دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی مشتقات جهتی و جزئی نگاشت‌های چند بعدی فازی تحت مشتق‌پذیری تعمیم یافته

محسن میری کرباسکی[۱]**، محمدرضا بلوچ شهریاری**[۲*]**، ام‌البنین صداقت‌فر**[۳]

[۱و۲] گروه ریاضی، واحد شهید حاج قاسم سلیمانی، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران
[۳] گروه ریاضی، واحد یادگار امام خمینی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۱۷   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۸/۱۰

چکیده

مسائل مربوط به بهینه سازی فازی در مقالات اخیر با الهام از مفاهیم تفاضل هاکوهارای تعمیم یافته و مشتق پذیری هاکوهارای تعمیم یافته برای توابع یک بعدی از فضای به توی E توسط نویسندگان زیادی مورد بحث قرار گرفته است و پیشرفت قابل ملاحظه‌ای داشته است. در این مقاله، مفهوم مشتق‌پذیری تعمیم یافته کلی با استفاده از تفاضل تعمیم یافته از فضای n به توی E برای نگاشت‌های چند بعدی فازی، معرفی شده است. همچنین مشتق‌پذیری تعمیم یافته کلی فوق مورد بررسی قرار گرفته شده است و در ادامه مفهوم مشتق‌پذیری تعمیم‌یافته جهتی و مشتق‌پذیری تعمیم‌یافته جزئی برای نگاشت‌های چند بعدی فازی تعریف و به تفصیل بحث شده است، سپس مشتق‌پذیری تعمیم یافته جهتی و مشتق‌پذیری تعمیم یافته جزئی برحسب مشتق‌پذیری تعمیم یافته سطح به سطح بیان شده است. همچنین خواص و ارتباط بین آنها بحث شده است. در نهایت روابط بین مشتق-پذیری تعمیم یافته کلی، مشتق‌پذیری تعمیم یافته جهتی و مشتق‌پذیری تعمیم یافته جزئی برای نشان دادن توانایی و قابلیت روابط بین آنها با ذکر چند مثال نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: اعداد فازی n-بعدی، نگاشت‌های چند بعدی فازی، مشتق‌پذیری تعمیم یافته کلی، مشتق پذیری تعمیم‌یافته جهتی، مشتق‌پذیری تعمیم یافته جزئی.

---

* . عهده دار مکاتبات
Email: baloochshahryari.1980@gmail.com

۱- مقدمه

از زمانی که پروفسور لطفی‌زاده مفاهیم و تعاریف اساسی نظریه فازی را آغاز نمود، بسیاری از مطالعات نسبت به جنبه‌های نظری و کاربردهای مجموعه‌های فازی متمرکز شدند[۲۳]. سپس مفهوم اعداد فازی توسط پروفسور لطفی‌زاده مطرح شد. تاکنون اعداد فازی توسط بسیاری از محققان به صورت گسترده مورد توجه قرار گرفته است[۲۴,۲۵]. در مدل‌های ریاضی، اعداد فازی به‌عنوان ابزاری برای مدل کردن فرآیندهای مبهم، پردازش مفاهیم مبهم و یا پرداختن به اطلاعات ذهنی مورد استفاده قرار می‌گیرند. اعداد فازی در جهات مختلف توسعه یافته‌اند و در بسیاری از مسائل عملی همچون بهینه‌سازی فازی [۷]، کنترل فازی [۸,۱۵]، معادله دیفرانسیل فازی و سایر موارد کاربرد دارند. در ادامه محققان متعددی شروع به بررسی و استفاده از مشتق‌پذیری و انتگرال‌پذیری نگاشت‌های فازی برای توسعه نظریه اعداد فازی و کاربردهای آن‌ها اقدام نمودند.

پوری و رالسکو مشتق نگاشت فازی را از یک زیر مجموعه باز یک فضای نرم دار به توی فضای n-بعدی اعداد فازی توسعه داده و سپس مفهوم مشتق پذیری هاکوهارا (به‌طور مختصر (H)-مشتق‌پذیری) را برای نگاشت‌های مجموعه-مقدار تعمیم دادند [۱۶]. در سال ۱۹۸۷ کالوا، (H)-مشتق پذیری را در نظر گرفت و شرط لازم و کافی برای (H)-مشتق پذیری نگاشت‌های فازی از $[a,b]$ به توی E را بدست آورد [۱۴]. با استفاده از تفاضل هاکوهارا (به طور مختصر (H)-تفاضل)، وانگ و وو مشتق‌پذیری جهتی و زیر دیفرانسیل‌پذیری نگاشت‌های فازی از n به توی E را در سال ۲۰۰۳ مطرح کردند[۲۲].

از آنجا که (H)-تفاضل بین دو عدد فازی فقط در شرایط محدود رخ می‌دهد و (H)-تفاضل دو عدد فازی همیشه وجود ندارد [14,17,18]. بنابراین تعمیمی از این تفاضل، به نام تفاضل هاکوهارا تعمیم یافته (به‌طور مختصر (gH)-تفاضل) توسط استفانینی در سال ۲۰۱۰ ارائه شد [19].

(gH)-تفاضل نسبت به (H)-تفاضل در موارد بیشتری وجود دارد، اما همیشه موجود نمی‌باشد. بد و استفانینی برای حل این مشکل تفاضل تعمیم یافته (به‌طور مختصر (g)-تفاضل) را معرفی نمودند که با این تعریف (g)-تفاضل بین دو عدد فازی همیشه وجود دارد [3].

لازم به ذکر است که این تفاضل هم در برخی موارد شرط محدب بودن اعداد فازی را حفظ نمی‌کند لذا تفاضل حاصل، عدد فازی بدست نمی‌آید که این مشکل توسط گومز و باروس با در نظرگرفتن غلاف محدب مجموعه حاصل برطرف شد[10]. بر اساس این دو تفاضل، مشتق هاکوهارا تعمیم یافته (به‌طور مختصر (gH)-مشتق) و مشتق تعمیم یافته (به‌طور مختصر (g)-مشتق) توسط بد و استفانینی بدست آمد [4,6].

شایان ذکر است که (gH)-مشتق همواره موجود نیست به همین دلیل (g)-مشتق ارائه شد. با ارائه (g)-مشتق‌پذیری نقطه عطفی در تحلیل و بررسی نگاشت‌های چند بعدی فازی، بهینه‌سازی فازی و معادلات دیفرانسیل فازی بوجود آمد که نسبت به تمام تعاریف مشتقات فازی ارائه شده تاکنون کلی‌تر می‌باشد و برای کلاس وسیع‌تری از توابع فازی-مقدار و نگاشت‌های فازی-مقدار برقرار می‌باشد.

در اینجا یک توسیع جدیدی از مفهوم (g)-مشتق پذیری کلی برای نگاشت‌های چند بعدی فازی که توسط بدِ و استفانینی پایه‌گذاری شده را مطرح می‌نمائیم [۳]. این مفهوم (g)-مشتق‌پذیری کلی برای نگاشت‌های چند بعدی فازی، توسیع جدیدی از (H)-مشتق پذیری، مشتق‌پذیری تعمیم یافته قوی (به‌طور مختصر (G)-مشتق‌پذیری) و مشتق پذیری تعمیم یافته هاکوهارا (به طور مختصر (gH)-مشتق‌پذیری) برای نگاشت‌های چند بعدی فازی می‌باشد. علاوه بر این برای نگاشت‌های چند بعدی

فازی، ⓖ-مشتق‌پذیری جهتی و همچنین ⓖ-مشتق‌پذیری جزئی را معرفی می‌کنیم.
هدف ما در این مقاله پیاده‌سازی ⓖ-تفاضل فازی ارائه شده توسط بدِ و استفانینی [۳]، ضمن تعریف و مطالعه ⓖ-مشتق پذیری کلی برای نگاشت‌های چند بعدی فازی است. این تحقیق به‌صورت زیر سازماندهی گردیده است:
در بخش ۲، نظریه فازی، مفاهیم اساسی، تعاریف اولیه و قضایای مورد نیاز آورده شده است. در بخش ۳ مشتق‌پذیری تعمیم یافته کلی نگاشت‌های چند بعدی فازی بیان و در بخش ۴ و ۵، مشتق‌پذیری تعمیم یافته جهتی و جزئی را تعریف و ارتباط بین آن‌ها را بیان می‌نمائیم و برای نشان دادن توانایی و قابلیت ⓖ-مشتق‌پذیری نگاشـت‌های چند بعدی فازی چند نمونه از کاربردهای آن را با ذکر مثال مورد ارزیابی قرار داده‌ایم. بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۶ آورده شده است.

۲- نظریه فازی و مفاهیم اولیه

در این بخش برخی از مفاهیم پایه‌ای و اساسی نظریه فازی، از جمله مجموعه‌های فازی، عدد فازی، متر فازی و تابع فازی که در فصول بعد مورد نیاز است را یادآوری می‌کنیم. علاوه بر این به معرفی مشتقات فازی تعمیم یافته بخصوص (gH)-مشتق‌پذیری، مشتق‌پذیری تعمیم یافته سطح به سطح (به‌طور مختصر (L_{gH})-مشتق‌پذیری) و ⓖ-مشتق‌پذیری می‌پردازیم و مفاهیم مرتبط با آنها را که در این مقاله استفاده می‌شود را ارائه خواهیم کرد.

تعریف ۲-۱: [۱۶] فرض کنید که X یک مجموعه غیر تهی است. یک مجموعه فازی u در X، با تابع عضویت $u: X \to [0,1]$ مشخص می‌شود و $u(x)$ را درجه عضویت عنصر x در مجموعه فازی u برای هر $x \in X$ نشان می‌دهد.

مجموعه فازی $u: \quad \to [0,1]$ از محور حقیقی، عدد فازی نامیده می‌شود اگر ویژگی‌های زیر را دارا باشد:

(i) u نرمال باشد، به عبارت دیگر $\quad x^0 \in$ وجود داشته باشد به طوری که $u(x^0) = 1$ باشد؛

(ii) u مجموعه محدب فازی باشد، به عبارت دیگر برای هر $t \in [0,1]$ و $x, y \in$ داریم:

$$u(tx + (1-t)y) \geq \min\{u(x), u(y)\},$$

(iii) u نیمه پیوسته بالایی روی $\quad$ باشد، به بیانی دیگر برای هر $r \in$ مجموعه $\{x : u(x) \geq r\}$ بسته است؛

(iv) $cl\{x \in \mathbb{R}; u(x) > 0\}$ فشرده باشد، که در آن cl، بستار یک زیر مجموعه را نشان می‌دهد.
مجـموعه اعداد فازی با E نشان داده می شود. به وضوح $\mathbb{R} \subset E$ است، که در آن $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{R} = \{\chi_{\{x\}} \text{ عدد حقیقی معمولی است } x\},$$

به طوری که $\chi_{\{x\}}$، تابع مشخصه مجموعه $\{x\}$ می‌باشد.
یکی از مفـاهیـم مهـم نظـریه فازی $r-$برش‌ها هسـتند که به مانـند پلی مجموعه‌های فازی و کلاسیک (معمولی) را به هم متصل می‌کنند. در واقع $r-$برش‌ها در روابط بین مجـموعه‌های فازی و کلاسیک نقش اصلی را ایفا می‌کنند.

تعریف ۲-۲: [۱۲] زیر مجـموعه کلاسیـک عناصری از X که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی u حداقل به بزرگی r است، $r-$برش u نامیده می‌شود. به عبارت دیگر برای $0 < r \leq 1$، $r-$برش u را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$[u]_r = \{x \in X ; u(x) \geq r\},$$

و برای $r = 0$، داریم:

$$[u]_0 = cl\{x \in X \,;\, u(x) > 0\}.$$

با توجه به تعریف اعداد فازی، هر r−برش از یک عدد فازی u، بازه‌ای بسته و کراندار است و با $[u]_r = [\underline{u}_r, \overline{u}_r]$ نشان داده می‌شود، که در آن $\underline{u}$ و $\overline{u}$ به ترتیب کران‌های پائین و بالا u نامیده می‌شوند.

لم ۲-۱: [۱۸] اگر u و v دو عدد فازی باشند، آنگاه برای $r \in (0,1]$ داریم:

$$[u+v]_r = [\underline{u}_r + \underline{v}_r, \overline{u}_r + \overline{v}_r], \qquad (i)$$

$$(ii)$$
$$[u \odot v]_r = [\min\{\underline{u}_r\underline{v}_r, \underline{u}_r\overline{v}_r, \overline{u}_r\underline{v}_r, \overline{u}_r\overline{v}_r\}, \max\{\underline{u}_r\underline{v}_r, \underline{u}_r\overline{v}_r, \overline{u}_r\underline{v}_r, \overline{u}_r\overline{v}_r\}],$$

$$[u-v]_r = [\underline{u}_r - \overline{v}_r, \overline{u}_r - \underline{v}_r], \qquad (iii)$$

$$(iv)$$
$$[u/v]_r = [\min\{\underline{u}_r/\underline{v}_r, \underline{u}_r/\overline{v}_r, \overline{u}_r/\underline{v}_r, \overline{u}_r/\overline{v}_r\}, \max\{\underline{u}_r/\underline{v}_r, \underline{u}_r/\overline{v}_r, \overline{u}_r/\underline{v}_r, \overline{u}_r/\overline{v}_r\}].$$

تذکر ۲-۱: فرض کنید u عددی فازی باشد، در این صورت برای هر داریم: $r \in (0,1]$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\lambda[\underline{u}_r, \overline{u}_r] = [\lambda\underline{u}_r, \lambda\overline{u}_r]$، اگر $\lambda > 0$

(ii) $\lambda[\underline{u}_r, \overline{u}_r] = [\lambda\overline{u}_r, \lambda\underline{u}_r]$، اگر $\lambda < 0$

قضیه ۲-۱: [۹] یک عدد فازی با زوج مرتب $u = (\underline{u}_r, \overline{u}_r)$ از توابع $\underline{u}_r, \overline{u}_r : [0,1] \to \mathbb{R}$ معین می‌شود، که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(i) $\underline{u}(r) = \underline{u}_r \in \mathbb{R}$ یک تابع نانزولی کراندار پیوسته از چپ در $(0,1]$ و پیوسته از راست در 0 است،

(ii) $\overline{u}(r) = \overline{u}_r \in \mathbb{R}$ تابعی ناصعودی کراندار پیوسته از چپ در $(0,1]$ و پیوسته از راست در 0 است،

(iii) $\underline{u}_1 \le \overline{u}_1$ می‌باشد،

بالعکس، دو تابع مفروض $\underline{u}(r)$ و $\overline{u}(r)$ که در شرایط بالا صدق کنند، به طور یکتا عدد فازی u را تعیین می‌کند.

گزاره ۲-۱: [۶] فرض کنید $\{u_r : r \in (0,1]\}$ یک خانواده از بازه‌های حقیقی باشند بطوریکه در سه شرط زیر صدق کند:

(i) u_r یک بازه فشرده و ناتهی برای هر $r \in (0,1]$ باشد،

(ii) اگر $0 < r < \beta \le 1$ باشد، آنگاه داریم: $u_\beta \subseteq u_r$،

(iii) برای هر دنباله صعودی $r_n \in (0,1]$ با این شرط که $\lim_{n\to\infty} r_n = r > 0$ باشد، آنگاه داریم: $u_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} u_{r_n}$. در این صورت عدد فازی یکتا $u \in E$ موجود است به طوری که $[u]_r = u_r$ و برای هر $r \in (0,1]$ داریم:

$$[u]_0 = cl\left(\bigcup_{r_n \in (0,1]} u_r\right).$$

تعریف ۲-۳: فرض کنید $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to E$ یک نگاشت فازی باشد. نگاشت فازی f را همگن مثبت گوئیم هرگاه داشته باشیم:

$$f(\lambda x) = \lambda \odot f(x), \qquad \forall x \in K, \lambda > 0.$$

تعریف ۲-۴: [۱] فرض کنید $u, v \in E$ باشد. گفته می‌شود که $u \preceq v$ است اگر و تنها اگر برای هر $r \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$\underline{u}_r \le \underline{v}_r \,.\, \overline{u}_r \le \overline{v}_r \,,$$

قضیه ۲-۲: [۵] (i) اگر $\tilde{0} = \chi_{\{0\}}$ باشد، آنگاه $\tilde{0} \in E$ یک عنصر خنثی نسبت به + است، به عبارت دیگر برای هر $u \in E$، $u + \tilde{0} = \tilde{0} + u = u$ است،

(ii) برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ با $a,b<0$ یا $a,b\geq 0$ و هر $u\in E$، داریم: $(a+b).u=a.u+b.u,$
و برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ که مختلف العلامت باشند ویژگی بالا برقرار نیست،

(iii) برای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ و هر $u,v\in E$ داریم:
$\lambda.(u+v)=\lambda.u+\lambda.v,$

(iv) برای هر $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ و هر $u\in E$، داریم:
$\lambda(\mu.u)=(\lambda.\mu)u.$

تعریف ۲-۵: [۱۳] یک عدد فازی مثلثی، یک مجموعه فازی u در $\mathbb{R}$ است که با سه تایی مرتب شده $\langle u_l,u_c,u_r\rangle\in\mathbb{R}^3$ مشخص می‌شود که در آن $u_l\leq u_c\leq u_r$ است به طوری که $[u]_0=[u_l,u_r]$ و $[u]_1=\{u_c\}$ می‌باشد. مجموعه r-برش یک عدد فازی مثلثی u برای هر $r\in[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[u]_r=[u_c-(1-r)(u_c-u_l)\ ,\ u_c+(1-r)(u_r-u_c)].$$

تعریف ۲-۶: [۵] فرض کنید $x,y\in E$ باشند. اگر $z\in E$ وجود داشته باشد به‌طوری که $x=y+z$ باشد، در این صورت z، (H)-تفاضل x و y نامیده می‌شود و با $x\ominus_H y$ نمایش داده می‌شود.

قضیه۲-۳: [۶] برای هر $u,v\in E$ داریم:

$$D(u,v)=\sup_{r\in[0,1]}\left\|[u]_r\ominus_{gH}[v]_r\right\|_*=\left\|u\ominus_g v\right\|,$$

به‌طوری که $\|.\|=D(.,0)$ می‌باشد و (E,D) یک فضای متریک کامل است.

تعریف ۲-۷: فضای k_c، نشان دهنده مجموعه‌ای از همه بازه‌های بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k_c=\{[\underline{a},\overline{a}]\in\mathbb{R};\ \underline{a}<\overline{a}\}.$$

تعریف ۲-۸: [۱۹] فرض کنید $u,v\in E$ باشند، آنگاه (gH)-تفاضل، عدد فازی w است، که در صورت وجود در رابطه زیر صدق کند:

$$u\ominus_{gH}v=w\Leftrightarrow\begin{cases}(i)\ u=v+w,\\ \text{یا}\ (ii)\ v=u+(-1)w\end{cases}\qquad(۲\text{-}۱)$$

لذا w، (gH)-تفاضل u و v نامیده می‌شود و r-برش آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[u\ominus_{gH}v]_r=$$
$$[\min\{\underline{u}_r-\underline{v}_r,\overline{u}_r-\overline{v}_r\}\ ,\ \max\{\underline{u}_r-\underline{v}_r,\overline{u}_r-\overline{v}_r\}],$$

همچنین اگر (H)-تفاضل وجود داشته باشد، آنگاه داریم:

$$u\ominus_{gH}v=u\ominus_H v.$$

شرایط وجود (gH)-تفاضل $w=u\ominus_{gH}v\in E$ برحسب r-برش عبارت است از:

$$(i)\begin{cases}\underline{w}_r=\underline{u}_r-\underline{v}_r\ ,\ \overline{w}_r=\overline{u}_r-\overline{v}_r\quad\forall r\in[0,1],\\ \underline{w}_r\ \text{صعودی}\ ,\ \overline{w}_r\ \text{نزولی}\quad \underline{w}_r\leq\overline{w}_r,\end{cases}$$

$$(ii)\begin{cases}\underline{w}_r=\overline{u}_r-\overline{v}_r\ ,\ \overline{w}_r=\underline{u}_r-\underline{v}_r\quad\forall r\in[0,1],\\ \underline{w}_r\ \text{صعودی}\ ,\ \overline{w}_r\ \text{نزولی}\quad \underline{w}_r\leq\overline{w}_r.\end{cases}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که حالت‌های (i) و (ii) به‌طور همزمان برقرارند، اگر و فقط اگر w یک عدد معمولی باشد.

تذکر ۲-۲: [۶,۱۹] در حالت فازی، ممکن است که (gH)-تفاضل دو عدد فازی وجود نداشته باشد. اما اگر $u\ominus_{gH}v$ وجود داشته باشد، آنگاه $v\ominus_{gH}u$ وجود دارد و داریم:

$$v\ominus_{gH}u=-(u\ominus_{gH}v).$$

گزاره ۲-۲: [۶,۱۹] فرض کنید $u,v\in E$ دو عدد فازی باشند، در این صورت داریم:

(i) اگر (gH)-تفاضل وجود داشته باشد، آنگاه یکتاست،

(ii) $u \ominus_{gH} v = u \ominus_H v$ یا $u \ominus_{gH} v = -(u \ominus_H v)$ در حالی که عبارت‌های طرف راست وجود داشته باشند. به ویژه داریم:

$$u \ominus_{gH} u = u \ominus_H u = 0,$$

(iii) اگر $u \ominus_{gH} v$ در حالت (i) وجود داشته باشد، پس $v \ominus_{gH} u$ در حالت (ii) وجود دارد و برعکس،

(iv) $(u+v) \ominus_{gH} v = u$،

(v) $0 \ominus_{gH} (u \ominus_{gH} v) = v \ominus_{gH} u$،

(vi) $u \ominus_{gH} v = v \ominus_{gH} u = w$ اگر و تنها اگر $w=-w$، به علاوه $w=0$ اگر و تنها اگر $u=v$.

در ادامه، تعاریف قبلی یعنی (H)-تفاضل و (gH)-تفاضل را تعمیم داده و کامل‌ترین نوع تفاضل دو عدد فازی را تعریف می‌کنیم. مزیت این تعریف، همیشه موجود بودن آن است که باعث شده توجه خاصی به این تعریف شود. سپس به معرفی انواع مشتق فازی نیز می‌پردازیم.

تعریف ۲-۹: [۶] تفاضل تعمیم یافته ((g)-تفاضل) دو عدد فازی $u,v \in E$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[u \ominus_g v]_r = cl\left(conv \bigcup_{\beta \ge r}([u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta)\right), \quad \forall r \in [0,1].$$

که نماد $\ominus_{gH}$، (gH)-تفاضل عملگرهای بازه‌ای $[u]_\beta$ و $[v]_\beta$ می‌باشد و $conv(X)$، نشانگر پوسته محدب مجموعه X است.

قضیه۲-۴: [۶] (g)-تفاضل را نیز می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$[u \ominus_g v]_r = [\inf_{\beta \ge r} \min\{\underline{u}_\beta - \underline{v}_\beta, \bar{u}_\beta - \bar{v}_\beta\}, \sup_{\beta \ge r} \max\{\underline{u}_\beta - \underline{v}_\beta, \bar{u}_\beta - \bar{v}_\beta\}].$$

قضیه۲-۵: [۶] برای هر دو عدد فازی $u,v \in E$، (g)-تفاضل‌های $u \ominus_g v$ و $v \ominus_g u$، هر دو موجودند و $u \ominus_g v = -(v \ominus_g u)$ به طوری که برای $r \in [0,1]$ داریم:

$$[u \ominus_g v] = [\underline{d}_r, \bar{d}_r],$$
$$[v \ominus_g u] = [-\underline{d}_r, -\bar{d}_r],$$

جائی که

$$\underline{d}_r = \inf(D_r), \quad \bar{d}_r = \sup(D_r),$$

و مجموعه D_r به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_r = \{\underline{u}_\beta - \underline{v}_\beta \mid \beta \ge r\} \cup \{\bar{u}_\beta - \bar{v}_\beta \mid \beta \ge r\}.$$

گزاره ۲-۳: [۶] برای هر دو عدد فازی $u,v \in E$، (g)-تفاضل $u \ominus_g v$ آن موجود است و یک عدد فازی می‌باشد.

قضیه ۲-۶: [۶] (g)-تفاضل $u \ominus_g v$، کوچکترین عدد فازی مانند w است که در خواص زیر صدق می‌کند:

$$[u]_r \ominus_g [v]_r \subseteq [w]_r, \quad \forall r \in [0,1], \qquad (i)$$

$$\begin{cases} u \subseteq v + w, \\ v \subseteq u - w, \end{cases} \qquad (ii)$$

که در آن رابطه شمول $\subseteq$ برای دو عدد فازی $u,v \in E$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u \subseteq v &\Leftrightarrow u(x) \le v(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow [u]_r \subseteq [v]_r, \quad \forall r \in [0,1]. \end{aligned}$$

قضیه ۲-۷: [۶] فرض کنید که $u,v \in E$ دو عدد فازی باشند، آنگاه:

(i) $u \ominus_g v = u \ominus_{gH} v$، به شرط این که عبارت سمت راست موجود باشد، به‌ویژه داریم: $u \ominus_g u = 0$،

(ii) $(u+v) \ominus_g v = u$،

(iii) $0\ominus_g(u\ominus_g v)=v\ominus_g u$،

(iv) $u\ominus_g v=v\ominus_g u=w$ اگر و فقط اگر $w=-w$، بنابراین $w=0$ در نتیجه $u=v$ می‌باشد.

مثال ۲-۱: اعداد فازی مثلثی $u=\langle 12,15,19\rangle$ و $v=\langle 5,9,11\rangle$ را در نظر بگیرید. (gH)-تفاضل $u\ominus_{gH} v$ وجود ندارد ولی (g)-تفاضل وجود دارد و برابر است با

$$[u\ominus_g v]_r=\left[\inf_{\beta\ge r}\min\{7-\beta,8-2\beta\},\sup_{\beta\ge r}\max\{7-\beta,8-2\beta\}\right]$$

$$=\left[\inf_{\beta\ge r}(7-\beta),\sup_{\beta\ge r}(8-2\beta)\right]=[6,8-2r].$$

$$=\left[\inf_{\beta\ge r}(7-\beta),\sup_{\beta\ge r}(8-2\beta)\right]=[6,8-2r].$$

تعریف ۲-۱۰: [۶] فرض کنید $x^0\in(a,b)$ باشد و h به گونه‌ای باشد که $x^0+h\in(a,b)$ است، آنگاه (gH)-مشتق‌پذیری برای تابع $f:(a,b)\to E$ در نقطه x^0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'_{gH}(x^0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x^0+h)\ominus_{gH} f(x^0)],\qquad (۲-۲)$$

اگر $f'_{gH}(x^0)\in E$ موجود باشد و در رابطه (۴-۱) صدق کند، آنگاه گوئیم f، (gH) -مشتق‌پذیر در نقطه x^0 است.

تعریف ۲-۱۱: [۶] فرض کنید $x^0\in(a,b)$ و h به گونه‌ای باشد که $x^0+h\in(a,b)$ است، آنگاه:

$$f'_{L_{gH}}(x^0)_r=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}([f(x^0+h)]_r\ominus_{gH}[f(x^0)]_r),$$

اگر برای هر $r\in[0,1]$، $f'_{L_{gH}}(x^0)_r\in k_c$ باشد، آنگاه تابع فازی-مقدار f را (L_{gH})-مشتق‌پذیر در نقطه x^0 گوئیم و خانواده‌ای از بازه‌های به فرم $\{f'_{L_{gH}}(x^0)_r \mid r\in[0,1]\}$ را (L_{gH})-مشتق تابع فازی-مقدار f در نقطه x^0 می‌نامیم و با نماد $f'_{L_{gH}}(x^0)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲-۱۲: [۶] فرض کنید $f:(a,b)\to E$ یک تابع فازی-مقدار و $x^0\in(a,b)$ بوده و توابع $(\underline{f}_r)'(x)$ و $(\overline{f}_r)'(x)$ در نقطه x^0 مشتق‌پذیر باشند آنگاه:

(i) f را $[(i)-gH]$-مشتق‌پذیر در نقطه x^0 گوییم اگر:

$$[f'_{gH}(x)]_r=[(\underline{f}_r)'(x^0),(\overline{f}_r)'(x^0)],\quad \forall r\in[0,1]$$

(ii) f را $[(ii)-gH]$ -مشتق‌پذیر در نقطه x^0 گوییم اگر:

$$[f'_{gH}(x)]_r=[(\overline{f}_r)'(x^0),(\underline{f}_r)'(x^0)],\quad \forall r\in[0,1]$$

در قضیه زیر یک مشخصه برای (gH)-مشتق پذیری بر حسب مشتق‌پذیری توابع انتهایی $\underline{f}_r$ و $\overline{f}_r$ ارائه شده است.

قضیه ۲-۸: [۶] فرض کنید $f:(a,b)\to E$ به گونه‌ای باشد که داشته باشیم $[f(x)]_r=[(\underline{f}_r)(x),(\overline{f}_r)(x)]$ اگر توابع $\underline{f}_r$ و $\overline{f}_r$ توابعی حقیقی-مقدار نسبت به x و به‌طور یکنواخت برای $r\in[0,1]$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $f(x)$، (gH)-مشتق‌پذیر در یک نقطه ثابت $x\in(a,b)$ است اگر و فقط اگر یکی از دو مورد زیر برقرار باشد:

(i) $(\underline{f}_r)'(x)$ صعودی و $(\overline{f}_r)'(x)$ نزولی به‌عنوان تابعی از r باشد و $(\underline{f}_1)'(x)\le(\overline{f}_1)'(x)$ است. یا

(ii) $(\underline{f}_r)'(x)$ نزولی و $(\overline{f}_r)'(x)$ صعودی به عنوان تابعی از r باشد و $(\overline{f}_1)'(x)\le(\underline{f}_1)'(x)$ است، همچنین برای هر $r\in[0,1]$ داریم:

$$[f'_{gH}(x)]_r=[\min\{(\underline{f}_r)'(x),(\overline{f}_r)'(x)\},\ \max\{(\underline{f}_r)'(x),(\overline{f}_r)'(x)\}].$$

تذکر ۲-۲: [۶] ممکن است که $f:[a,b]\to E$ در نقطه x^0، (gH)-مشتق پذیر باشد اما نه $[(i)-gH]$-مشتق‌پذیر و نه

$[(ii)-gH]$-مشتق پذیر باشد.

قضیه ۲-۹: [۶] $[(i)-gH]$-مشتق‌پذیر و $[(ii)-gH]$-مشتق‌پذیر عملگرهای جمع‌پذیر می‌باشند، به عبارت دیگر داریم:

$$(f+g)'_{(i)-gH}=f'_{(i)-gH}+g'_{(i)-gH}, \qquad (i)$$

$$(f+g)'_{(ii)-gH}=f'_{(ii)-gH}+g'_{(ii)-gH}. \qquad (ii)$$

در ادامه (g)-مشتـــق را به کمک (g)-تفاضل که توسط استفانینی و بد ارائه شده است [6] را بیان می کنیم.

تعریف ۲-۱۳: [۶] فرض کنید $x^0\in(a,b)$ باشد و h به گونه‌ای باشد که $x^0+h\in(a,b)$ است، آنگاه (g)-مشتق تابع $f:(a,b)\to E$ در نقطه x^0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'_g(x^0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[(f(x^0+h)\ominus_g f(x^0)], \qquad (۲-۳)$$

اگر $f'_g(x^0)\in E$ موجـود باشد و در رابطه (۱-۵) صدق کند، آنگاه گوییم f، (g)-مشـتق‌پذیر در نقطه x^0 است.

(g)-مشتق‌پذیری کلی‌تر از (gH)-مشتق‌پذیری می‌باشد و اگر (gH)-مشتـــق وجود داشته باشد، آنگاه داریم $f'_g(x)=f'_{gH}(x)$.

قضیه‌ی بعدی یک فرمول عملی برای محاسبه‌ی (g)-مشتـــق ارائه می‌دهد.

قضیه ۲-۱۰: [۶] فرض کنید $f:(a,b)\to E$ به گونه‌ای باشد که داشته باشیم $[f(x)]_r=[\underline{f}_r(x),\overline{f}_r(x)]$. اگر توابع $\underline{f}_r$ و $\overline{f}_r$ توابعی حقیقی- مقدار نسبت به x و به‌طور یکنواخت برای $r\in[0,1]$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $f(x)$، (g)-مشتق پذیر است و داریم:

$$[f'_g(x)]_r=\left[\inf_{\beta\ge r}\min\left\{(\underline{f}_\beta)'(x),(\overline{f}_\beta)'(x)\right\},\ \sup_{\beta\ge r}\max\left\{(\underline{f}_\beta)'(x),(\overline{f}_\beta)'(x)\right\}\right].$$

قضیه ۲-۱۱: [۶] فرض کنید $f:(a,b)\to E$ بطور یکنواخت (L_{gH})-مشتق‌پذیر در نقطه x^0 باشد، آنگاه تابع f، (g)-مشتق پذیر در نقطه x^0 است و برای هر $r\in[0,1]$ داریم:

$$[f'_g(x)]_r=cl\left(conv\bigcup_{\beta\ge r}f'_{L_{gH}}(x^0)_\beta\right).$$

مثال ۲-۲: تابع فازی مقدار $f:[-2,2]\to E$ را به فرم مثلثی به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$f(x)=\left\langle\frac{x^3}{3},\frac{x^3}{3}+x+3,\frac{2x^3}{3}+4\right\rangle,$$

بطوریکه r-برش‌های پایین و بالای آن به ترتیب برابر است با:

$$\underline{f}_r(x)=\frac{x^3}{3}+r(x+3),$$

$$\overline{f}_r(x)=(2-r)\frac{x^3}{3}+xr+4-r.$$

داریم:

$$\left(\underline{f}_r\right)'(x)=x^2+r,$$

$$\left(\overline{f}_r\right)'(x)=(2-r)x^2+r.$$

همانطور که مشاهده می شود، تابع در بازه های $[1,2]$ و $[-2,-1]$ دارای (gH)-مشتـــق می باشد ولی در کل بازه ی $[-1,1]$ (gH)-مشتـــق ندارد اما دارای (g)-مشتـــق است.

لم ۲-۲: فرض کنید $f:\mathbb{R}\to E$ یک تابع فازی-مقدار و $x^0\in\mathbb{R}$ باشد، آنگاه:

(i) $\lim_{x\to x^0}[f(x)]_r=u_r=[\underline{u}_r,\overline{u}_r]$ به‌طـــور یکنواخت نسبت بـه $r\in[0,1]$ برقرار باشد،

(ii) اگر توابع انتهایی $\underline{u}_r$ و $\overline{u}_r$ در شرایط قضیه ۲-۱ یا به طور معادل خانواده‌ای از r-برش‌های u_r در

گزاره ۲-۱ صدق کنند، بنابراین:

$$\lim_{x\to x^0} f(x)=u,$$

با شرط این که $[u]_r=u_r=[\underline{u}_r,\overline{u}_r]$ است.

در ادامه این مقاله، مفهوم (g)-مشتق‌پذیری کلی برای نگاشت‌های چند بعدی فازی از $\mathbb{R}^n$ به توی E را با استفاده از (g)-تفاضل معرفی می‌کنیم. علاوه بر این، (g)-مشتق پذیری جهتی و جزئی را تعریف و ارتباط بین آن‌ها را بیان می‌نمائیم. نهایتاً، برای نشان دادن توانایی و قابلیت (g)-مشتق‌پذیری نگاشت‌های چند بعدی فازی چند نمونه از کاربردهای آن را با ذکر مثال ارائه می‌نمائیم.

۳- (g)-مشتق‌پذیری کلی نگاشت‌های چند بعدی فازی

در این بخش مفهوم (g)-مشتق‌پذیری کلی برای نگاشت‌های چند بعدی فازی را معرفی می‌کنیم.

نگاشت فازی $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت چند بعدی فازی نامیده می‌شود که در آن K نشانگر یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ است.

فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی باشد که خانواده‌ای از توابع بازه‌ای-مقدار متناظر آن به صورت $f:\mathrm{K}\to k_c$ است و مجموعه r-برش آن $f_r(x)=[f(x)]_r$ برای هر $r\in[0,1]$، به صورت $f_r(x)=[\underline{f}_r(x),\overline{f}_r(x)]$ نمایش داده می‌شود. در اینجا توابع برداری حقیقی-مقدار به صورت $\underline{f}_r,\overline{f}_r:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ توابع انتهایی نگاشت فازی f می‌باشند. در تعاریف زیر (g)-مشتق پذیری کلی برای نگاشت‌های چند بعدی فازی روی $\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ را با استفاده از (g)-تفاضل معرفی می‌نمائیم.

تعریف ۳-۱: فرض کنید $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ یک فضای نرم دار باشد و $\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n$، $x^0\in\mathrm{K}$ و $h\subseteq\mathbb{R}^n$ به گونه‌ای باشد که $x^0+h\in\mathrm{K}$ است. بنابراین نگاشت فازی $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ را (g)-مشتق پذیر کلی در نقطه x^0 گوئیم، اگر یک بردار فازی $U=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in E^n$ وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم:

$$\lim_{h\to0}\frac{\left(f\left(x^0+h\right)\ominus_g f\left(x^0\right)\right)\ominus_g U\odot h}{\|h\|}=0, \qquad (۳-۱)$$

که در آن $U\odot h$ حاصل ضرب داخلی فازی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U\odot h=\sum_{\substack{i=1\\ h_i\ge0}}^{n} h_i\odot u_i\ominus_g\sum_{\substack{i=1\\ h_i<0}}^{n}|h_i|\odot u_i,$$

اگر $U\in E^n$ به طور منحصر به فرد توسط رابطه (۳-۱) مشخص شود. در این حالت $U\in E^n$ (g)-مشتق پذیر کلی نگاشت فازی f در نقطه x^0 نامیده می‌شود و با نماد $\nabla_g f(x^0)$ نمایش می‌دهیم به‌طوری که $\nabla_g f(x^0)=U$ است. این تعریف را به طور معادل می‌توان به صورت زیر نوشت:

تعریف ۳-۲: فرض کنید $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. همچنین فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی و $x^0\in\mathrm{K}$ باشد و برای هر $h\in\mathbb{R}^n$ با این شرط که $\|h\|<\delta$ برای $\delta>0$ داده شده به طوری که $x^0+h\in\mathrm{K}$ باشد. بنابراین نگاشت فازی f را (g)-مشتق پذیر کلی در نقطه x^0 گوئیم اگر و تنها اگر یک بردار فازی $U=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in E^n$ وجود داشته باشد و همچنین تابع فازی $\varepsilon(h)$ برای هر $h\neq0$ وجود داشته باشد با این شرط که $\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$ باشد، آنگاه داریم:

$$f(x^0+h)\ominus_g f(x^0)=U\odot h+\|h\|\odot\varepsilon(h),$$

همچنین اگر تابع $\eta(h)=\|h\|\odot\varepsilon(h)$ را در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$f(x^0+h)\ominus_g f(x^0)=U\odot h+\eta(h),$$

به طوری که $\eta(h)\to0$ وقتی که $h\to0$ میل کند.

نگاشت فازی به صورت $f'_g:\mathbb{R}^n \to E$ برای بردار $h=(h_1,h_2,...,h_n)\in\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'_g(x^0)\odot h = U\odot h = \sum_{\substack{i=1\\ h_i\geq 0}}^{n} h_i\odot u_i \ominus_g \sum_{\substack{i=1\\ h_i<0}}^{n} |h_i|\odot u_i,$$

به طوری که نگاشت فازی f، (g)-مشتق‌پذیر کلی در نقطه x^0 باشد و $\nabla_g f(x^0)\odot h$، (g)-مشتق‌پذیری کلی نگاشت فازی f در نقطه x^0 نسبت به h می‌باشد.

۴- (g)-مشتق‌پذیری جهتی

در تعریف زیر (g)-مشتق‌پذیری جهتی برای نگاشت چندبعدی فازی $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ را معرفی می‌نمائیم.

تعریف ۴-۱: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی و K هر زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد، همچنین $x^0\in\mathrm{K}$ و $d\in\mathbb{R}^n$ باشند. گوییم نگاشت فازی f مشتق پذیر تعمیم یافته جهتی یک طرفه (به طور مختصر (g)-مشتق جهتی) در نقطه x^0 و در جهت d است اگر حد زیر موجود باشد:

$$f'_g(x^0,d)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x^0+hd)\ominus_g f(x^0)}{h}, \qquad (۴-۱)$$

و $f'_g(x^0,d)\in E$ در رابطه‌ی (۴-۱) صدق کند. همچنین اگر حد

$$f'_g(x^0,d)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x^0)\ominus_g f(x^0-hd)}{h},$$

از نگاشت‌های فازی فوق موجود و هر دو با هم برابر باشند، گوییم نگاشت فازی f دارای (g)-مشتق پذیری جهتی دو طرفه در نقطه x^0 و در جهت d است.

تعریف ۴-۲: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی، $x^0\in\mathrm{K}$ و $d\in\mathbb{R}^n$ باشند. گوییم نگاشت فازی f، (g)-مشتق‌پذیر جهتی در نقطه x^0است، اگر $f'_g(x^0,d)$ در نقطه x^0 و برای هر جهت $d\in\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد.

قضیه ۴-۱: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی و $x^0\in\mathrm{K}$ باشد، آنگاه $f_g'(x^0,.)$ نسبت به متغیر دوم روی فضای $\mathbb{R}^n$ همگن مثبت فازی است.

اثبات. فرض کنید $\lambda>0$ و $x^0\in\mathrm{K}$ ثابت و دلخواه باشند. حال در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} f_g'(x^0,\lambda d) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f\left(x^0+h(\lambda d)\right)\ominus_g f(x^0)}{h}\\ &=\lambda\odot\lim_{h\lambda\to 0^+}\frac{f\left(x^0+(h\lambda)d\right)\ominus_g f(x^0)}{h\lambda}, \end{aligned}$$

فرض کنید $s:=h\lambda$ به‌طوری که برای هر $\lambda>0$ $h\to 0^+\Rightarrow h\lambda\to 0^+$ باشد، لذا $s\to 0^+$ میل می‌کند و داریم:

$$\begin{aligned} &=\lambda\odot\lim_{s\to 0^+}\frac{f(x^0+sd)\ominus_g f(x^0)}{s}\\ &=\lambda\odot f'_g(x^0,d), \qquad \forall d\in\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

بنابراین $f_g'(x^0,.)$ روی $\mathbb{R}^n$ نسبت به متغیر دوم همگن مثبت فازی است.

گزاره ۴-۱: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی و $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{K}$ باشد به‌طوری که r-برش آن به‌صورت $[f(x)]_r=[\underline{f}_r(x),\overline{f}_r(x)]$ است.

اگر توابع انتهایی $\underline{f}_r(x)$ و $\overline{f}_r(x)$ توابع چند متغیره حقیقی-مقدار مشتق پذیر جهتی در نقطه x و در جهت d و به‌طور یکنواخت نسبت به $r\in[0,1]$ برقرار باشند، آنگاه نگاشت فازی $f(x)$، (g)-مشتق پذیر جهتی در نقطه x و در جهت d است، لذا داریم:

$$\begin{aligned} \left[f'_g(x,d)\right]_r = \Big[&\inf_{\beta\geq r}\min\left\{\underline{f}'_\beta(x,d),\overline{f}'_\beta(x,d)\right\},\\ &\sup_{\beta\geq r}\max\left\{\underline{f}'_\beta(x,d),\overline{f}'_\beta(x,d)\right\}\Big] \end{aligned}$$

اثبات. برطبق قضیه ۲-۴ داریم:

$$\frac{1}{h}\left[f(x+hd)\ominus_g f(x)\right]_r$$
$$=\frac{1}{h}\Big[\inf_{\beta\geq r}\min\left\{\underline{f}_\beta(x+h_nd)-\underline{f}_\beta(x),\ \overline{f}_\beta(x+hd)-\overline{f}_\beta(x)\right\},$$
$$\sup_{\beta\geq r}\max\left\{\underline{f}_\beta(x+hd)-\underline{f}_\beta(x),\overline{f}_\beta(x+hd)-\overline{f}_\beta(x)\right\}\Big],$$

در این صورت طبق فرض گزاره ۴-۱، چون توابع $\overline{f}_r(x)$ و $\underline{f}_r(x)$ توابع چند متغیره حقیقی-مقدار مشتق‌پذیر جهتی در نقطه x و در جهت d هستند و برای هر $r\in[0,1]$ داریم:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left[f(x+hd)\ominus_g f(x)\right]_r$$
$$=\left[\inf_{\beta\geq r}\min\left\{\underline{f}'_\beta(x,d),\ \overline{f}'_\beta(x,d)\right\},\sup_{\beta\geq r}\max\left\{\underline{f}'_\beta(x,d),\ \overline{f}'_\beta(x,d)\right\}\right].$$

همچنین اگر توابع انتهایی $\underline{f}_r(x)$ و $\overline{f}_r(x)$ دارای پیوستگی چپ نسبت به $r\in(0,1]$ و پیوستگی راست در نقطه 0 باشند، می توان زیر دنباله $h_n\to 0$ را در نظر گرفت، بنابراین توابع $\frac{\underline{f}_r(x+h_nd)-\underline{f}_r(x)}{h_n}$ و $\frac{\overline{f}_r(x+h_nd)-\overline{f}_r(x)}{h_n}$ دارای پیوستگی چپ برای $r\in(0,1]$ و پیوستگی راست در نقطه 0 هستند. علاوه بر این مجموعه توابع

$$\inf_{\beta\geq r}\min\left\{\frac{\underline{f}_\beta(x+h_nd)-\underline{f}_\beta(x)}{h_n},\frac{\overline{f}_\beta(x+h_nd)-\overline{f}_\beta(x)}{h_n}\right\}$$

و

$$\sup_{\beta\geq r}\max\left\{\frac{\underline{f}_\beta(x+h_nd)-\underline{f}_\beta(x)}{h_n},\frac{\overline{f}_\beta(x+h_nd)-\overline{f}_\beta(x)}{h_n}\right\}$$

در ویژگی‌های مشابه فوق صدق می‌کنند. بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$\left[\inf_{\beta\geq r}\min\left\{\underline{f}'_\beta(x,d),\ \overline{f}'_\beta(x,d)\right\},\ \sup_{\beta\geq r}\max\left\{\underline{f}'_\beta(x,d),\ \overline{f}'_\beta(x,d)\right\}\right].$$

دارای پیوستگی چپ در $r\in(0,1]$ و پیوستگی راست در نقطه 0 هستند.

به آسانی نتیجه می‌شود که مجموعه توابع $\inf_{\beta\geq r}\min\left\{\underline{f}'_\beta(x,d),\overline{f}'_\beta(x,d)\right\}$ به‌عنوان تابعی از $r\in[0,1]$، صعودی و $\sup_{\beta\geq r}\max\left\{\underline{f}'_\beta(x,d),\overline{f}'_\beta(x,d)\right\}$ به عنوان تابعی از $r\in[0,1]$ نزولی هستند و با استفاده از قضیه ۲-۱ آن‌ها یک عدد فازی را تعریف می‌کنند. بنابراین مجموعه r-برش $\left[f'_g(x,d)\right]_r$ یک عدد فازی تعریف می‌کند، لذا با استفاده از لم ۲-۲ نگاشت فازی $f(x)$، (g)-مشتق‌پذیر جهتی در نقطه x و در جهت d می‌باشد.

تعریف ۴-۳: [۲۰] فرض کنید K یک زیر مجموعه باز ناتهی از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد و نگاشت $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی با $x^0\in\mathrm{K}$ باشد. اگر $d\in\mathbb{R}^n$ هر جهت شدنی در نقطه $x^0\in\mathrm{K}$ باشد، آنگاه برای $r\in[0,1]$، (L_{gH})-مشتق جهتی متناظر با توابع بازه‌ای-مقدار $f_r:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to k_c$ در نقطه x^0 و در جهت d به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'_{L_{gH}}(x^0;d)_r=\lim_{h\to 0^+}\frac{\left[f(x^0+hd)\right]_r\ominus_{gH}\left[f(x^0)\right]_r}{h},$$

اگر برای هر $r\in[0,1]$، حد فوق وجود داشته باشد.

(i) اگر برای هر $r\in[0,1]$، $f'_{L_{gH}}(x^0;d)_r\in k_c$ وجود داشته باشد، آنگاه f دارای (L_{gH})-مشتق جهتی در نقطه x^0 و در جهت d است.

(ii) نگاشت فازی f را (L_{gH})-مشتق‌پذیر ضعیف یا جهتی در نقطه x^0 گوئیم اگر f، (L_{gH})-مشتق پذیر جهتی شدنی در نقطه x^0 و در هر جهت $d\in\mathbb{R}^n$ برای هر $r\in[0,1]$ موجود باشد و خانواده‌ای از بازه‌های به فرم $\left\{f'_{L_{gH}}(x^0;d)_r:r\in[0,1]\right\}$ را (L_{gH})-مشتق جهتی تابع f در نقطه x^0 و در جهت d گوئیم و با نماد $\left\{f'_{L_{gH}}(x^0;d)_r\right\}$ نمایش می‌دهیم.

(iii) نگاشت فازی f را (gH)-مشتق‌پذیر (ضعیف) جهتی در نقطه x^0 گوئیم اگر (L_{gH})-مشتق پذیر (ضعیف) جهتی در نقطه x^0 و در هر

جهت d موجود باشد و (L_{gH})-مشتق جهتی $\left\{f'_{L_{gH}}(x^0;d)\right\}$ یک عدد فازی تعریف می‌شود به طوری که مجموعه بازه‌های $f'_{L_{gH}}(x^0;d)_r$ مجموعه r-برش های یک عدد فازی تعریف شود.

(iv) نگاشت فازی f را (L_{gH})-مشتق پذیر (ضعیف) جهتی روی K گوئیم اگر (L_{gH})-مشتق پذیر در هر نقطه $x^0 \in \mathrm{K}$ باشد و همچنین (gH)-مشتق‌پذیر (ضعیف) جهتی روی K گوئیم اگر (gH)-مشتق‌پذیر جهتی در هر نقطه $x^0 \in \mathrm{K}$ باشد.

گزاره ۴-۲: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی و $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathrm{K}$ باشد که به طور یکنواخت (L_{gH})-مشتق پذیر جهتی در نقطه x و در جهت $d\in\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه نگاشت فازی f، (g)-مشتق‌پذیر جهتی در نقطه x و در جهت d است و برای هر $r\in[0,1]$ داریم:

$$f'_g(x,d)_r = cl\left(conv \bigcup_{\beta\geq r} f'_{L_{gH}}(x,d)_\beta\right).$$

اثبات. اثبات مشابه قضیه ۲-۱۱ است.

تعریف ۴-۴: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی $x\in\mathrm{K}$ باشد. اگر برای $d\in\mathbb{R}^n$ و $\delta>0$ داده شده، عدد حقیقی $h\in(0,\delta)$ به گونه‌ای باشد که $x+hd\in\mathrm{K}$ است، آنگاه خارج قسمت نگاشت فازی تفاضل هاکوها را تعمیم یافته را به‌عنوان تابعی از h در نقطه x و در جهت d می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G^{x,d}_{gH}(h)=\frac{f(x+hd)\ominus_{gH} f(x)}{h},$$

همچنین خارج قسمت توابع بازه‌ای مقدار تفاضل هاکوهارا تعمیم یافته سطح به سطح (به‌طور مختصر (L_{gH})-خارج قسمت) برای هر $r\in[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G^{x,d}_{gH}(h)=\frac{f(x+hd)\ominus_{gH} f(x)}{h},$$

اگر برای هر $r\in[0,1]$، $G^{x,d}_{L_{gH}}(h)_r\in k_c$ باشد و خانواده‌ای از بازه‌های به فرم $\left\{G^{x,d}_{L_{gH}}(h)_r : r\in[0,1]\right\}$ را (L_{gH})-خارج قسمت نگاشت‌های فازی f به‌عنوان تابعی از h در نقطه x و در جهت d می‌باشد و با نماد $G^{x,d}_{L_{gH}}(h)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۴-۱: فرض کنید برای هر $x\in\mathbb{R}^n$ نگاشت چند بعدی فازی $f:\mathbb{R}^n\to E$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x)=\langle -1,0,1\rangle\odot\|x\|,$$

و مجموعه r-برش‌های آن برای $r\in[0,1]$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$[f(x)]_r=\left[\underline{f}_r(x),\overline{f}_r(x)\right]=\left[(r-1)\|x\|,(1-r)\|x\|\right].$$

واضح است که برای هر $r\in[0,1]$، توابع انتهایی $\underline{f}_r(x)$ و $\overline{f}_r(x)$ حقیقی-مقدار مشتق پذیر کلی در هر نقطه $0\neq x\in\mathbb{R}^n$ هستند که در این صورت مشتقات کلی حقیقی-مقدار آن برای هر $r\in[0,1]$ به‌صورت $\nabla\underline{f}_r(x)=(r-1)\frac{x}{\|x\|}$ و $\nabla\overline{f}_r(x)=(1-r)\frac{x}{\|x\|}$ می‌باشند و توابع انتهایی $\underline{f}_r(x)$ و $\overline{f}_r(x)$ توابع حقیقی-مقدار مشتق پذیر کلی در نقطه $x=0$ نیستند، اما با این وجود برای هر $r\in[0,1]$، توابع $\underline{f}'_\beta(x,d)=(r-1)\|d\|$ و $\overline{f}'_r(x,d)=(1-r)\|d\|$ توابع چند متغیره حقیقی-مقدار مشتق‌پذیر جهتی در نقطه $0=x\in\mathbb{R}^n$ و در هر جهت $d\in\mathbb{R}^n$ هستند و در شرایط قضیه ۲-۱ صدق می‌کنند. در واقع داریم:

$$f'_g(0,d)=\left[\inf_{\beta\geq r}\min\left\{\underline{f}'_\beta(0,d),\overline{f}'_\beta(0,d)\right\},\right.$$
$$\left.\sup_{\beta\geq r}\max\left\{\underline{f}'_\beta(0,d),\overline{f}'_\beta(0,d)\right\}\right]$$
$$=\left[\inf_{\beta\geq r}\min\left\{(\beta-1)\|d\|,(1-\beta)\|d\|\right\},\right.$$

$$\sup_{\beta\geq r}\max\left\{(\beta-1)\|d\|,(1-\beta)\|d\|\right\}\Big]$$
$$=[r-1,1-r]\|d\|,\quad \forall d\in\mathbb{R}^n, r\in[0,1],$$

به طوری که

$$f_g'(0,d)_r=[r-1,1-r]\|d\|,\quad \forall d\in\mathbb{R}^n, r\in[0,1],$$

می‌باشد. بنابراین نگاشت فازی f، (g)-مشتق‌پذیر جهتی در نقطه $x=0$ و در هر جهت $d\in\mathbb{R}^n$ است.

۵- (g)-مشتق‌پذیری جزئی

در ادامه بحث، مشتق‌پذیری جزئی تعمیم یافته برای نگاشت‌های چند بعدی فازی $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

ابتدا نماد $e_i=(t_1,t_2,\ldots,t_i,\ldots,t_n)$ که مولفه‌های آن به صورت زیر

$$t_j=\begin{cases}1 & j=i \quad \text{اگر}\\ 0 & j\neq i \quad \text{اگر}\end{cases}$$

می‌باشد را در نظر می‌گیریم، که در آن e_i بردار واحد است.

تعریف ۵-۱: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی و $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathrm{K}$ ثابت باشند، عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial_g f(x)}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_i)\ominus_g f(x)}{h}, \tag{۵-۱}$$

اگر برای $i=1,2,\ldots,n$، $\frac{\partial_g f(x)}{\partial x_i}\in E$ وجود داشته باشد و در رابطه (۱-۵) صدق کند، در این صورت نگاشت فازی f، مشتق‌پذیر جزئی تعمیم یافته (به طور مختصر $[(g)-p]$-مشتق‌پذیری) در نقطه x نسبت به مولفه x_i، برای $i=1,2,\ldots,n$ نامیده می‌شود.

تعریف ۵-۲: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی به‌طوری که K یک زیر مجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر $d=e_i$ هر جهت شدنی در نقطه $x\in\mathrm{K}$ باشد، گوئیم نگاشت فازی f، مشتق پذیر جزئی تعمیم یافته ($[(g)-p]$-مشتق‌پذیر چپ و راست) در نقطه x نسبت به مولفه x_i است و با نمادهای زیر نشان داده می‌شود:

$$\frac{\partial_g f_+(x)}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+he_i)\ominus_g f(x)}{h},$$

و

$$\frac{\partial_g f_-(x)}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+he_i)\ominus_g f(x)}{h}.$$

اگر $\frac{\partial_g f_+(x)}{\partial x_i}\in E$ و $\frac{\partial_g f_-(x)}{\partial x_i}\in E$ هر دو موجود و با هم برابر باشند، در این صورت $[(g)-p]$-مشتق پذیری f در نقطه $x\in\mathrm{K}$ نسبت به مولفه x_i به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial_g f(x)}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_i)\ominus_g f(x)}{h}.$$

گزاره ۵-۱: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ نگاشت فازی و $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathrm{K}$ ثابت دلخواه باشد. اگر $\underline{f}_r(x)$ و $\overline{f}_r(x)$ توابع مشتق‌پذیر جزئی چند متغیره حقیقی-مقدار بطور یکنواخت نسبت به $r\in[0,1]$ در نقطه x نسبت به مولفه x_i باشند، آنگاه $f(x)$، $[(g)-p]$-مشتق‌پذیر در نقطه x نسبت به مولفه x_i است و داریم:

$$\left[\frac{\partial_g f(x)}{\partial x_i}\right]_r=\left[\inf_{\beta\geq r}\min\left\{\frac{\partial_g\underline{f}_\beta(x)}{\partial x_i},\frac{\partial_g\overline{f}_\beta(x)}{\partial x_i}\right\},\right.$$
$$\left.\sup_{\beta\geq r}\max\left\{\frac{\partial_g\underline{f}_\beta(x)}{\partial x_i},\frac{\partial_g\overline{f}_\beta(x)}{\partial x_i}\right\}\right].$$

اثبات. اثبات مشابه گزاره ۴-۱ است. بخصوص برای $i=1,2,\ldots,n$ و $d=e_i$ باشد.

تعریف ۵-۳: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ و $r\in[0,1]$ باشد. برای هر $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{K}$ داده شده، مشتق‌پذیر هاکوهارا تعمیم یافته سطح به سطح جزئی (به‌طور مختصر (L_{gH})-مشتق‌پذیر جزئی) در نقطه x نسبت به مولفه x_i متناظر با توابع بازه‌ای-مقدار $f_r:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to k_c$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial_{L_{gH}} f(x)_r}{\partial x_i}=\lim_{h\to0}\frac{[f(x+he_i)]_r\ominus_{gH}[f(x)]_r}{h},$$

اگر برای هر $r\in[0,1]$، $\frac{\partial_{L_{gH}} f(x)_r}{\partial x_i}\in k_c$ باشد، در این صورت گوئیم که نگاشت فازی f، (L_{gH})-مشتق‌پذیر جزئی در نقطه x نسبت به مولفه x_i است و خانواده‌ای از بازه‌های به فرم $\left\{\frac{\partial_{L_{gH}} f(x)_r}{\partial x_i}: r\in[0,1]\right\}$، (L_{gH})-مشتق پذیر جزئی f در نقطه x نسبت به مولفه x_i برای $i=1,2,...,n$ است و با نماد $\frac{\partial_{L_{gH}} f(x)}{\partial x_i}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵-۴: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی و $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{K}$ باشد. اگر بردار یکه $\mathbf{e}_i\in\mathbb{R}^n$، $\delta>0$ داده شده و عدد حقیقی $h\in(0,\delta)$ به گونه‌ای باشد که $x+hd\in\mathrm{K}$ است، آنگاه نگاشت خارج قسمت فازی تفاضل هاکوهارا تعمیم یافته را به‌عنوان تابعی از h در نقطه x و در جهت بردار یکه e_i می‌نامیم که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\frac{\partial_g f\_(x)}{\partial x_i}=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x+he_i)\ominus_g f(x)}{h}.$$

همچنین خارج قسمت توابع بازه ای-مقدار (L_{gH})-خارج قسمت برای هر $r\in[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial_g f(x)}{\partial x_i}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+he_i)\ominus_g f(x)}{h}.$$

اگر برای هر $r\in[0,1]$، $G^x_{i-L_{gH}}(h)_r\in k_c$ باشد، خانواده‌ای از بازه‌های به فرم $\left\{G^x_{i-L_{gH}}(h)_r: r\in[0,1]\right\}$، (L_{gH})-خارج قسمت f به عنوان تابعی از h در نقطه x و در جهت بردار یکه e_i برای $i=1,2,...,n$ است و با نماد $G^x_{i-L_{gH}}(h)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵-۱: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی، $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{K}$ و $d\in\mathbb{R}^n$ باشند، اگر برای $\delta>0$ داده شده، عدد حقیقی $h\in(0,\delta)$ به گونه‌ای باشد که $x+hd\in\mathrm{K}$ است. اگر نگاشت فازی $f(x)$، بطور یکنواخت (L_{gH})-مشتق‌پذیر جزئی در نقطه x نسبت به مولفه x_i باشد، آنگاه نگاشت فازی $f(x)$، $[(g)-p]$-مشتق پذیر در نقطه x نسبت به مولفه x_i است و داریم:

$$G^x_{i-g}(h)_r=cl\left(conv\bigcup_{\beta\ge r}\left(\frac{[f(x+he_i)]_\beta\ominus_{gH}[f(x)]_\beta}{h}\right)\right),$$

که بطور یکنواخت نسبت به $r\in[0,1]$ همگرا به $\frac{\partial_g f(x)_r}{\partial x_i}$ به ترتیب برای $i=1,2,...,n$ می‌باشد وقتی که $h\to0$ میل کند.

اثبات. فرض کنید $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{K}$ و برای $\delta>0$ داده شده، عدد حقیقی $h\in(0,\delta)$ به گونه‌ای باشد که $x+hd\in\mathrm{K}$ است. حال برای $r\in[0,1]$ ثابت و دلخواه بازه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$G^x_{i-L_{gH}}(h)_r=\frac{1}{h}[f(x+he_i)]_r\ominus_{gH}[f(x)]_r,$$

$$b_i(r)=\lim_{h\to0}G^x_{i-L_{gH}}(h)_r=\frac{\partial_{L_{gH}} f(x)_r}{\partial x_i},$$

$$G^x_{i-g}(h)_r=cl\left(conv\bigcup_{\beta\ge r}G^x_{i-L_{gH}}(h)_\beta\right)$$

$$=\frac{1}{h}\left([f(x+he_i)]_r\ominus_g[f(x)]_r\right),$$

$$B_i(r)=cl\left(conv\bigcup_{\beta\ge r}b_\beta\right).$$

فـرض کنید مجموعه های فـازی $G^x_{i-g}(h)$ و B_i اعداد فازی باشـند و خانواده‌ای از بازه‌های به فرم $\{G^x_{i-g}(h)_r : r\in[0,1]\}$ و $\{B_i(r): r\in[0,1]\}$ بـه ترتیب به عنوان مجمـوعه r-برش‌های آن ها باشند. در واقع نشان مـی‌دهـیم اعداد فـازی $G^x_{i-g}(h)$ و B_i در گزاره ۵-۱ دارای مجـموعه r-برش به صورت زیر می‌باشند:

$$\{G^x_{i-g}(h)_r : r\in[0,1]\} \text{ و } \{B_i(r): r\in[0,1]\}$$

که در شرایط قضیه ۲-۱ صدق می‌کنند. نهایتاً نشان می‌دهیم که حد زیر موجود است، یعنی:

$$\lim_{h\to 0} G^x_{i-g}(h) = B_i.$$

می‌باشند بنابراین نگاشت فازی f، $[(g)-p]$-مشتق‌پذیر در نقطه x نسبت به مولفه x_i موجود و مساوی با B_i است. برای این کار ابتدا بر حسب r-برش بازه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$G^x_{i-g}(h)_r = \left[\underline{G}^x_{i-g}(h)_r, \overline{G}^x_{i-g}(h)_r\right]$$

و

$$B_i(r) = \left[\underline{B}_i(r), \overline{B}_i(r)\right]$$

به‌طوری که

$$\underline{G}^x_{i-g}(h)_r = \inf_{\beta\ge r} \underline{G}^x_{i-L_{gH}}(h)_\beta,$$
$$\overline{G}^x_{i-g}(h)_r = \sup_{\beta\ge r} \overline{G}^x_{i-L_{gH}}(h)_\beta,$$
$$\underline{B}_i(r) = \inf_{\beta\ge r} \underline{b}_\beta, \overline{B}_i(r) = \sup_{\beta\ge r} \overline{b}_\beta.$$

بنابراین طبق فرض قضیه ۵-۱ چون f، به طور یکنواخت (L_{gH})-مشتق‌پذیر جزئی در نقطه x نسبت به مولفه x_i برای $i=1,2,...,n$ می‌باشد و همچنین فرض کنید برای $\varepsilon>0$ دلخواه اما ثابت باشد، در این صورت برای هر $i=1,2,...,n$، $\delta_i>0$ وجود دارد به طوری که

$$0<|h|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\} \Rightarrow$$
$$\underline{b}_i(r)-\frac{\varepsilon}{4} < \underline{G}^x_{i-L_{gH}}(h)_r < \underline{b}_i(r)+\frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall r\in[0,1],$$

و

$$0<|h|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\} \Rightarrow$$
$$\overline{b}_i(r)-\frac{\varepsilon}{4} < \overline{G}^x_{i-L_{gH}}(h)_r < \overline{b}_i(r)+\frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall r\in[0,1].$$

اکنون با توجه به تعریف اینفیمم و سوپریمم برای $\varepsilon>0$ دلخواه داده شده، برای هر $r\in[0,1]$ و هر h، مقادیر $\lambda_1\ge r$، $\lambda_2\ge r$، $\lambda_3\ge r$ و $\lambda_4\ge r$ هستند به طوری که:

$$\underline{G}^x_{i-g}(h)_r > \underline{G}^x_{i-L_{gH}}(h)_{\lambda_1} - \frac{\varepsilon}{4} > \underline{b}_{\lambda_1} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} \ge \underline{B}_i(r) - \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\underline{B}_i(r) > \underline{b}_{\lambda_1} - \frac{\varepsilon}{2} > \underline{G}^x_{i-L_{gH}}(h)_{\lambda_2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} > \underline{G}^x_{i-g}(h)_r - \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\overline{G}^x_{i-g}(h)_r < \overline{G}^x_{i-L_{gH}}(h)_{\lambda_3} + \frac{\varepsilon}{4} < \overline{b}_{\lambda_3} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \le \overline{B}_i(r) + \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\overline{B}_i(r) > \overline{b}_{\lambda_4} + \frac{\varepsilon}{4} < \overline{G}^x_{i-L_{gH}}(h)_{\lambda_4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \overline{G}^x_{i-g}(h)_r + \frac{\varepsilon}{2},$$

می‌باشند و در نهایت برای h به اندازه کافی کوچک داریم:

$$\left\|G^x_{i-g}(h)\ominus_g B_i\right\| = \sup_{r\in[0,1]}\left\|G^x_{i-g}(h)_r \ominus_g B_i(r)\right\|,$$
$$= \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{\left|\underline{G}^x_{i-g}(h)_r - \underline{B}_i(r)\right|, \left|\overline{G}^x_{i-g}(h)_r - \overline{B}_i(r)\right|\right\} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

با حد گرفتن از عبارت فوق هنگامی که $h\to 0$ میل کند، داریم:

$$\lim_{h\to 0} G^x_{i-g}(h) = B_i.$$

بنابراین، اثبات کامل است.

گزاره ۵-۲: فرض کنید $f:K\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی باشد. اگر نگاشت فازی f، (g)-مشـتق‌پذیر کلی در نقـطه $x^0\in K$ باشد، آنگاه $[(g)-p]$-مشتق‌پذیری f در نقطه x^0 وجود دارد و عبارت است از:

$$\frac{\partial_g f(x^0)}{\partial x_i} = u_i, \quad i=1,2,...,n.$$

اثبات. با استفاده از تعریف (g)-مشتق‌پذیری کلی

f در نقطه x^0 و همچنین با در نظر گرفتن $h = te_i$ برای $t \neq 0$ داریم:

$$f(x^0 + te_i) \ominus_g f(x^0) = t \odot u_i + |t| \odot \varepsilon(te_i), \quad i = 1,2,...,n$$

با حدگیری از طرفین رابطه فوق چون $\lim_{t\to 0} \varepsilon(te_i) = 0$ است و حدزیر نیز وجود دارد، لذا داریم:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x^0 + te_i) \ominus_g f(x^0)}{t} = \lim_{t\to 0} u_i + \frac{|t|}{t} \odot \varepsilon(te_i) = u_i,$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\partial_g f(x^0)}{\partial x_i} = u_i, \quad i = 1,2,...,n.$$

بنابراین، اثبات کامل است.

تعریف ۵-۵: فرض کنید $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to E$ یک نگاشت فازی که (g)-مشتق‌پذیر کلی در نقطه $x^0 \in K$ باشد. آنگاه بردار فازی n-بعدی $u_i \in E$ برای $i = 1,2,...,n$، (g)-گرادیان تابع f در نقطه x^0 نامیده می‌شود و با نماد $\nabla_g f(x^0) = (u_1, u_2, ..., u_n)$ نشان داده می‌شود. توجه کنید که (g)-گرادیان یک نگاشت فازی خوش تعریف و منحصر به فرد است.

در تعریف زیر، (g)-گرادیان نگاشت فازی و (L_{gH})-گرادیان یک نگاشت فازی برحسب (L_{gH})-مشتق پذیری جزئی توسط r-برش‌ها بیان می‌شود.

تعریف ۵-۶: فرض کنید $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to E$ یک نگاشت فازی باشد. (g)-گرادیان یک نگاشت فازی در $x \in K$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_g f(x) = \left(\frac{\partial_g f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial_g f(x)}{\partial x_n} \right),$$

که در آن $\frac{\partial_g f(x)}{\partial x_i}$ برای $i = 1,2,...,n$، [(g)–p]-مشتق پذیری نگاشت فازی f در نقطه x نسبت به مؤلفه x_i است. در این حالت (i)-امین (L_{gH})-مشتق پذیری جزئی f در نقطه x برای هر $r \in [0,1]$ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial_{L_{gH}} f(x)_r}{\partial x_i} \in k_c,$$

و خانواده‌ای ازبازه‌ها به فرم $\left\{ \frac{\partial_{L_{gH}} f(x)_r}{\partial x_i} : r \in [0,1] \right\}$ را (L_{gH})-مشتق‌پذیری جزئی f در نقطه x نسبت به مؤلفه x_i می‌نامیم و با نماد $\frac{\partial_{L_{gH}} f(x)}{\partial x_i}$ نمایش می‌دهیم.

حال خانواده‌ای از بازه‌ها به فرم $\{\nabla_{L_{gH}} f(x) : r \in [0,1]\}$ را (L_{gH})-گرادیانت f در نقطه x می‌نامیم و با نماد $\nabla_{L_{gH}} f(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_{L_{gH}} f(x) = \left(\frac{\partial_{L_{gH}} f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial_{L_{gH}} f(x)}{\partial x_n} \right).$$

قضیه‌ی زیر (g)-مشتق‌پذیری جهتی را بر حسب (g)-مشتق‌پذیری کلی نگاشت‌های فازی بصورت زیر بیان می‌کند.

قضیه ۵-۲: فرض کنید $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to E$ یک نگاشت فازی باشد. اگر نگاشت فازی f، (g)-مشتق پذیری کلی در نقطه x^0 باشد به طوری که $\nabla_g f(x^0)$ در نقطه $x^0 \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد، آنگاه برای هر جهت ثابت دلخواه $d \in \mathbb{R}^n$، (g)-مشتق جهتی نگاشت فازی f در نقطه x^0، یعنی $f'_g(x^0, d)$ وجود دارد و در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$f'_g(x^0, d) = \nabla_g f(x^0) \odot d.$$

اثبات. فرض کنید نگاشت فازی f، (g)-مشتق‌پذیر کلی در نقطه $x^0 \in \mathbb{R}^n$ باشد. آنگاه طبق تعریف (g)-مشتق‌پذیری کلی برای هر جهت $d \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$f'_g(x^0, d) = \nabla_g f(x^0) \odot d,$$

یعنی $f'_g(x^0,.)$ یک عملگر ⓖ-پیوسته خطی فازی نسبت به متغیر دوم است، هرگاه ⓖ-گرادیان نگاشت فازی f در نقطه x^0 یعنی $\nabla_g f(x^0)$ وجود داشته باشد.
بنابراین، اثبات کامل است.

نتیجه ۵-۱: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی باشد. اگر نگاشت فازی f، ⓖ-مشتق پذیر کلی در نقطه x^0 باشد، آنگاه همه $[(g)\text{–}p]$-مشتقات نگاشت فازی f در نقطه x^0 وجود دارند و برای $i=1,2,\dots,n$ داریم:

$$\frac{\partial_g f(x^0)}{\partial x_i}=f'_g(x^0,e_i)=u_i,$$

علاوه بر این اگر همه ⓖ-مشتقات جهتی نگاشت فازی f در نقطه x_0 وجود داشته باشند، آنگاه داریم:

$$f'_g(x^0,d)=\sum_{\substack{i=1\\ d_i\geq 0}}^{n} d_i\odot u_i\ominus_g\sum_{\substack{i=1\\ d_i<0}}^{n} d_i\odot u_i$$

توجه ۵-۱: در قضیه ۲-۵، اگر ⓖ-مشتق‌پذیری کلی نگاشت فازی f در نقطه x^0، یعنی $\nabla_g f(x^0)$ وجود داشته باشد، آنگاه برای هر جهت $d\in\mathbb{R}^n$، $f'_g(x^0,d)$ وجود دارد. اما عکس آن لزوماً برقرار نیست، یعنی وجود همه ⓖ-مشتقات جهتی نگاشت فازی f در نقطه x^0، ⓖ-مشتق‌پذیری کلی نگاشت فازی f در نقطه x^0 را نتیجه نمی‌دهد. به‌عنوان نمونه مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۵-۱: فرض کنید نگاشت فازی $f:\mathbb{R}^2\to E$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}U_1\odot x_1+U_2\odot\left(x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}}\right), & \text{اگر } x_2\neq 0\\ 0, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

که در آن $U_1,U_2\in E$ می‌باشند.

در واقع از ⓖ-مشتق جهتی نگاشت فازی f در نقطه $x^0=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ و در جهت $d=(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2$، داریم:

$$f_g((0,0),(d_1,d_2))=\lim_{h\to 0^+}\frac{f((0,0)+h(d_1,d_2))\ominus_g f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(hd_1,hd_2)}{h}$$

$$=\begin{cases}U_1\odot d_1+c_2\odot\left(d_2 e^{\frac{d_1}{d_2}}\right), & \text{اگر } d_2\neq 0\\ 0, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

بنابراین نگاشت فازی f، ⓖ-مشتق‌پذیر جهتی در نقطه $x^0=(0,0)$ و در جهت $(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2$ است.
اما عملگر $\nabla_g f(0,0)$ در نقطه‌ی $x^0=(0,0)$، ⓖ-پیوسته فازی نیست. لذا نگاشت فازی f، ⓖ-مشتق‌پذیر کلی در نقطه $x^0=(0,0)$ نیست.
در حالت خاص، به‌ویژه در حالت یک بعدی می‌توانیم یک قاعده برای محاسبه ⓖ-مشتق‌پذیر جهتی بر حسب ⓖ-مشتق‌پذیر توابع فازی-مقدار را به صورت زیر بیان کنیم.

گزاره ۵-۳: فرض کنید $f:\mathrm{K}\subseteq\mathbb{R}^n\to E$ یک نگاشت فازی-مقدار باشد، اگر تابع فازی-مقدار f، ⓖ-مشتق‌پذیر روی K باشد، آنگاه تابع فازی-مقدار f، ⓖ-مشتق‌پذیر جهتی روی K است و برای هر $x^0\in\mathrm{K}$ و $d^0\in\mathbb{R}$ داریم:

$$f'_g(x^0,d^0)=f'_g(x^0)\odot d^0.$$

اثبات. فرض کنید $x^0\in\mathrm{K}$ و $d^0\in\mathbb{R}$ ثابت و دلخواه باشند. با استفاده از تعریف ۲-۴، داریم:

$$f'_g(x^0,d^0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f'_g(x^0+hd^0)\ominus_g f(x^0)}{h}.\qquad (۵\text{-}۲)$$

چون تابع فازی-مقدار f، ⓖ-مشتق‌پذیر است، بنابراین با استفاده ازرابطه (۳-۲) حدزیر وجود دارد:

$$f'_g(x^0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f'_g(x^0+h)\ominus_g f(x^0)}{h}$$

که در آن $f_g'(x^0)\in E$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f_g'(x^0+h)\ominus_g f(x^0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f_g'(x^0+h)\ominus_g f(x^0)}{h} = f_g'(x^0). \qquad (۵-۳)$$

از روابط (۵-۲) و (۵-۳) داریم:

$$\begin{aligned} f_g'(x^0,d^0) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f_g'(x^0+hd^0)\ominus_g f(x^0)}{h}\odot d^0 \\ &= \begin{cases} \lim\limits_{h'\to 0^+}\dfrac{f_g'(x^0+h')\ominus_g f(x^0)}{h'}\odot d^0, & d^0>0 \\ \lim\limits_{h'\to 0^-}\dfrac{f_g'(x^0+h')\ominus_g f(x^0)}{h'}\odot d^0, & d^0<0 \end{cases} \\ &= f_g'(x^0)\odot d^0, \quad \forall x^0\in \mathrm{K},\ d^0\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

بنابراین، اثبات کامل است.

در مثال‌های زیر روابط بین (g)-مشتق جهتی، $[(g)\text{–}p]$-مشتق، (L_{gH})-مشتق‌پذیری جهتی و (L_{gH})-مشتق جزئی را با جزئیات بیان می‌نمائیم.

مثال ۵-۲: فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to E$ یک نگاشت فازی باشد که توسط رابطه زیر:

$$f(x_1,x_2)=\langle -1,0,1\rangle\odot|x_1-x_2|-x_1-x_1x_2-x_2^3,$$

برای هر $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ تعریف شده باشد و برای هر $r\in[0,1]$، r-برش‌های آن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$[f(x_1,x_2)]_r=\big[(r-1)|x_1-x_2|-x_1-x_1x_2-x_2^3,\ (1-r)|x_1-x_2|-x_1-x_1x_2-x_2^3\big],$$

برای هر $r\in[0,1]$، نقطه $x^0=(0,0)$ و در جهت $d=(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2$ داده شده است، لذا داریم:

$$\begin{aligned} &f'_{L_{gH}}\big((0,0),(d_1,d_2)\big)_r \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\big[f\big((0,0)+h(d_1,d_2)\big)\big]_r\ominus_{gH}[f(0,0)]_r \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\big[f(hd_1,hd_2)\big]_r \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\big[(r-1)|hd_1-hd_2|-hd_1-h^2d_1d_2-h^2d_2^3 \\ &\quad ,(1-r)|hd_1-hd_2|-hd_1-h^2d_1d_2-h^2d_2^3\big] \\ &= \big[(r-1)|d_1-d_2|-d_1,(1-r)|d_1-d_2|-d_1\big], \end{aligned}$$

برای هر $r\in[0,1]$ و هر $d=(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2$ برقرار است. لذا نگاشت فازی f، (g)-مشتق پذیر جهتی در نقطه $x^0=(0,0)$ و در هر جهت $d=(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2$ است. حال اگر $r=0.25$ و بردار واحد را $e_1=(1,0)$ در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{L_{gH}} f(0,0)_{0.25}}{\partial x_1} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(0,0)+he_1]_{0.25}\ominus_{gH}[f(0,0)]_{0.25} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big[-0.75|h|-h,0.75|h|-h\big], \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که حد فوق وجود ندارد. در نهایت، نگاشت فازی f، (L_{gH})-مشتق‌پذیری جزئی در نقطه $x^0=(0,0)$ نسبت به مؤلفه x_1 نیست.

مثال ۵-۳: فرض کنید نگاشت فازی $f:\mathbb{R}^2\to E$ برای هر $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$، به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x_1,x_2)=\langle -1,0,1\rangle\odot\sin\big(x_1+x_1^2+x_1^3-|x_2|\big)+|x_2|,$$

آنگاه برای هر $d=(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2$ و نقطه $x^0=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ (g)-مشتق جهتی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &f_g'\big((0,0),(d_1,d_2)\big) \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f\big((0,0)+h(d_1,d_2)\big)\ominus_g f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\langle -1,0,1\rangle\odot\sin\big(hd_1+h^2d_1^2+h^3d_1^3-|hd_2|\big)+|hd_2|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+}\langle -1,0,1\rangle\odot\big(d_1+2hd_1^2+3h^2d_1^3-|d_2|\big) \\ &\qquad \cos\big(hd_1+h^2d_1^2+h^3d_1^3-|hd_2|\big)+|d_2| \\ &= \langle -1,0,1\rangle\odot d_1. \end{aligned}$$

بنابراین نگاشت فازی f، (g)-مشتق‌پذیر جهتی در نقطه $x^0=(0,0)$ و در هر جهت d_1 می‌باشد به طوری که $f_g'(x^0,.)$ روی $\mathbb{R}^2$، یک عملگر (g)-پیوسته خطی فازی نسبت به d_1 است. اما با این وجود، برای نقطه $x^0=(0,0)$ و بردار یکه $e_1=(1,0)$ داریم:

$$\frac{\partial_g f(0,0)}{\partial x_1} = \lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(1,0))\ominus_g f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)\ominus_g f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\langle -1,0,1\rangle \odot \sin(h+h^2+h^3)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\langle -1,0,1\rangle \odot (1+2h+3h^2)\cos(h+h^2+h^3)$$
$$= \langle -1,0,1\rangle \in E.$$

لذا نگاشت فازی f، $[(g)-p]$-مشتق‌پذیر در نقطه $x^0=(0,0)$ نسبت به مؤلفه x_1 است.

مثال ۵-۴: فرض کنید $f:\mathbb{R}^3\to E$ یک نگاشت فازی باشد که مجموعه r-برش‌های آن به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$[f(x_1,x_2,x_3)]_r = [\underline{f}_r(x_1,x_2,x_3), \overline{f}_r(x_1,x_2,x_3)]$$
$$= \begin{cases} \left[\min\left\{0, \frac{(1-r)x_1x_2^2x_3}{x_1^4+x_2^4+x_3^4}, \max\frac{(1-r)x_1x_2^2x_3}{x_1^4+x_2^4+x_3^4}\right\}\right], & (x_1,x_2,x_3)\neq(0,0,0), \\ [0,0,0], & (x_1,x_2,x_3)=(0,0,0). \end{cases}$$

برای هر $r\in[0,1]$ و نقطه $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ داده شده، اگر $x_1=x_2=x_3=0$ باشد، داریم:

$$\frac{\partial_{L_{gH}} f(0,0,0)_r}{\partial x_1}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x_1,0,0)+h(1,0,0)]_r \ominus_{gH} [f(0,0,0)]_r}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(0+h,0,0)+h(1,0,0)]_r \ominus_{gH} [f(0,0,0)]_r}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[0,0,0]}{h} = [0,0,0]\in k_c,$$

$$\frac{\partial_{L_{gH}} f(0,0,0)_r}{\partial x_2}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(0,x_2,0)+h(0,1,0)]_r \ominus_{gH} [f(0,0,0)]_r}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(0,0+h,0)]_r \ominus_{gH} [f(0,0,0)]_r}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[0,0,0]}{h} = [0,0,0]\in k_c,$$

$$\frac{\partial_{L_{gH}} f(0,0,0)_r}{\partial x_3}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(0,0,x_3)+h(0,0,1)]_r \ominus_{gH} [f(0,0,0)]_r}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(0,0,0+h)]_r \ominus_{gH} [f(0,0,0)]_r}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[0,0,0]}{h} = [0,0,0]\in k_c.$$

بنابراین نگاشت فازی f، (L_{gH})-مشتق‌پذیر جزئی در نقطه $x=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ است، اما با این وجود f (L_{gH})-مشتق جهتی در $x=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ وجود ندارد.

حال با درنظر گرفتن جهت $d=(2,1,-1)\in\mathbb{R}^3$ و برای $r\in[0,1]$ داریم:

$$f'_{L_{gH}}(x,d)_r$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(0,0,0)+h(2,1,-1)]_r \ominus_{gH} [f(0,0,0)]_r}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(2h,h,-h)]_r}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-1(1-r)}{9h^8},0\right],$$

از این رو حد فوق موجود نیست.

در نتیجه نگاشت فازی f، (L_{gH})-مشتق جهتی در نقطه $x=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ و در جهت $d=(2,1,-1)\in\mathbb{R}^3$ نمی‌باشد.

نتیجه‌گیری

مفهوم مشتق‌پذیری کلی برای نگاشت‌های چند بعدی فازی با استفاده از (g)-تفاضل جدید که در سال ۲۰۱۳ توسط بده و استفاینی [6] گسترش دادیم و سپس مفهوم (g)-مشتق‌پذیری جهتی و جزئی برای نگاشت‌های چند بعدی فازی تعریف و ارتباط بین آن‌ها را بحث کردیم. نهایتاً ارتباط بین (g)-مشتق‌پذیری کلی و (g)-مشتق‌پذیری جهتی و جزئی با ارائه چند مثال کاربردی بحث کردیم.

فهرست مراجع

[1] Alikhani, R. and Bahrami, F., Global solutions of fuzzy integrodifferential equations under generalized differentiability by the method of upper and lower solutions, Inform. Sci., 295 (2015), 600-608.

[2] Allahviranloo, T., Gouyandeh, Z., Armand, A. and Hasanoglu, A., On fuzzy solutions for heat equation based on generalized Hukuhara differentiability, Fuzzy Sets Syst. 265(2015)123.

[3] Bede, B., Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Studies in fuzziness and Soft computing, 295. Springer, Heidelberg, 2013. Springer, London, 2013.

[4] B. Bede, S.G. Gal, Generalizations of the differentiability of fuzzy number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, Fuzzy Sets Syst. 151 (3) (2005)

[5] Bede, B., Rudas, I.J., and Bencsik, A.L., First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability, Inform. Sci., 177(7) (2007), 1648-1662.

[6] Bede, B. and Stefanini, L., Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, Fuzzy Sets Syst. 230(0) (2013) 119- 141.

[7] Ebrahimnejad, A., New method for solving fuzzy transportation problems with LR at fuzzy numbers, Inform. Sci. 357 (2016) 108-124.

[8] Gasilov, N. A., Amrahov, S. E., Fatullayev, A. G. and Hashimoglu, I. F., Solution method for a boundary value problem with fuzzy forcing function, Inform. Sci. 317 (2015) 349-368.

[9] Goetschel, R., and Voxman, W., Elementary fuzzy calculus, Fuzzy sets and systems, 18 (1986), 31-43.

[10] Gomes, L. T. and Barros, L. C., A note on the generalized difference and the generalized differentiability, Fuzzy Sets Syst. 280 (2015) 142-145.

[11] Hukuhara, M., Integration des applications mesurables dont lavaleur est uncompact convex, Funkc. Ekvacioj 10 (1967) 205-223.

[12] Klir, George J. and Yuan, Bo, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and application sprentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1995.

[13] Khastan, A. and Ivaz, K., Numerical solution of fuzzy differential equations by Nystrom method, chaos, Solution and Fractals, 41(2009), 859-868.

[14] Kaleva, O., Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets Syst. 24 (1987) 301-317.

[15] Lupulescu, V., Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations on time scales, Inform Sci. 248 (2013) 50-67.

[16] Neito, J.J., Khastan, A. and Ivaz, K., Numerical solution of fuzzy differential equations under generalized differentiability, Nonlinear Anal. Hybrid Syst., 3 (2009), 700-707.

[17] Puri, M.L. and Ralescu, D.A., Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. 91 (2) (1983) 552-558.

[18] Seikkala, s., On the fuzzy initial value problem, Fuzzy sets and Systems, 24 (1987).

[19] Stefanini, L., A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, Fuzzy Sets Syst. 161 (2010).

[20] Stefanini, L. and Jiménez, M. A., Karush-Kuhn-Tucker conditions for interval and fuzzy optimization in several variables under total and directional generalized differentiability, Fuzzy Sets and Syst. 283 (2018).

[21] Stefanini, L., A generalization of Hukuhara difference, in D. Dubois, M.A. Lubiano, H. Prade, M.A. Gil, P.Grzegorzewski, O. Hryniewicz (Eds.), Soft Methods for Handling Variability and Imprecision, in Series on Advances in Soft Computing, Springer, 2008.

[22] Wang, G. X. and Wu, C. X., Directional derivatives and subdifferential of convex fuzzy mappings and application in convex fuzzy programming, Fuzzy Sets Syst. 138 (2003)

[23] Zadeh, L. A., Fuzzy sets, Inform. Control. 8 (1965) 338-353.

[24] Zadeh, L. A., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-i, Inform. Sci. 8 (1975) 199-249.

[25] Zadeh, L. A., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning- III, Inform. Sci. 9 (1975) 43-80.