

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک روش نیمه تحلیلی برای حل مساله پخش اکسیژن

مجتبی مرادی پور*

گروه ریاضیات، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۹/۱۸

چکیده

در این مقاله یک روش نیمه تحلیلی برای حل مساله پخش اکسیژن ارائه می‌شود. ابتدا با استفاده از روش تفاضل متناهی پسرو اوپلر، معادله دیفرانسیل جزئی پخش اکسیژن را در بعد زمان گسسته‌سازی می‌کنیم و به یک دنباله از معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی آزاد در بعد مکان دست می‌یابیم. سپس معادلات دیفرانسیل معمولی به دست آمده را به صورت تحلیلی حل کرده و یک رابطه بازگشتی ارائه می‌کنیم که جواب معادله دیفرانسیل جزئی را در هر سطر زمانی به دست می‌دهد. در ادامه، مساله یافتن مرز آزاد معادله دیفرانسیل را به یک مساله جبری غیر خطی تبدیل نموده و در نهایت مسائل جبری غیر خطی تحت بررسی را با روش‌های عددی از قبیل روش نابه‌جائی حل می‌کنیم. روش ارائه شده، از حل دستگاه‌های معادلات خطی بی‌نیاز است و به آسانی توسط نرم‌افزار پیاده‌سازی می‌شود. مقایسه‌ای با سایر روش‌های عددی نشان می‌دهد که روش ارائه شده کارایی بالایی دارد و نتایج بسیار دقیقی را تولید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: مساله پخش اکسیژن، معادلات دیفرانسیل جزئی، مسایل مرز-آزاد.

۱- مقدمه

معادله دیفرانسیل جزئی زیر که به معادله پخش اکسیژن معروف است را در نظر می‌گیریم

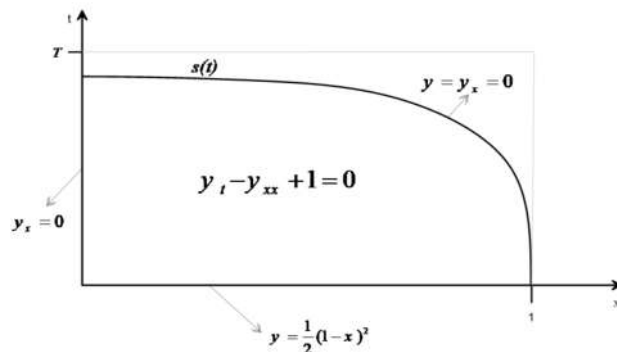
$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + 1 = 0, & 0 < x < s(t), & 0 < t < T \\ y(x, 0) = \frac{1}{2}(1-x)^2, & 0 < x < 1, \\ y_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ y(s(t), t) = y_x(s(t), t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

مساله بالا با مدل‌سازی فرایند جذب و پخش اکسیژن در یک بافت زیستی مرتبط است و در [۳، بخش ۱-۳-۱۰] به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته شده است. در مساله داده شده $s(t)$ مرز مجهول مساله است که باید به همراه جواب مجهول $y(x, t)$ یافته شود. دامنه مساله فوق همراه با مرز مجهول مساله در شکل ۱ نشان داده شده است. تا کنون هیچ جواب به فرم بسته برای مساله (۱) ارائه نشده است و حل آن مستلزم به کارگیری روش‌های عددی است.

در [۱] روش تاو^۱ برای حل معادله (۱) مورد استفاده قرار گرفته شده است. روش تاو که ابتدا توسط [۱۶] معرفی شد بر اساس یک بسط متناهی از تعدادی تابع پایه ای عمل می‌کند. در [۱۰] یک روش

انتگرالی برای حل (۱) توسعه داده شده است. در [۱۱] روش عناصر متناهی برای حل مساله مذکور به کار برده شده است. همچنین در مراجع [۲، ۵ و ۱۳] روش‌های عددی مبتنی بر نامساوی‌های تغییراتی برای حل (۱) توسعه داده شده‌اند. در [۱۴] یک معادله دیفرانسیل مشابه، از طریق نامساوی‌های تغییراتی حل شده است. خواننده می‌تواند روش‌های متنوع دیگری را در مراجع [۴، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۲] بیابد.

در این مقاله یک روش نیمه تحلیلی برای حل معادله مذکور به کار می‌گیریم. ابتدا معادله را بر محور زمان گسسته‌سازی کرده و به دنباله‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی در بعد مکان دست می‌یابیم. معادلات مذکور را به روش تحلیلی حل می‌کنیم و یک رابطه بازگشتی برای حل آنها ارائه می‌کنیم. در نهایت نتایج عددی به دست آمده را با نتایج [۱] مقایسه می‌کنیم. قابل توجه است که روش نیمه تحلیلی ارائه شده نیازی به حل دستگاه‌های معادلات خطی ندارد، اجرای آن در کامپیوتر آسان بوده و نتایج بسیار دقیقی را تولید می‌کند.



شکل ۱: دامنه مساله (۲) به همراه مرز مجهول $s(t)$ در درون دامنه، معادله دیفرانسیل $y_t - y_{xx} + 1 = 0$ برقرار است. بر

مرز مجهول $s(t)$ تابع $y(x, t)$ مماس بر صفحه $x-t$ است.

$$y^{k+1}(s) = 0, \quad (5)$$

که در آن $s = s(t_{k+1})$ مکان مرز مجهول مساله است که باید به همراه جواب $y^{k+1}(x)$ یافته شود. فرض کنیم جواب عمومی معادله ناهمگن (۲) به صورت زیر داده شده باشد

$$y^{k+1} = \alpha_{k+1} e^{-px} + \beta_{k+1} e^{px} + y_p^{k+1} \quad (6)$$

که در آن $\alpha_{k+1} e^{-px} + \beta_{k+1} e^{px}$ جواب عمومی بخش همگن معادله و y_p^{k+1} جواب خصوصی معادله ناهمگن باشد. با اعمال شرط (۳) به دست می‌آوریم

$$\beta_{k+1} = \alpha_{k+1} - \frac{1}{p} y_p^{k+1}(0),$$

با اعمال شرط (۴) به دست می‌آوریم

$$\alpha_{k+1} = \frac{-y_p^{k+1}(s) - \frac{1}{p} e^{ps} y_p^{k+1}(0)}{2 \cosh ps}.$$

با جایگذاری α_{k+1} و β_{k+1} در شرط (۵) به معادله غیر خطی زیر بر حسب تنها متغیر s دست پیدا می‌کنیم.

$$F(s) = 0.$$

معادله جبری غیر خطی فوق را با روش نابه‌جایی حل کرده و از حل آن، مکان مرز مجهول مساله یعنی $s(t_{k+1})$ را به دست می‌آوریم. روند فوق، پاسخ معادله (۱) را در سطر زمانی $k+1$ ام به همراه مرز مجهول مساله در نقطه t_{k+1} محاسبه می‌کند. جواب خصوصی y_p^{k+1} را از روش عمومی (روش تغییر پارامترها) و با استفاده از جواب عمومی معادله در سطر زمانی قبلی یعنی $\alpha_k e^{-px} + \beta_k e^{px}$ به دست می‌آوریم.

در ادامه یک روش بازگشتی برای محاسبه y_p^{k+1} در سطر زمانی $k+1$ ام ارائه می‌کنیم. جواب تحلیلی

۲- تقریب نیم گسسته برای مساله پخش

اکسیژن

معادله دیفرانسیل (۱) را نسبت به زمان گسسته‌سازی می‌کنیم. برای این منظور، بر بازه زمانی $[0, T]$ نقاط هم فاصله

$$\{0 = t_1, t_2, \dots, t_N = T\}$$

با طول گام δt را در نظر می‌گیریم. از روش تفاضل متناهی پسرو اویلر استفاده کرده گسسته‌سازی زمانی را انجام می‌دهیم. در اولین معادله از (۱) قرار می‌دهیم

$$y_t(x, t_{k+1}) = \frac{y(x, t_{k+1}) - y(x, t_k)}{\delta t}$$

با نماد گذاری $y^k := y(x, t_k)$ اولین معادله در (۱) به صورت زیر در می‌آید

$$y^{(k+1)} - \delta t y^{k+1} = y^k - \delta t,$$

حال قرار می‌دهیم

$$p > \frac{1}{\sqrt{\delta t}},$$

و به دنباله زیر از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی ناهمگن با ضرایب ثابت دست پیدا می‌کنیم

$$y^{k+1} - p^2 y^{k+1} = 1 - p^2 y^k,$$

دنباله فوق از جمله آغازین

$$y^0(x) = \frac{1}{2}(1-x^2),$$

شروع می‌شود. جملات بعدی دنباله $\{y^k\}_{k=0}^{\infty}$ به ترتیب از حل (۲) حاصل می‌شوند. شرایط مرزی معادلات (۲) به صورت زیر است

$$y^{k+1}(0) = 0, \quad (3)$$

$$y^{k+1}(s) = 0, \quad (4)$$

به طوری که

$$y_p^k = e^{-px} \sum_{i=0}^{k-1} M_i^k x^i + e^{px} \sum_{i=0}^{k-1} N_i^k x^i + A_k x^2 + B_k x + C_k, \quad (12)$$

که در آن ضرایب M_i^k و N_i^k به صورت بازگشتی از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$M_i^{k+1} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \sum_{j=0}^{k-1} M_j^k a_{j0}, & i=0, \\ \frac{p}{2} \left(\frac{M_{i-1}^k}{i} - \sum_{j=i}^{k-1} M_j^k a_{ji} \right), & 1 \leq i \leq k, \\ \frac{p}{2} \frac{M_{k-1}^k}{k}, & i=k, \end{cases} \quad (13)$$

و

$$N_i^{k+1} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \sum_{j=0}^{k-1} N_j^k b_{j0}, & i=0, \\ \frac{p}{2} \left(\sum_{j=i}^{k-1} N_j^k b_{ji} - \frac{N_{i-1}^k}{i} \right), & 1 \leq i \leq k, \\ \frac{p}{2} \frac{N_{k-1}^k}{k}, & i=k, \end{cases} \quad (14)$$

که در آن

$$a_{ij} = -\left(\frac{1}{2p}\right)^{i+j-1} \binom{i}{j}, \quad (15)$$

$$b_{ij} = (-1)^{i-j} \left(\frac{1}{2p}\right)^{i+j-1} \binom{i}{j}.$$

همچنین ضرایب A_k و B_k و C_k از روابط بازگشتی زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= A_k, \\ B_{k+1} &= B_k, \\ C_{k+1} &= C_k + \frac{2A_k - 1}{p^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

اثبات. می‌خواهیم برای ضرایب مجهول A_k ، B_k ،

معادله ناهمگن (۲) به صورت (۶) نوشته می‌شود که در آن e^{-px} و e^{px} جواب‌های مستقل خطی بخش همگن معادله و y_p^{k+1} یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن است. جواب خصوصی y_p^{k+1} را با استفاده از روش تغییر پارامترها (روش عمومی) به صورت زیر می‌یابیم.

$$\begin{aligned} y_p^{k+1} &= \frac{-e^{-px}}{2p} \int e^{px} (1-p^2 y^k) \\ &\quad + \frac{e^{px}}{2p} \int e^{-px} (1-p^2 y^k) \\ &= \frac{-1}{p^2} + \frac{p}{2} \left[e^{-px} \int e^{px} y^k - e^{px} \int e^{-px} y^k \right] \end{aligned} \quad (7)$$

برای مثال:

$$y_p^1 = \frac{-1}{p^2} + \frac{p}{2} \left[e^{-px} \int e^{px} y^0 - e^{px} \int e^{-px} y^0 \right] \quad (8)$$

که نتیجه می‌دهد

$$y^1 = \alpha_1 e^{-px} + \beta_1 e^{px} + A_1 x^2 + B_1 x + C_1, \quad (9)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1-p^3-2p^2+6p+4}{4p^3}, \\ B_1 &= -\frac{1-2p^2+4p}{4p^3}, \\ C_1 &= -\frac{1-p^3+2p^2}{4p^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

ضرایب مجهول α_1 و β_1 از شرایط مرزی به دست می‌آیند. بعد از محاسبه α_1 و β_1 جواب $y^1 = y(x, t_1)$ تعیین می‌شود. با ادامه این فرایند y^2 ، y^3 و ... نیز به دست می‌آیند. در هر سطر زمانی، جواب عمومی مساله یعنی y^k ترکیبی از توابع نمایی و چندجمله‌ای خواهد بود.

قضیه ۲-۱: جواب معادله (۲) در هر سطر زمانی

می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$y^k = \alpha_k e^{-px} + \beta_k e^{px} + y_p^k, \quad (11)$$

از نمادهای S_{ik} و Z_{ik} تعریف شده در معادله بالا استفاده کرده و معادله را به صورت خلاصه زیر می‌نویسیم:

$$\Rightarrow y_p^{k+1} = \frac{p}{2} \left[-e^{-px} \sum_{i=0}^{k-1} S_{ik} x^i + e^{-px} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M_i^k}{i+1} x^{i+1} + e^{px} \sum_{i=0}^{k-1} Z_{ik} x^i - e^{px} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N_i^k}{i+1} x^{i+1} \right] + I$$

حال در دومین و چهارمین جمعوند، اندیس i را یک واحد افزایش داده سپس جملات آخر مجموعه‌ها را جدا می‌کنیم؛ به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow y_p^{k+1} = \frac{p}{2} \left[-e^{-px} \sum_{i=0}^{k-1} S_{ik} x^i + e^{-px} \frac{M_{k-1}^k}{k} x^k + e^{-px} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{M_{i-1}^k}{i} x^i + e^{px} \sum_{i=0}^{k-1} Z_{ik} x^i - e^{px} \frac{N_{k-1}^k}{k} x^k - e^{px} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{N_{i-1}^k}{i} x^i \right] + I$$

سری‌های شامل جمله x^i را ادغام کرده از عبارتهای نمایی فاکتور می‌گیریم:

$$\Rightarrow y_p^{k+1} = \frac{p}{2} \left[-e^{-px} \left(S_{0k} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(S_{ik} - \frac{M_{i-1}^k}{i} \right) x^i - \frac{M_{k-1}^k}{k} x^k \right) + e^{px} \left(Z_{0k} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(Z_{ik} - \frac{N_{i-1}^k}{i} \right) x^i - \frac{N_{k-1}^k}{k} x^k \right) \right] + I$$

معادله به دست آمده را با عبارت (۱۲) مقایسه می‌کنیم (جملات دو معادله را تطبیق می‌دهیم).

$$y_p^{k+1} = e^{-px} \left[\underbrace{\frac{-p S_{0k}}{2}}_{M_0^{k+1}} + \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{\frac{p}{2} \left(S_{ik} - \frac{M_{i-1}^k}{i} \right)}_{M_i^{k+1}} x^i + \underbrace{\frac{p M_{k-1}^k}{2k}}_{M_k^{k+1}} x^k \right] + e^{px} \left[\underbrace{\frac{p Z_{0k}}{2}}_{N_0^{k+1}} + \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{\frac{p}{2} \left(Z_{ik} - \frac{N_{i-1}^k}{i} \right)}_{N_i^{k+1}} x^i - \underbrace{\frac{p N_{k-1}^k}{2k}}_{N_k^{k+1}} x^k \right] + \left(\underbrace{A_k}_{A_{k+1}} x^2 + \underbrace{B_k}_{B_{k+1}} x + C_k + \frac{2A_{k-1}}{p^2} \right)_{C_{k+1}}$$

C_k ، M_i^k و N_i^k موجود در (۱۲) یک رابطه بازگشتی به دست آوریم، برای این منظور با جایگزین کردن معادله (۱۲) در (۷) به دست می‌آوریم

$$y_p^{k+1} = \frac{1}{p^2} + \frac{p}{2} \left[e^{-px} \int \sum_{i=0}^{k-1} M_i^k x^i + e^{-px} \int \sum_{i=0}^{k-1} e^{2px} N_i^k x^i + e^{-px} \int e^{px} (A_k x^2 + B_k x + C_k) - e^{px} \int \sum_{i=0}^{k-1} N_i^k x^i - e^{px} \int e^{2px} \sum_{i=0}^{k-1} M_i^k x^i - e^{px} \int e^{-px} (A_k x^2 + B_k x + C_k) \right]$$

در معادله فوق انتگرال‌ها را به روش جزیه‌جز محاسبه می‌کنیم، سپس با کمک نمادگذاری موجود در (۱۵) معادله فوق را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$y_p^{k+1} = \frac{p}{2} \left[e^{-px} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M_i^k}{i+1} x^{i+1} + e^{-px} e^{2px} \sum_{i=0}^{k-1} N_i^k \left(\sum_{j=0}^i b_{ij} x^j \right) - e^{px} e^{-2px} \sum_{i=0}^{k-1} M_i^k \left(\sum_{j=0}^i a_{ij} x^j \right) - e^{px} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N_i^k}{i+1} x^{i+1} \right] + \underbrace{\left(A_k x^2 + B_k x + C_k + \frac{2A_{k-1}}{p^2} \right)}_{I:=}$$

در معادله فوق، مجموعه‌ها را به صورت دوگانه در می‌آوریم، به علاوه نمادهای جدیدی جهت خلاصه نویسی تعریف می‌کنیم.

$$\Rightarrow y_p^{k+1} = \frac{p}{2} \left[e^{-px} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M_i^k}{i+1} x^{i+1} - e^{-px} \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\left(\sum_{j=i}^{k-1} M_j^k a_{ji} \right)}_{S_k:=} x^i + e^{px} \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\left(\sum_{j=i}^{k-1} N_j^k b_{ji} \right)}_{Z_k:=} x^i - e^{px} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N_i^k}{i+1} x^{i+1} \right] + I$$

می‌گیریم و مساله را در دامنه محاسباتی $[0,1] \times [0,2]$ حل می‌کنیم. بر هر سطر زمانی توابع $\{y^1, y^2, \dots, y^{200}\}$ را به دست می‌آوریم.

برای محاسبه چندجمله‌ای‌های موجود در (۱۲) از روش هورنر استفاده می‌کنیم. نتایج به دست آمده را با مقادیر مرجع به دست آمده در [۱] مقایسه می‌کنیم. مکان مرز مجهول مساله را در هر سطر زمانی با استفاده از روش نابه‌جایی محاسبه می‌کنیم. شکل ۳ مکان مرز مجهول مساله را نمایش می‌دهد. در شکل ۲ نمودار توابع $y^1(x)$ ، $y^2(x)$ و $y^{200}(x)$ را نمایش داده‌ایم. در شکل ۴ شمای کلی جواب را رسم کرده‌ایم. در جدول ۱ جواب معادله را به ازای x ها و t های مختلف نشان داده و آن را با روش به دست آمده در مرجع [۱] مقایسه کرده‌ایم. همچنین در جدول ۲ تقریب‌های به دست آمده از مرز مجهول مساله را با روش به دست آمده در [۱] مقایسه کرده‌ایم. نتایج به دست آمده کارایی روش نیمه تحلیلی را به خوبی نشان می‌دهد.

$$= e^{-px} \sum_{i=0}^k M_i^{k+1} x^i + e^{px} \sum_{i=0}^k N_i^{k+1} x^i + A_{k+1} x^2 + B_{k+1} x + C_{k+1}.$$

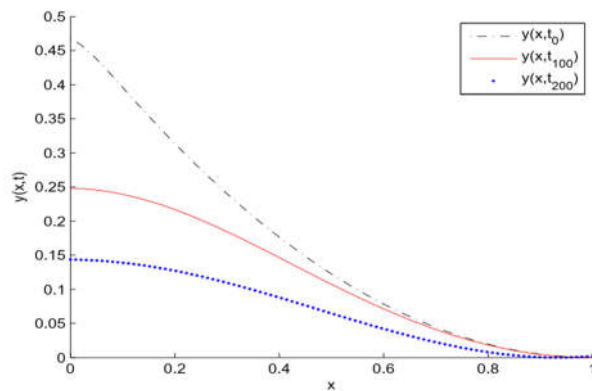
مقایسه فوق فرمول‌های (۱۳)، (۱۴) و (۱۶) را تصدیق می‌کند. جواب خصوصی معادله ناهمگن (۲) در هر سطر زمانی از رابطه بازگشتی فوق حاصل می‌شود.

ملاحظه ۲-۱: در سطر زمانی k ام نیاز به مقداردهی

به چندجمله‌ای‌های $\sum_{i=0}^{k-1} N_i^k x^i$ و $\sum_{i=0}^{k-1} M_i^k x^i$ داریم که هر دو از درجه $k-1$ می‌باشند. با استفاده از روش هورنر می‌توانیم این مقداردهی را با تعداد $k-1$ عمل ضرب انجام دهیم.

۳- نتایج عددی

در این بخش با استفاده از روش نیمه تحلیلی ارائه شده، به گسسته سازی معادله (۱) می‌پردازیم. بر محور t ها تعداد $N = 200$ نقطه در نظر

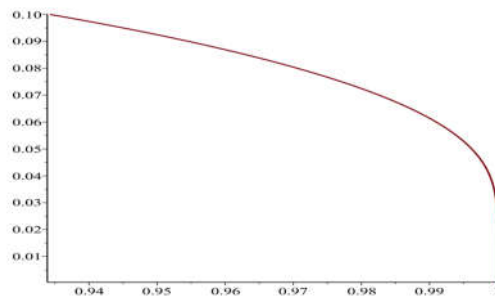


شکل ۲. نمودار تقریبی $y(x,t)$ جواب معادله (۱) به ازای سه سطر زمانی t_{100} ، t_0 ، t_{200} .

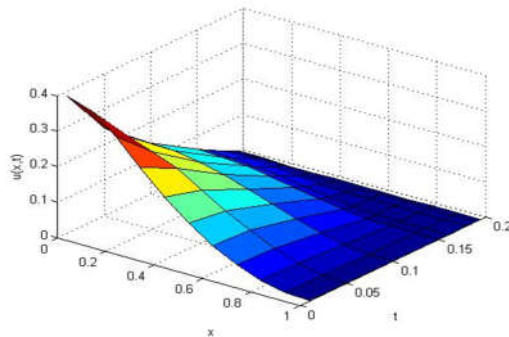
جدول ۱: سطر اول در هر ردیف: مقادیر مرجع برای جواب $y(x, t)$ محاسبه شده توسط مرجع [۱]. سطر دوم در هر ردیف:

جواب‌های محاسبه شده با روش نیمه تحلیلی با تعداد $N = 200$ سطر زمانی.

				x						
	۰.۸	۰.۷	۰.۶	۰.۵	۰.۴	۰.۳	۰.۲	۰.۱	۰	
	۰.۱۹۹۹۸	۰.۴۵۰۰۷	۰.۷۹۹۸۶	۱.۲۴۹۴۵	۱.۷۹۶۳۲	۲.۴۲۷۸۴	۳.۰۹۴۴۸	۳.۶۵۵۸۶	۳.۸۸۵۶۳	۰.۱
	۰.۱۹۹۹۹	۰.۴۴۹۹۹	۰.۷۹۹۹۳	۱.۲۴۹۴۶	۱.۷۹۶۲۴	۲.۴۲۷۹۲	۳.۰۹۴۴۵	۳.۶۵۵۸۶	۳.۸۸۵۶۳	
	۰.۱۸۷۲۶	۰.۴۱۸۲۳	۰.۷۲۶۹۵	۱.۰۹۳۶۶	۱.۴۸۸۱۹	۱.۸۶۹۹۰	۲.۱۹۱۴۸	۲.۴۰۷۱۳	۲.۴۸۳۱۷	۰.۵
	۰.۱۸۷۲۵	۰.۴۱۸۲۳	۰.۷۲۶۹۵	۱.۰۹۳۶۶	۱.۴۸۸۱۹	۱.۸۶۹۹۰	۲.۱۹۱۴۸	۲.۴۰۷۱۴	۲.۴۸۳۱۷	
	۰.۰۸۲۳۲	۰.۲۳۰۵۹	۰.۴۳۰۱۸	۰.۶۵۸۹۲	۰.۸۹۲۹۵	۱.۱۰۷۸۷	۱.۲۸۰۸۲	۱.۳۹۲۹۴	۱.۴۳۱۷۷	۱
	۰.۰۸۱۳۹	۰.۲۲۹۳۵	۰.۴۲۹۱۱	۰.۶۵۸۵۳	۰.۸۹۳۶۴	۱.۱۰۹۸۷	۱.۲۸۴۰۷	۱.۳۹۷۰۸	۱.۴۳۶۲۳	
	۰.۰۱۰۳۴	۰.۰۸۳۱۶	۰.۱۹۶۷۷	۰.۳۲۴۸۶	۰.۴۴۶۷۸	۰.۵۴۶۱۸	۰.۶۱۰۸۸	۰.۶۳۳۳۱	۱۵ t
	۰.۰۱۰۵۹	۰.۰۸۳۶۲	۰.۱۹۷۳۴	۰.۳۲۵۵۷	۰.۴۴۷۶۹	۰.۵۴۷۲۸	۰.۶۱۲۱۱	۰.۶۳۴۵۹	
	۰.۰۲۹۶۸	۰.۱۱۴۲۱	۰.۲۲۰۷۶	۰.۳۲۶۱۷	۰.۴۱۳۵۲	۰.۴۷۰۷۹	۰.۴۹۰۷۰	۱۶
	۰.۰۳۰۲۶	۰.۱۱۴۹۷	۰.۳۲۷۱۹	۰.۳۲۷۱۹	۰.۴۱۴۶۸	۰.۴۷۲۰۷	۰.۴۹۲۰۱	
	۰.۰۳۷۰۲	۰.۱۰۱۵۵	۰.۱۶۲۹۵	۰.۲۰۵۲۸	۰.۲۱۰۲۷	۱۸
	۰.۰۳۸۳۱	۰.۱۰۲۹۴	۰.۱۶۴۳۶	۰.۲۰۶۷۱	۰.۲۲۱۷۱	
	۰.۰۰۹۹۱	۰.۰۴۸۳۰	۰.۰۸۰۷۱	۰.۰۹۲۷۵	۱۹
	۰.۰۰۸۵۹	۰.۰۵۰۴۴	۰.۰۸۲۳۵	۰.۰۹۴۳۶	



شکل ۳. نمودار تقریبی $S(t)$ مرز مجهول مساله (۱).



شکل ۴. نمودار $y(x, t)$ جواب معادله (۱) در دامنه محاسباتی $[0, 2] \times [0, 1]$

جدول ۲: مکان مرز مجهول مساله $s(t)$ به ازای t های مختلف.

t	$s(t)$ به دست آمده از روش نیمه تحلیلی	$s(t)$ به دست آمده از روش ارائه شده در [۱]
۰,۰۴	۰,۹۹۸۸۴	۰,۹۹۸۹
۰,۰۶	۰,۹۹۰۹۶	۰,۹۹۱۱
۰,۱	۰,۹۳۴۲۶	۰,۹۳۴۳
۰,۱۲	۰,۸۷۹۰۲	۰,۸۷۹۰
۰,۱۴	۰,۷۹۹۸۶	۰,۷۹۹۹
۰,۱۶	۰,۶۸۶۲۹	۰,۶۸۶۳
۰,۱۸	۰,۵۰۸۶۷	۰,۵۰۸۷

- [9] R.S. Gupta and D. Kumar, Complete numerical solution of the oxygen diffusion problem involving a moving boundary, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 29, 233-239, 1981.
- [10] E.B. Hansen and P. Hougaard, On a moving boundary problem from biomechanics, *J. Inst. Math. Appl.* 13, 385-398, 1974.
- [11] J.V. Miller, K.W. Morton and M.J. Balnes, A finite element moving boundary computation with an adaptive mesh, *J. Inst. Math. Appl.* 22, 467-477, 1978.
- [12] S.L. Mitchell and M. Vynnycky, The oxygen diffusion problem: Analysis and numerical solution, *Applied Mathematical Modelling*, 2763–2776, 2015.
- [13] M. Moradipour, A Variational Inequality Approach for One Dimensional Stefan Problem, *Mathematical Analysis and Convex Optimization*, 1(2): 35–43, 2020.
- [14] M. Moradipour, An effective algorithm to solve option pricing problems, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 12(1): 261–271, 2021.
- [15] W.D. Murray and F. Landis, Numerical and machine solutions of transient heat-condition problems involving melting or freezing, Part 1–Method of analysis and sample solutions, *J. Heat Transfer* 81 (2), 106-112, 1959.
- [16] E.L. Ortiz, The tau method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 480-492, 1969.
- [1] M. H. Aliabadi and E.L. Ortiz, Numerical treatment of moving and free boundary value problems with the tau method, *Computers & Mathematics with Applications*, 35, 53 – 61, 1998.
- [2] R. W. Cottle, Numerical methods for complementarity problems in engineering and applied science, *Proc. Comput. Meth. Appl. Sci. Engng.*, Springer Lec. Notes, No. 704, pp. 37-52, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [3] J. Crank, Free and moving boundary problems, Oxford science publications, Clarendon Press, 1984.
- [4] J. Crank and R.S. Gupta, A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorbing tissue, *J. Inst. Math. Appl.* 10, 19-33, 1972.
- [5] C. Elliott and J.R. Ockendon, Weak and variational methods for moving boundary problems, *Research Notes in Mathematics*, No. 59, Pitman, London, 1982.
- [6] T.A.Galib, J.C. Bruch, and J. M. Sloss, Solution of an oxygen diffusion-absorption problem, *International Journal of Bio-Medical Computing*, 12(2): 157–180, 2004.
- [7] R.S. Gupta, Moving grid methods without interpolations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 4, 143-152, 1974.
- [8] R.S. Gupta and D. Kumar, A modified variable time step method for the one-dimensional Stefan problem, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 23, 101-109, 1980.

