}{4}+0w_{2^s-2^{s-i}}+1(w_{2^s-2^{s-i}-1}+w_{2^s-2^{s-i}+1})$$
$$\ldots+2^{s-1}(w_{2^s-2^{s-i}-2^{s-1}}+w_{2^s-2^{s-i}+2^{s-1}}),$$

می‌دانیم که مینیمم حد فاصل بین کد کلمات از میانگین آن‌ها کوچکتر است. بنابراین $r_L(C_{2^i})\le\frac{n}{4}+\frac{n}{2}2^{s-2}$.

۵- شعاع پوششی کدهای تکرار بلوکی روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$

در این بخش ابتدا کدهای تکرار بلوکی $C^{n_{2^{s+1}-1}}$ را روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$- کد جمعی به طول $n=\sum_{j=1}^{2^{s+1}-1}n_j$ با ماتریس مولد G به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G=[\overbrace{01\ldots01}^{n_1}\ldots\overbrace{02^{s-1}\ldots02^{s-1}}^{n_{2^{s-1}}}\overbrace{10\ldots10}^{n_{2^s}}\ldots\overbrace{12^{s-1}\ldots12^{s-1}}^{n_{2^{s+1}-1}}].$$

حال کد بلوکی $C^{(2^{s+1}-1)n}$ محدود به یکی از مقادیر $n=n_j$ را برای $j=1,2,\ldots,2^{s+1}-1$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در ابتدا با یک مثال مسئله را روشن می‌کنیم و سپس حالت کلی را بیان و اثبات می‌کنیم.

مثال ۵-۱. فرض کنید C^{7n} کد بلوکی روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ با ماتریس مولد

$$G^{7n}=[\overbrace{01\ldots01}^{n}\overbrace{02\ldots02}^{n}\overbrace{03\ldots03}^{n}\overbrace{10\ldots10}^{n}\overbrace{11\ldots11}^{n}\overbrace{12\ldots01}^{n}\overbrace{213\ldots013}^{n}]$$

برای بردار

$$x=(\overbrace{01\ldots01}^{n}\overbrace{02\ldots02}^{n}\overbrace{03\ldots03}^{n}\overbrace{00\ldots00}^{n}\overbrace{01\ldots01}^{n}\overbrace{02\ldots02}^{n}\overbrace{03\ldots03}^{n})$$

$d_L(x,C^{7n})=2n$. بنابراین $r_L(C^{7n})\le 2n$.

از سوی دیگر، نگاشت گری کد C^{7n} برابر است با:

000000000000000000000...000000000000000000000,
001011010000001011010...001011010000001011010,
011000011000011000011...011000011000011000011,
010011001000010011001...010011001000010011001,
000000000100100100100...000000000100100100100,
011000011100111100111...011000011100111100111,
010011001100110111101...010011001100110111101

بنابراین، بنا به ۳-۱، $r_L(C^{7n})\ge 2n$.

قضیه ۵-۲. شعاع پوششی کد تکرار بلوکی برابر $r_L(C^{(2^{s+1}-1)n})=2^{s-1}n$.

اثبات. اگر

$$x=(\overbrace{01\ldots01}^{n}\overbrace{02\ldots02}^{n}\ldots\overbrace{02^{s-1}\ldots02^{s-1}}^{n}\overbrace{00\ldots00}^{n}\overbrace{01\ldots01}^{n}\overbrace{02\ldots01}^{n}\ldots\overbrace{02^{s-1}\ldots02^{s-1}}^{n})$$

را در $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s})^{(2^{s+1}-1)n}$ در نظر بگیرید،

$d_L(x,C^{(2^{s+1}-1)n})=2^{s-1}n$.

بنابراین $r_L(C^{(2^{s+1}-1)n})\ge 2^{s-1}n$.

از سوی دیگر، تصویر گری $\phi(C^{(2^{s+1}-1)n})$ شامل کدکلمه

$$\overbrace{0\underbrace{00\ldots00}_{2^{s-1}}\ldots0\underbrace{00\ldots00}_{2^{s-1}}}^{(2^{s-1}+1)n}\overbrace{1\underbrace{00\ldots00}_{2^{s-1}}\ldots1\underbrace{00\ldots00}_{2^{s-1}}}^{(2^{s-1}+1)n}$$

است. با توجه به ۳-۱، $r_L(C^{(2^{s+1}-1)n})\le 2^{s-1}n$.

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله ما شعاع پوششی کدهای تکرار روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ را بررسی کردیم و دیدیم که برابر $\frac{n}{4}+n2^{s-3}$ است. همچنین شعاع پوششی کدهای تکرار بلوکی روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ برابر $2^{s-1}n$ است.

شعاع پوششی کدهای سیمپلکس و کدهای مک دونالد روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ مورد مطالعه قرار گرفته است [۳]. اکنون می‌توان این سوال را مطرح کرد که:

آیا با استفاده از شعاع پوششی کدهای تکرار می‌توان شعاع پوششی کدهای سیمپلکس و کدهای مک‌دونالد تعریف شده روی $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ را محاسبه کرد؟

فهرست منابع

[۱] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Research Reports Supplements ۱۰, (۱۹۷۳).

[۲] P. Delsarte, V. Levenshtein, Association schemes and coding theory, IEEE Transaction on Information Theory ٤٤ (٦): ٢٤٧٧–٢٥٠٤(١٩٩٨).

[۳] J. Pujol, J. Rifa, Translation invariant propelinear codes, IEEE Transaction on Information Theory ۱۰: ۱۱٦–۱۱۸ (۱۹٦٤).

[٤] I. Aydogdu and I. Siap, The structure of $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{2^s}$ -additive codes: Bounds on the minimum distance, Applied Mathematics and Information Sciences (AMIS) ۷: ۲۲۷۱–۲۲۷۸ (۲۰۱۳).

[٥] C. Cohenand I. Honkala, S. Litsyn and A. Lobstein, Covering radius, Elsevier, (۱۹۹۷).

[٦] T. Aoki, P. Gaborit, M. Harada, M. Ozeki, P. Solé, On the covering radius of $\mathbb{Z}_4$-codes and their lattices, IEEE Transaction Information Theory ٤٥ (٦): ٢١٦٢–٢١٦٨(١٩٩٩).

[۷] K. Chatouh, K. Guenda, T. Aaron Gulliver, L. Noui, On some classes of linear codes over $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ and their covering radii, Journal of Applied Mathematics and Computing ٥٣: ٢٠١-٢٢٢ (٢٠١٧).

[۸]M. Curz,C. Durairajan and P. Sole, On the covering radius of codes over $\mathbb{Z}_{p^k}$, Mathematics, MDPI ۲۰۲۰ ۸ (۳): pp.۳۲۸(۲۰۲۰)

[۹] M. Bilal, J. Borges, S.T. Dougherty, C. Fernández-Córdoba, Maximum distance separable codes over $\mathbb{Z}_4$ and $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$, Designs, Codes and Cryptography ٦١ (١): ٣١–٤٠(٢٠١١).

[۱۰] J. Borges, Fernández-Córdoba, C. Pujol, J. Rifá, J. Villanueva, $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ linear codes: Generator matrices and duality. Designs, Codes and Cryptography ٥٤ , (٢): ١٦٧-١٧٩(٢٠١٠).

[۱۱] S. T. Dougherty and C. Fernandez-C. ordoba, Codes over $\mathbb{Z}_{2^k}$ gray map and self-dual codes, Advances in Mathematics of Communications ٥: ٥٧١-٥٨٨(٢٠١١).

[۱۲] M.K. Gupta, C. Durairajan, On the Covering Radius of Some moudular codes, arXiv:۱۲۰٦,۳۰۳۸v۲ [cs.IT](۲۰۱۲).

[۱۳] Durairajan, C. On Covering Codes and Covering Radius of Some Optimal codes. Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, IIT Kanpur, Kanpur, India, (۱۹۹٦).