دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مدول‌های تصویری $\mathbb{C}_\varphi$ در جبر باناخ دوگان

الهام ایلکا[1]، امین محمودی کبریا[2]*

[1و2] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۸/۲۱   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۳/۱۸

چکیده

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ دوگان و φ یک همریختی w^*- پیوسته از $\mathcal{A}$ به $\mathbb{C}$ باشد. در این مقاله، تصویری بودن $\mathbb{C}_\varphi$ را به عنوان $\mathcal{A}$- دومدول و همچنین به عنوان $WAP(\mathcal{A}^*)^*$- دومدول بررسی خواهیم نمود.

واژه‌های کلیدی: مدول تصویری، φ-میانگین‌پذیری، جبرهای باناخ دوگان.

*. عهده‌دار مکاتبات: a_mahmoodi@iauctb.ac.ir

۱. مقدمه

همانطور که اهمیت مفهوم میانگین‌پذیری برای جبرهای باناخ توسط جانسون در مقاله [1] بیان شده است. تعمیم جدیدی از میانگین‌پذیری که بستگی به همریختی‌ها دارد توسط کانیوت و لوا و پیم در [2,3] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است. این مفهوم نیز توسط منفرد در [4] به طور مستقل مطالعه گردید. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ مختلط و X یک $\mathcal{A}$- مدول باناخ باشد. نگاشت خطی و کران‌دار $D: \mathcal{A} \to X$ را یک اشتقاق گوییم هرگاه برای هر $a, b \in \mathcal{A}$

$$D(ab) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db) \ .$$

فرض کنیم $x \in X$, نگاشت $ad_x: \mathcal{A} \to X$ را که به صورت $ad_x(a) = a \cdot x - x \cdot a$ تعریف می‌شود, یک اشتقاق درونی نامیم. مجموعه همه همریختی‌های (پیوسته) از $\mathcal{A}$ بتوی $\mathbb{C}$ را با $\Delta(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. یک عضو $m \in \mathcal{A}^{**}$ را یک φ-میانگین راست [چپ] نامیم هرگاه

$$m(f \cdot a) = \varphi(a) m(f), m(\varphi) = 1$$
$$[m(a \cdot f) = \varphi(a) m(f)]$$

برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $f \in \mathcal{A}^*$. یک جبر باناخ را φ- میانگین پذیر راست [چپ] نامیم هرگاه φ-میانگین راست [چپ] داشته باشد[4]. $\mathcal{A}$ را φ-میانگین پذیر نامیم هرگاه φ-میانگین پذیر راست و چپ باشد. مجموعه ای از همه $\mathcal{A}$- دومدول‌های باناخ E را که عمل ضرب مدولی راست [چپ] آن به صورت

$$x \cdot a \coloneqq \varphi(a) x$$
$$[a \cdot x \coloneqq \varphi(a) x]$$

برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $x \in \mathrm{E}$ تعریف می‌شود را با $\mathbb{M}_\varphi$ نمایش می‌دهیم.

در [5] رونده مفهومی از کن میانگین‌پذیری را برای کلاسی از جبر باناخ دوگان مورد مطالعه قرار داد.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با یکدار $\mathcal{A}^\#$ است, فرض کنیم P یک $\mathcal{A}$- مدول چپ است. P را یک $\mathcal{A}$- مدول چپ تصویری نامیم هرگاه نگاشت ضربی

$$\pi: \mathcal{A}^\# \widehat{\otimes} P \to P \ ; \ a \otimes x \mapsto a \cdot x$$

برای هر $a \in \mathcal{A}^\#, x \in P$ یک معکوس راست داشته باشد که یک همریختی $\mathcal{A}$- مدول چپ است. به‌طور مشابه, $\mathcal{A}$- مدول راست تصویری و $\mathcal{A}$- مدول تصویری تعریف می‌شوند. برای $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$, فضای $\mathbb{C}_\varphi = \{\alpha\varphi : \alpha \in \mathbb{C}\}$ یک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ با عمل‌های مدولی

$$a \cdot \varphi = \varphi \cdot a \coloneqq \varphi(a) \varphi \quad (a \in \mathcal{A})$$

است. یک جبر باناخ دوگان $\mathcal{A}$ را کن میانگین‌پذیر نامیم هرگاه هر اشتقاق w^*- پیوسته از $\mathcal{A}$ به یک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ دوگان نرمال, درونی باشد. اگر $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ دوگان باشد, $\Delta_{w^*}(\mathcal{A})$ نشاندهنده مجموعه همه همریختی‌های w^*- پیوسته از $\mathcal{A}$ به توی $\mathbb{C}$ است. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ دوگان باشد, در این صورت $\mathcal{A}$- دومدول باناخ E را نرمال نامیم اگر عمل‌های مدولی از $\mathcal{A}$ به E, w^*- پیوسته باشند. فرض کنیم $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_*)^*$ یک جبر باناخ دوگان و E یک باناخ $\mathcal{A}$- دومدول باشد. مجموعه‌ی تمام $x \in E$ هایی که نگاشت‌های

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{E}\,, \ \ \mathrm{a} \longmapsto \begin{cases} a \cdot x \\ x \cdot a \end{cases}$$

w^*- ضعیف پیوسته‌اند را با $\sigma wc(E)$ نمایش می‌دهیم. در این مقاله به بررسی φ- میانگین پذیری جبر باناخ دوگان و تصویری بودن $\mathcal{A}$- دومدول باناخ می‌پردازیم. برای یک جبر باناخ دوگان $\mathcal{A}$ و برای $\varphi \in \Delta_{w^*}(\mathcal{A})$, نشان می‌دهیم که عبارت‌های زیر معادلند:

۱) $\mathbb{C}_\varphi$, $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری است.

۲) یک تابعک خطی کراندار m در $\sigma wc(\mathcal{A}^*)$ وجود دارد به‌طوری که $m(\varphi) = 1$ و $m(f \cdot a) = \varphi(a) m(f)$ برای هر $a \in \mathcal{A}$ و

$f \in \sigma wc(\mathcal{A}^*)$ است.

۳) $\mathcal{A}$, φ- انژکتیو است.

به دلیل ساختار یک جبر باناخ دوگان $\mathcal{A}$، ما با همریختی φ در $\mathcal{A}$ که w^*- پیوسته است سروکار داریم.

۲. دو مدول باناخ تصویری

قضیه ۲-۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ دوگان است و φ همریختی از $\mathcal{A}$ بتوی $\mathbb{C}$ باشد. آنگاه φ، w^*- پیوسته است اگر و تنها اگر $\varphi \in \sigma wc(\mathcal{A}^*)$.

برهان. فرض کنیم $\varphi \in \sigma wc(\mathcal{A}^*)$ و فرض کنیم $a_i \xrightarrow{w^*} a$ در $\mathcal{A}$. آنگاه برای هر $\Lambda \in \mathcal{A}^{**}$ داریم:

$$\lim_i \varphi(a_i)\langle \Lambda, \varphi\rangle = \lim_i \langle \Lambda, a_i.\varphi\rangle = \langle \Lambda, a.\varphi\rangle = \varphi(a)\langle \Lambda, \varphi\rangle$$

سپس Λ را طوری انتخاب می‌کنیم $\langle \Lambda, \varphi\rangle \neq 0$، بنابراین داریم $\varphi(a_i) \to \varphi(a)$. به‌طور مشابه عکس مطلب فوق اثبات می‌شود.

قضیه ۲-۲. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبرباناخ دوگان و $\varphi \in \Delta_{w^*}(\mathcal{A})$ باشد. آن‌گاه عبارت‌های زیر معادلند:

۱) $\mathbb{C}_{\varphi}$، $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری است.

۲) تابعک خطی کراندار m روی $\sigma wc(\mathcal{A}^*)^*$ موجود است به طوری که $m(\varphi) = 1$ و $m(f \cdot a) = \varphi(a)m(f)$ برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $f \in \sigma wc(\mathcal{A}^*)$ صادق است.

برهان. فرض کنیم $i: \mathcal{A} \to \sigma wc(\mathcal{A}^*)^*$ نگاشت $\mathcal{A}$- دومدول بدست آمده از ترکیب نگاشت شمول متعارف $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{**}$ با نگاشت خارج قسمتی $\mathcal{A}^{**} \to \sigma wc(\mathcal{A}^*)^*$ است. آنگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $\psi \in \sigma wc(\mathcal{A}^*)$ داریم $\langle i(a), \psi\rangle = \psi(a)$.

$1 \Rightarrow 2$: فرض کنیم $\mathbb{C}_{\varphi}$، $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری است، آن‌گاه یک نگاشت خطی کراندار $\rho: \mathbb{C}_{\varphi} \to \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}_{\varphi}$ موجود است به‌طوری که برای $a \cdot \rho(\varphi) = \varphi(a)\rho(\varphi)$ و $\pi\rho(\varphi) = \varphi$ هر $a \in \mathcal{A}$ صادق است.

برای $a_n \in \mathcal{A}\ (n = 1,2, \dots)$ با $\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\| < \infty$ داریم $\rho(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \otimes \varphi$.

$u := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathcal{A}$ در نظر می‌گیریم، آنگاه $i(u)$ تابعک خواسته شده در $\sigma wc(\mathcal{A}^*)$ می‌باشد.

$2 \Rightarrow 1$: عضو $m \in \sigma wc(\mathcal{A}^*)^*$ که در شرایط (2) صادق است درنظر می‌گیریم. چون $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ دوگان است و $\mathcal{A}_*$ الحاقی $\mathcal{A}$- دومدول همریختی w^*-w^*- پیوسته $P: \sigma wc(\mathcal{A}^*)^* \to \mathcal{A}$ را در نظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم $Poi(a) = a$. حال قرار می‌دهیم $u = P(m) \in \mathcal{A}$، به سادگی می‌توان نشان داد u در شرایط لازم برای $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری بودن $\mathbb{C}_{\varphi}$ صدق می‌کند.

قضیه۲-۳. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبرباناخ و $\mathcal{B}$ یک جبرباناخ دوگان و $\theta: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ یک همریختی پیوسته با برد w^*- چگال و $\varphi \in \Delta_{w^*}(\mathcal{B})$ باشد، در این صورت

۱) اگر $\mathcal{A}$، $\varphi o\theta$- میانگین‌پذیر باشد آن‌گاه $\mathbb{C}_{\varphi}$، $\mathcal{B}$- دومدول باناخ تصویری است.

۲) اگر $\mathcal{A}$ جبر باناخ دوگان و θ، w^*- پیوسته باشد آنگاه $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری بودن $\mathbb{C}_{\varphi o\theta}$، $\mathcal{B}$- دومدول باناخ تصویری بودن $\mathbb{C}_{\varphi}$ را نتیجه می‌دهد.

برهان. ما اثبات گزاره (1) را بیان می‌کنیم. فرض کنیم $m \in \mathcal{A}^{**}$ که در تساوی‌های $m(\varphi o\theta) = 1$ و $m(f \cdot a) = (\varphi o\theta)m(f)$ برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $f \in \mathcal{A}^*$ صادق است. عضو $n \in \sigma wc(\mathcal{B}^*)^*$ را به صورت $n(g) = m(go\theta)$ برای هر $g \in \sigma wc(\mathcal{B}^*)$ تعریف می‌کنیم. از طرفی برای $a \in \mathcal{A}$ و $g \in \sigma wc(\mathcal{B}^*)$ داریم $(g \cdot \theta(a))o\theta = (go\theta) \cdot a$ و بنابراین

$n(g\cdot\theta(a)) = m\left((g\cdot\theta(a))o\theta\right) = m((go\theta)\cdot a) = (\varphi o\theta)(a)m(go\theta) = (\varphi o\theta)(a)n(g)$

چون $\theta(a)$ در $\mathcal{B}$, w^*- چگال است، با توجه به تساوی بالا و قضیه ۲-۲ اثبات کامل خواهد شد.
فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبرباناخ منظم آرنز است که ایده‌آل در $\mathcal{A}^{**}$ می‌باشد. واضح است که $\mathcal{A}^{**}$ یک جبرباناخ دوگان است[6]. فرض کنیم $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ و $\tilde{\varphi}$ توسیع φ به $\mathcal{A}^{**}$ باشد, آنگاه $\tilde{\varphi} \in \Delta_{w^*}(\mathcal{A}^{**})$.
برای اثبات، فرض کنیم $\Lambda_\alpha \xrightarrow{w^*} \Lambda$ در $\mathcal{A}^{**}$ باشد و $a \in \mathcal{A}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\varphi(a) \neq 0$.
آنگاه $a\Lambda_\alpha \xrightarrow{wk} a\Lambda$ در $\mathcal{A}$، چون $\mathcal{A}$ یک ایدآل از $\mathcal{A}^{**}$ است. بنابراین

$\varphi(a)\lim_\alpha \tilde{\varphi}(\Lambda_\alpha) = \lim_\alpha \varphi(a\Lambda_\alpha) = \varphi(a\Lambda) = \varphi(a)\tilde{\varphi}(\Lambda)$

پس خواهیم داشت $\lim_\alpha \tilde{\varphi}(\Lambda_\alpha) = \tilde{\varphi}(\Lambda)$.

قضیه ۲-۴. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبرباناخ منظم آرنز که ایده‌آل در $\mathcal{A}^{**}$ است، فرض کنیم $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ آنگاه عبارت‌های زیر معادلند:

۱) $\mathcal{A}$، φ-میانگین‌پذیر است.

۲) $\mathbb{C}_{\tilde{\varphi}}$, $\mathcal{A}^{**}$- دومدول باناخ تصویری است.

برهان. $2 \Longrightarrow 1$: چون $\varphi = \tilde{\varphi}oi$, این قضیه نتیجه‌ای از قضیه (۱) ۳-۲ است، که $i: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^{**}$ نگاشت شمول است.

$1 \Longrightarrow 2$ بنا به قضیه ۲-۲، یک عضو $m \in \sigma wc(\mathcal{A}^{***})^*$ موجود است به‌طوری که برای هر $u \in \mathcal{A}^{**}$ و هر $F \in \sigma wc(\mathcal{A}^{***})$, $m(\tilde{\varphi}) = 1$ و $m(F\cdot u) = \tilde{\varphi}(u)m(F)$ است.
قرار می‌دهیم $\overline{m} = m\mid_{\mathcal{A}^*}$ تحدیدی از m به $\mathcal{A}^*$.
چون $\mathcal{A}^{**}$ یک جبر باناخ دوگان است پس $\mathcal{A}^* \subseteq \sigma wc(\mathcal{A}^{***})$، بنابراین $\overline{m}$ خوش تعریف است. آنگاه برای هر $f \in \mathcal{A}^*$ و $a \in \mathcal{A}$ به آسانی می‌توان دید $\overline{m}(\varphi) = m(\tilde{\varphi}) = 1$, $\overline{m}(f\cdot a) = \varphi(a)\overline{m}(f)$.

۳. φ -انژکتیو

فرض کنیم S زیر مجموعه از جبر H باشد. جابجاگر S در H به صورت زیر تعریف می‌کنیم.
$S^c = \{h \in H: hs = sh, s \in S\}$. واضح است که S^c زیرجبر بسته از H است. فرض کنیم H جبر باناخ بوده و فرض کنیم S زیرجبر بسته از H است.
از تساوی $\mathcal{L}(E) = (E^* \widehat{\otimes} E)^*$ معلوم می‌شود که $\mathcal{L}(E)$ یک جبر باناخ دوگان است, که E یک فضای باناخ انعکاسی است [5]. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ بوده و فرض کنیم $\theta: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ یک همریختی است. برای $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ تعریف می‌کنیم
$\theta(\mathcal{A})^\varphi = \{b \in B: \theta(a)b = \varphi(a)b, (a \in \mathcal{A})\}$.

به وضوح $\theta(\mathcal{A})^\varphi$ یک زیر جبر بسته از $\mathcal{B}$ است.

تعریف ۳-۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ بوده و فرض کنیم $\theta: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ یک همریختی و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ است. یک φ- شبه انتظار $Q: \mathcal{B} \to \theta(\mathcal{A})^\varphi$ یک تصویر از $\mathcal{B}$ بروی $\theta(\mathcal{A})^\varphi$ است که در تساوی $Q(cbd) = cQ(b)d$ برای هر $b \in \mathcal{B}$ و $c, d \in \theta(\mathcal{A})^c$ صدق می‌کند.

تعریف ۳-۲. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ دوگان و $\varphi \in \Delta_{w^*}(\mathcal{A})$ است. $\mathcal{A}$ را φ- انژکتیو نامیم اگر برای هر نمایش w^*-پیوسته $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{L}(E)$ که در آن E یک فضای باناخ انعکاسی است, یک φ- شبه انتظار از $Q: \mathcal{L}(E) \to \pi(\mathcal{A})^\varphi$ وجود داشته باشد. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ دوگان است. واضح است که $\mathcal{A}^\# = \mathcal{A}\oplus\mathbb{C}e$ یکدار شده $\mathcal{A}$، یک جبر باناخ دوگان است. فرض کنیم $\varphi \in \Delta_{w^*}(\mathcal{A})$ و

$\varphi^{\#}$ گسترش یکتا در $\mathcal{A}^{\#}$ است که به صورت $\varphi^{\#}(a,\lambda)=\varphi(a)+\lambda$ تعریف می‌شود.

قضیه ۳-۳. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ دوگان و $\varphi\in\Delta_{w^*}(\mathcal{A})$ است, آنگاه $\mathcal{A}$, φ- انژکتیو است اگر و تنها اگر $\mathcal{A}^{\#}$, $\varphi^{\#}$- انژکتیو باشد.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{A}$, φ- انژکتیو و $\pi:\mathcal{A}^{\#}\to\mathcal{L}(E)$ یک نمایش w^*-پیوسته که E فضای باناخ انعکاسی است. به وضوح $\tilde{\pi}=\pi\mid_{\mathcal{A}}$ یک نمایش w^*-پیوسته برای $\mathcal{A}$ است. آنگاه یک φ- شبه انتظار $Q:\mathcal{L}(E)\to\tilde{\pi}(\mathcal{A})^{\varphi}$ وجود دارد. از طرفی چون $\pi(\mathcal{A}^{\#})^{\varphi^{\#}}=\tilde{\pi}(\mathcal{A})^{\varphi}$ و $\pi(\mathcal{A}^{\#})^{c}=\tilde{\pi}(\mathcal{A})^{c}$ است, پس نتیجه حاصل می‌شود. بالعکس, فرض کنیم $\mathcal{A}^{\#}$, $\varphi^{\#}$- انژکتیو است و $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{L}(E)$ یک نمایش w^*-پیوسته روی فضای باناخ انعکاسی E است. حال نگاشت π را به یک نگاشت $\tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}:\mathcal{A}^{\#}\to\mathcal{L}(E)$ با قرار دادن $\tilde{\pi}(a,\lambda)=\pi(a)+\lambda I_E$ برای هر $\lambda\in\mathbb{C}$ و $a\in\mathcal{A}$ توسیع می‌دهیم. واضح است که $\tilde{\pi}$ یک نمایش w^*- پیوسته است. با توجه به فرض یک $\varphi^{\#}$- شبه انتظار $Q:\mathcal{L}(E)\to\tilde{\pi}(\mathcal{A}^{\#})^{\varphi^{\#}}$ وجود دارد. چون $\tilde{\pi}(\mathcal{A}^{\#})^{\varphi^{\#}}=\pi(\mathcal{A})^{\varphi}$ و $\tilde{\pi}(\mathcal{A}^{\#})^{c}=\pi(\mathcal{A})^{c}$ پس نتیجه می‌شود $\mathcal{A}$, φ- انژکتیو است.

قضیه ۳-۴. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ و $\mathcal{B}$ یک جبرباناخ دوگان و $\theta:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ یک همریختی پیوسته است. فرض کنیم یکی از موارد زیر برقرار باشد:

۱) $\varphi\in\Delta(\mathcal{A})$ و $\mathcal{A}$, φ- میانگین پذیر است.

۲) $\mathcal{A}$ جبرباناخ دوگان و θ, w^*-پیوسته و $\mathbb{C}_{\varphi}$, $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری است.

آنگاه یک φ- شبه انتظار $Q:\mathcal{B}\to\theta(\mathcal{A})^{\varphi}$ موجود است.

برهان. فرض کنیم $E=\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}_*$ مجهز به عمل $\mathcal{A}$- دومدولی به صورت

$$a\cdot(b\otimes f)=\varphi(a)(b\otimes f),$$
$$(b\otimes f)\cdot a=b\otimes f\cdot\theta(a)$$

برای $a\in\mathcal{A}$, $f\in\mathcal{B}_*$, $b\in\mathcal{B}$ باشد. فضاهای E^* و $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ را می‌توان به صورت زیر, فضاهای یکسان در نظر گرفت

$$T\langle b\otimes f\rangle=\langle f,T(b)\rangle(T\in\mathcal{L}(\mathcal{B}),f\in\mathcal{B}_*,b\in\mathcal{B})$$

بنابراین $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ به صورت زیر به یک $\mathcal{A}$- دو مدول دوگان تبدیل می‌شود

$$(a\cdot T)(b)=\theta(a)T(b),$$
$$(T\cdot a)(b)=\varphi(a)T(b)$$
$$(T\in\mathcal{L}(\mathcal{B}),b\in\mathcal{B},a\in\mathcal{A})$$

فرض کنیم F زیر فضایی از E^* شامل همه $T\in E^*$ باشد به طوری که

$$\langle zb\otimes f-b\otimes f\cdot z,T\rangle=0\ ,$$
$$\langle bz\otimes f-b\otimes z\cdot f,T\rangle=0$$
$$\langle \acute{z}\otimes f,T\rangle=0$$
$$(z\in\theta(\mathcal{A})^{c},f\in\mathcal{B}_*,b\in\mathcal{B},\acute{z}\in\theta(\mathcal{A})^{\varphi})$$

واضح است که F یک $\mathcal{A}$- زیر مدول w^*-پیوسته از E^* است و بنابراین F یک $\mathcal{A}$- دو مدول باناخ دوگان است. تعریف می‌کنیم $D=ad_{I_{\mathcal{B}}}:\mathcal{A}\to\mathcal{L}(\mathcal{B})$ که $I_{\mathcal{B}}$ نگاشت همانی در $\mathcal{B}$ است. ادعا می‌کنیم $D(\mathcal{A})\in F$ است. برای اثبات فرض کنیم

$$z\in\theta(\mathcal{A})^{c},f\in\mathcal{B}_*,b\in\mathcal{B},\acute{z}\in\theta(\mathcal{A})^{\varphi}$$

آنگاه

$$\langle \acute{z}\otimes f,Da\rangle=\langle \acute{z}\otimes f\cdot\theta(a),I_{\mathcal{B}}\rangle-\varphi(a)\langle \acute{z}\otimes f,I_{\mathcal{B}}\rangle=\langle f,\theta(a)\acute{z}\rangle-\langle f,\varphi(a)\acute{z}\rangle\ =0$$

به طور مشابه $\langle zb\otimes f-b\otimes f\cdot z,Da\rangle=0$ و $\langle bz\otimes f-b\otimes z\cdot f,T\rangle=0$.

حال اگر گزاره‌های (۱) یا (۲) برقرار باشند, با توجه به تعریف‌های φ- میانگین پذیر و $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری بودن $\mathbb{C}_\varphi$ خواهیم داشت $\rho \in F$.
به طوری که $D = ad_\rho$. تعریف می‌کنیم $Q = I_{\mathcal{B}} - \rho$. حال اثبات می‌کنیم که φ- شبه انتظار است. برای هر $a \in \mathcal{A}$ $Q(\mathcal{B}) \subseteq \theta(\mathcal{A})^\varphi$.
برای هر $f \in \mathcal{B}_*, \acute{z} \in \theta(\mathcal{A})^\varphi$ چون $\langle \acute{z} \otimes f, \rho \rangle = 0$ است, Q روی $\theta(\mathcal{A})^\varphi$ نگاشت همانی است و بنابراین یک تصویر بروی $\theta(\mathcal{A})^\varphi$ است.

برای هر $f \in \mathcal{B}_*$, $b \in \mathcal{B}$, $z_1, z_2 \in \theta(\mathcal{A})^c$ داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle bz_2 \otimes f - b \otimes z_2 \cdot f, \rho \rangle \\ &= \langle f, \rho(bz_2) - \rho(b)z_2 \rangle \end{aligned}$$

بنابراین $\rho(bz_2) = \rho(b)z_2$ آنگاه داریم

$$\begin{aligned} Q(bz_2) &= bz_2 - \rho(bz_2) \\ &= bz_2 - \rho(b)z_2 \\ &= (b - \rho(b))z_2 \\ &= Q(b)z_2 \end{aligned}$$

به طور مشابه $Q(z_1 b) = z_1 Q(b)$ و خواهیم داشت $Q(z_1 b z_2) = z_1 Q(b) z_2$.
فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ دوگان و $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{L}(E)$ یک نمایش w^*-پیوسته روی یک فضای باناخ انعکاسی E باشد و فرض کنیم $\varphi \in \Delta_{w^*}(\mathcal{A})$. آنگاه $\mathcal{L}(E)$ تبدیل به یک $\mathcal{A}$- دو مدول باناخ به صورت زیر است:

$$a \cdot T = \pi(a)T \quad , \quad T \cdot a = \varphi(a)T$$

برای هر $a \in \mathcal{A}$, $T \in \mathcal{L}(E)$. همچنین به طور طبیعی $\mathcal{L}(E)$ یک $\pi(\mathcal{A})^c$- دو مدول باناخ است. در واقع فرض می‌کنیم $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}(E))$ مجموعه همه عضوهای $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ باشد به‌طوری که $Q(ST) = SQ(T)$, $Q(TS) = Q(T)S$ برای هر $T \in \mathcal{L}(E)$, $S \in \pi(\mathcal{A})^c$. اکنون $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}(E))$ را به یک $\mathcal{A}$- دو مدول باناخ تبدیل می‌کنیم به این ترتیب که برای هر $a \in \mathcal{A}$, $T \in \mathcal{L}(E)$, $Q \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}(E))$ قرار می‌دهیم

$$(a \cdot Q)(T) = \pi(a)Q(T), (Q \cdot a)(T) = \varphi(a)Q(T).$$

می‌دانیم که $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ یک فضای باناخ دوگان با پیش دوگان $\mathcal{L}(E) \widehat{\otimes} (E \widehat{\otimes} E^*)$ است. فرض کنیم $X \subseteq \mathcal{L}(E) \widehat{\otimes} (E \widehat{\otimes} E^*)$ بستار فضای خطی تولید شده توسط عناصر $cT \otimes x \otimes \mu - T \otimes x \otimes c^*(\mu)$, $Tc \otimes x \otimes \mu - T \otimes c(x) \otimes \mu$ برای هر $T \in \mathcal{L}(E), x \in E, \mu \in E^*, c \in \pi(\mathcal{A})^c$ باشد. داریم که $X^\perp = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}(E))$, بنابراین $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}(E))$ دارای پیش دوگان $(\frac{\mathcal{L}(E) \widehat{\otimes} (E \widehat{\otimes} E^*)}{X})^*$ می‌باشد. تعریف می‌کنیم $\theta: \pi(\mathcal{A}) \widehat{\otimes} \pi(\mathcal{A}) \to \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}(E))$ با ضابطه $\theta(\pi(a) \otimes \pi(b))(T) = \varphi(b)\pi(a)T$ برای هر $b, a \in \mathcal{A}, T \in \mathcal{L}(E)$. دقت داریم که برد θ مشمول در $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}(E))$ است و $\pi(\mathcal{A}) \widehat{\otimes} \pi(\mathcal{A})$ یک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ است با عمل‌های

$$c \cdot (\pi(a) \otimes \pi(b)) = \pi(ca) \otimes \pi(b)$$
و
$$(\pi(a) \otimes \pi(b)) \cdot c = \pi(ca) \otimes \pi(bc)$$

برای هر $a, b, c \in \mathcal{A}$ است. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که θ یک همریختی $\mathcal{A}$- دومدولی است.
حال نگاشت

$$\psi: (\frac{\mathcal{L}(E) \widehat{\otimes} (E \widehat{\otimes} E^*)}{X})^* \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$$

را با ضابطه

$$\begin{aligned} &\langle a \otimes b, \psi(T \otimes x \otimes \mu + X) \rangle \\ &= \langle \theta(\pi(a) \otimes \pi(b))(T)(x), \mu \rangle \\ &= \langle \varphi(b)\pi(a)T(x), \mu \rangle \end{aligned}$$

برای $a, b \in \mathcal{A}, T \in \mathcal{L}(E), \mu \in E^*$ تعریف می‌کنیم.
می‌توان مشاهده کرد که یک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ با اعمال مدولی زیر است

$$a \cdot (T \otimes x \otimes \mu) = \varphi(a)(T \otimes x \otimes \mu),$$
$$(T \otimes x \otimes \mu) \cdot a = T \otimes x \otimes \pi(a)^* \mu$$

برای هر $a \in \mathcal{A}, T \in \mathcal{L}(E), \mu \in E^*, \mathrm{x} \in \mathrm{E}$، این عمل مدولی در X مطابق با عمل مدولی تعریف شده در $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}(E))$ می‌باشد. نشان می‌دهیم که ψ یک همریختی $\mathcal{A}$- مدول چپ است. اگر $a, b, c \in \mathcal{A}, T \in \mathcal{L}(E), \mu \in E^*, \mathrm{x} \in \mathrm{E}$ آنگاه داریم

$$\begin{aligned}
&\langle a \otimes b, \psi\big(c \cdot (T \otimes x \otimes \mu + X)\big)\rangle \\
&= \varphi(c)\langle a \otimes b, \psi(T \otimes x \otimes \mu + X)\rangle \\
&= \varphi(c)\varphi(b)\langle \pi(a)T(x), \mu\rangle \\
&= \langle \varphi(bc)\pi(a)T(x), \mu\rangle \\
&= \langle a \otimes bc, \psi(T \otimes x \otimes \mu + X)\rangle \\
&= \langle a \otimes b, c \cdot \psi(T \otimes x \otimes \mu + X)\rangle
\end{aligned}$$

به طور مشابه، ψ یک همریختی $\mathcal{A}$- مدول راست است.

قضیه زیر مشابه حالت کلاسیک آن اثبات می‌شود.

قضیه ۳-۵. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ دوگان است و $\varphi \in \Delta_{w^*}(\mathcal{A})$. آنگاه $\mathbb{C}_\varphi$، $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری است اگر و تنها اگر $\mathbb{C}_{\varphi^\#}$، $\mathcal{A}^\#$- دومدول باناخ تصویری باشد.

حال قضیه اصلی این فصل را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳-۶. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ دوگان است و $\varphi \in \Delta_{w^*}(\mathcal{A})$. آنگاه $\mathbb{C}_\varphi$، $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری است اگر و تنها اگر $\mathcal{A}$، φ- انژکتیو باشد.

برهان. فرض کنیم $\mathbb{C}_\varphi$، $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری است و $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{L}(E)$ یک نمایش w^*-پیوسته روی یک فضای باناخ انعکاسی E باشد. به کمک قضیه ۳-۴ با جایگزینی $\pi, \pi(\mathcal{A})^\varphi, \mathcal{L}(E)$ به جای θ, B, H نتیجه خواهیم گرفت φ- انژکتیو است.

بالعکس، فرض کنیم $\mathcal{A}$، φ- انژکتیو است با توجه به قضیه ۳-۳ و ۳-۵ بدون کاستن از کلیت، می‌توانیم $\mathcal{A}$ را واحددار فرض کنیم و یک نمایش w^*-پیوسته طولپای $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{L}(E)$ موجود است که ψ^* (الحاقی به π) یکریختی است. با توجه به فرض یک φ- شبه انتظار $Q: \mathcal{L}(E) \to \pi(\mathcal{A})^\varphi$ وجود دارد. توجه کنیم که $Q \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}(E))$. تعریف می‌کنیم

$$M := (\psi^*)^{-1} Q \in \sigma wc((\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^*)^* .$$

چون Q، $\mathcal{L}(E)$ را به توی $\pi(\mathcal{A})^\varphi$ می‌نگارد، پس برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم $a \cdot Q = \varphi(a) Q$ که $a \cdot M = \varphi(a)\mathrm{M}$ را نتیجه می‌دهد. حال $\alpha \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $\langle \varphi \otimes \varphi, M\rangle = \alpha$. بنابراین قرار می‌دهیم $N = \frac{1}{\alpha} M$ و خواهیم داشت $\langle \varphi \otimes \varphi, N\rangle = 1$ و $a \cdot N = \varphi(a)\mathrm{N}$ برای هر $a \in \mathcal{A}$. از طرفی دیگر با توجه به [7] داریم

$$\pi^*(\sigma wc(\mathcal{A}^*)) \subseteq \sigma wc((\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^*)$$

بنابراین

$$m := \left(\pi^* \mid_{\sigma wc(\mathcal{A}^*)}\right)^* (M) \in \sigma wc(\mathcal{A}^*)^*$$

صادق در قضیه ۲-۲ گزاره (۲) است و نتیجه حاصل می‌گردد.

۴. کاربرد برای $WAP(\mathcal{A}^*)^*$

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ و E، یک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ است. یک عضو را به‌طور تقریبی ضعیف متناوب نامیم اگر نگاشت‌های

$$\mathcal{A} \to \mathrm{E}, \quad \mathrm{a} \mapsto \begin{cases} a \cdot x \\ x \cdot a \end{cases}$$

به طور ضعیف فشرده باشند. مجموعه همه عناصر به طور تقریبی ضعیف متناوب در E را با $WAP(E)$ نمایش می‌دهیم.

برای یک جبر باناخ $\mathcal{A}$، یک ضرب خوش تعریف در $WAP(\mathcal{A}^*)^*$ وجود دارد که آن را به جبر باناخ

دوگان تبدیل می‌کند. برای هر جبر باناخ دوگان $\mathcal{B}$ و همریختی $\theta: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ یک همریختی w^*-پیوسته یکتا $\tilde{\theta}: WAP(\mathcal{A}^*)^* \to \mathcal{B}$ وجود دارد به‌طوری که $\tilde{\theta} oi = \theta$، که $i: \mathcal{A} \to WAP(\mathcal{A}^*)^*$ نگاشت متعارف است. واضح است که اگر $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ و $\Delta_{w^*}(WAP(\mathcal{A}^*)^*) \neq \emptyset$ آنگاه عضو یکتا $\tilde{\varphi} \in \Delta_{w^*}(WAP(\mathcal{A}^*)^*)$ را طوری در نظر می‌گیریم که $\varphi = \tilde{\varphi} oi$ باشد.

قضیه ۴-۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ بوده و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. اگر $\mathcal{A}$، φ-میانگین‌پذیر باشد آنگاه $\mathbb{C}_{\tilde{\varphi}}$، $WAP(\mathcal{A}^*)^*$- دومدول باناخ تصویری است.

برهان. به کمک گزاره (۱) از قضیه ۲-۳ اثبات می‌شود.

قضیه ۴-۲. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ دوگان و $\varphi \in \Delta_{w^*}(\mathcal{A})$ است. آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

۱) $\mathbb{C}_{\varphi}$، $\mathcal{A}$- دومدول باناخ تصویری است.

۲) $\mathbb{C}_{\tilde{\varphi}}$، $WAP(\mathcal{A}^*)^*$- دومدول باناخ تصویری است.

برهان. ۱$\Longleftarrow$۲: با توجه به گزاره (۲) از قضیه ۲-۳ نتیجه می‌شود.

۲$\Longleftarrow$۱: فرض کنیم E یک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ با عمل مدولی چپ $x \cdot a = \varphi(a)x$ برای هر $x \in E, a \in \mathcal{A}$ باشد. فرض کنیم $D: \mathcal{A} \to \mathrm{E}$ یک مشتق باشد و $i: \mathcal{A}_* \to WAP(\mathcal{A}^*)$ نگاشت متعارف باشد، آنگاه i^* یک همریختی $\mathcal{A}$- دومدول از $WAP(\mathcal{A}^*)^*$ بتوی $\mathcal{A}$ است. ما E را به یک $WAP(\mathcal{A}^*)^*$- دومدول باناخ باضرب $x \cdot \Lambda := \varphi(\Lambda)x, \Lambda \cdot x := i^*(\Lambda) \cdot x$ برای هر $x \in E, \Lambda \in WAP(\mathcal{A}^*)^*$ تبدیل می‌کنیم. آنگاه $Di^*: WAP(\mathcal{A}^*)^* \to E$ یک مشتق است و بنابراین باتوجه به فرض یک وجود دارد به‌طوری که $(Di^*)(\Lambda) = \Lambda \cdot x - x \cdot \Lambda \ (\Lambda \in WAP(\mathcal{A}^*)^*)$ در نتیجه برای هر $a \in \mathcal{A}$، $Da = a \cdot x - x \cdot a$.

حال مثالی ارائه می‌کنیم:

مثال۴-۳. در [2, مثال 2.5] اثبات شده $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$، φ_z- میانگین‌پذیر است هرگاه $|z| = 1$ باشد. آنگاه طبق قضیه ۴-۲، $WAP(\ell^1(\mathbb{Z}^+)^*)^*$- دو مدول تصویری بودن $\mathbb{C}_{\tilde{\varphi}_z}$ را خواهیم داشت.

قضیه۴-۴. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ بوده و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. آنگاه عبارت‌های زیر معادلند:

۱) $\mathbb{C}_{\tilde{\varphi}}$، $WAP(\mathcal{A}^*)^*$- دومدول باناخ تصویری است.

۲) برای هر فضای باناخ انعکاسی E و برای هر نمایش پیوسته $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{L}(E)$ یک شبه انتظار $Q: \mathcal{L}(E) \to \pi(\mathcal{A})^{\varphi}$ وجود دارد.

برهان. طبق [7, قضیه 4.10] برای هر نمایش پیوسته $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{L}(E)$ با یک فضای باناخ انعکاسی E، وجود دارد یک w^*- نمایش یکتا $\tilde{\pi}: WAP(\mathcal{A}^*)^* \to \mathcal{L}(E)$ که توسیع π است. با توجه به قضیه ۳-۶ کافیست اثبات شود $\pi(\mathcal{A})^{\varphi} = \tilde{\pi}(WAP(\mathcal{A}^*)^*)^{\tilde{\varphi}}$ واضح است که $\tilde{\pi}(WAP(\mathcal{A}^*)^*)^{\tilde{\varphi}} \subseteq \pi(\mathcal{A})^{\varphi}$. فرض کنیم که $T \in \pi(\mathcal{A})^{\varphi}$ بنابراین برای هر $a \in \mathcal{A}, \eta \in E^* \otimes E$ داریم $\langle \pi(a)T, \eta \rangle = \varphi(a)\langle T, \eta \rangle$. برای $\psi \in WAP(\mathcal{A}^*)^*$، یک نت $(a_i) \subseteq \mathcal{A}$ وجود دارد که همگرا به ψ در w^*- توپولوژی روی $WAP(\mathcal{A}^*)^*$ است. بنابراین برای $x \in E, \mu \in E^*, T \in \pi(\mathcal{A})^{\varphi}$ داریم

$$
\begin{aligned}
&\langle \mu, \tilde{\pi}(\psi)T(x) \rangle = \langle \mu \otimes T(x), \tilde{\pi}(\psi) \rangle = \\
&\langle \psi, \pi_*(\mu \otimes T(x)) \rangle = \\
&\lim_i \langle \pi_*(\mu \otimes T(x)), a_i \rangle = \\
&\lim_i \langle \mu, \pi(a_i)T(x) \rangle = \\
&\lim_i \varphi(a_i)\langle \mu, T(x) \rangle = \langle \mu, \tilde{\varphi}(\psi)T(x) \rangle.
\end{aligned}
$$

بنابراین $T \in \tilde{\pi}(WAP(\mathcal{A}^*)^*)^{\tilde{\varphi}}$ خواهد شد و اثبات کامل می‌شود.

هدف بعدی ما مطالعه $WAP(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda)^*)^*$- دومدول باناخ تصویری بودن $\mathbb{C}_{\tilde{\varphi}}$ است, که φ کاراکتر افزایشی روی $\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda)$ است یعنی $\varphi(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\delta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$. فرض کنیم E یک فضای باناخ با پایه نرمال شده (e_n) است. ما یک تابعک خطی $n\in\mathbb{N}, {e_n}^*\in E^*$ به‌صورت $\langle {e_n}^*,\sum x_i e_i\rangle = x_n$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\epsilon_{i,j}$ ماتریسی است که درایه $(i,j)^{th}$ آن ۱ و درایه‌های دیگر ۰ است. یک نمایش $\pi\colon \ell^1(\mathbb{N}_\Lambda)\to\mathcal{L}(E)$ برای هر $n,m\in\mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi(\delta_n)(e_m)=\begin{cases} e_m & ,m\le n\\ 0 & ,m>n\end{cases}$$

ما اثبات می‌کنیم که $\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^\varphi$ مجموعه همه ماتریس‌های در $\mathcal{L}(E)$ با درایه‌های صفر بجز در سطر اول است. یعنی $T=(a_{i,j})\in\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^\varphi$ اگر و تنها اگر $a_{i,j}=0$ برای $i\ge 2$ و همه j . به وضوح هر چنین ماتریسی در $\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^\varphi$ قرار دارد. بالعکس, چون برای هر $n\ge 2$ داریم $\pi(\delta_n)-\pi(\delta_{n-1})=\epsilon_{n,n}$, خواهید دید که $\epsilon_{n,n}T=0$ برای هر $T\in\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^\varphi$. بنابراین برای $m\ge 1, n\ge 2$ داریم

$$0=\epsilon_{n,n}T(e_m)=\langle {e_n}^*,T(e_m)\rangle e_n$$

سپس $\langle {e_n}^*,T(e_m)\rangle=0$ و از آنجا برای هر $m\ge 1$, خواهد بود. سطر بعدی ما اثبات می‌کنیم هر φ - شبه انتظار $Q::\mathcal{L}(E)\to\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^\varphi$ باید تصویر متعارف به روی $\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^\varphi$ باشد. فرض کنیم $n,m\in\mathbb{N}$ و $T\in\mathcal{L}(E)$ است. می‌دانیم که $\epsilon_{n,n},\epsilon_{m,m}\in\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^c$ آنگاه

$$\langle {e_n}^*,T(e_m)\rangle Q(\epsilon_{n,m})=Q(\epsilon_{n,n}T\epsilon_{m,m})=\epsilon_{n,n}Q(T)\epsilon_{m,m}=\langle {e_n}^*,Q(T)(e_m)\rangle\epsilon_{n,m}$$

در نتیجه برای $n>1$, $\langle {e_n}^*,Q(T)(e_m)\rangle=0$ است. آنگاه نتیجه می‌گیریم برای هر n, $Q(T)(e_n)\in\mathbb{C}e_1$. برای $n\in\mathbb{N}$, دقت کنیم که $\epsilon_{1,n}\in\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^\varphi$, بنابراین

$$\langle {e_1}^*,T(e_n)\rangle\epsilon_{1,n}=\langle {e_1}^*,T(e_n)\rangle Q(\epsilon_{1,n})=Q(\epsilon_{1,1}T\epsilon_{n,n})=\epsilon_{1,1}Q(T)\epsilon_{n,n}=\langle {e_1}^*,Q(T)(e_n)\rangle\epsilon_{1,n}$$

سپس $\langle {e_1}^*,T(e_n)\rangle=\langle {e_1}^*,Q(T)(e_n)\rangle$, و از آن جا $Q(T)(e_n)=\langle {e_1}^*,T(e_n)\rangle e_1$.

قضیه۴-۵. فرض کنیم φ کاراکتر افزایشی روی $\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda)$ است.
آنگاه $\mathbb{C}_{\tilde{\varphi}}$, $WAP(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda)^*)^*$- دومدول باناخ تصویری نیست.

برهان. با توجه به مشاهدات و مطالب قبل از قضیه و قضیه ۳-۶ و ۴-۴، کافیست یک فضای باناخ انعکاسی E پیدا کنیم به‌طوری که Q, تصویر متعارف از $\mathcal{L}(E)$ بتوی $\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^\varphi$ کراندار نباشد. واضح است که یک یکریختی ایزومتریک Θ از $\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^\varphi$ بتوی $\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^c$ وجود دارد. در [8 ,قضیه 7.6] داوس یک فضای باناخ انعکاسی E معرفی کرده است که برای آن تصویر کانونی $\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^c$ کراندار نیست. این نشان می‌دهد $Q=\Theta oP$ کراندار نیست, که در آن P تصویر متعارف از $\mathcal{L}(E)$ بتوی $\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^c$ است.

برای هر نمایش $\pi\colon \ell^1(\mathbb{N}_\Lambda)\to\mathcal{L}(E)$, یک نمایش متناظر

$\rho\colon \ell^1(\mathbb{N}_\vee)\to\mathcal{L}(E)$ و $\delta_n\longmapsto I_E-\pi(\delta_n)$

برای $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد. آنگاه می‌توان بررسی کرد که $\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^c=\rho(\ell^1(\mathbb{N}_\vee))^c$ و $\pi(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda))^\varphi=\rho(\ell^1(\mathbb{N}_\vee))^0$. به این ترتیب, قضیه ۵-۴ ما را به نتیجه زیر می‌رساند.

نتیجه ۴-۶: $\mathbb{C}_0$, $WAP(\ell^1(\mathbb{N}_\vee)^*)^*$- دومدول باناخ تصویری نیست.

مثال ۴-۷: فرض کنیم φ کاراکتر افزایشی روی $\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda)$ است. به عنوان نتیجه ای از قضیه‌های ۴-۱و ۴-۵ واضح است که $\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda)$, φ -میانگین پذیر نیست.

مثال۴-۸: با توجه به قضیه ۴-۱و نتیجه ۴-۶ , , ۰-میانگین‌پذیر نیست. از طرفی واضح است $\mathbb{C}_0$, $\ell^1(\mathbb{N}_\vee)$- دومدول باناخ تصویری نیست و از نگاهی دیگر قضیه ۴-۲ واضح می‌شود.

۵. نتیجه‌گیری

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ دوگان و φ یک همریختی w^*- پیوسته از $\mathcal{A}$ به $\mathbb{C}$ باشد. در این مقاله, تصویری بودن $\mathbb{C}_\varphi$ را به‌عنوان $\mathcal{A}$- دومدول و همچنین به‌عنوان $WAP(\mathcal{A}^*)^*$- دومدول بررسی خواهیم نمود. هم چنین با بیان مفاهیم φ- انژکتیو و φ- شبه انتظار به معادل کردن آن‌ها با تصویری بودن $\mathbb{C}_\varphi$ به‌عنوان $\mathcal{A}$- دومدول می‌پردازیم. هدف بعدی ما بررسی $WAP(\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda)^*)^*$ - دومدول باناخ تصویری بودن $\mathbb{C}_{\tilde{\varphi}}$ است که φ کاراکتر افزایشی روی $\ell^1(\mathbb{N}_\Lambda)$ است.

فهرست مراجع

[1] Johnson, B. E., (1972). Cohomology in Banach algebras. Mem. Amer. Soc. 127.

[2] Kaniuth, E., Lau, A. T., Pym, J., On φamenability of Banach algebras, Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

[3] Kaniuth, E., Lau, A. T., Pym, J., 2008. On character amenability of Banach algebras. J. Math. Anal., 344, 942 – 955.

[4] Monfared, M. S., 2008. Character amenability of Banach algebras. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 144, 697–706.

[5] Runde, V., 2001. Amenability for dual Banach algebras, Studia Math., 148, 47–66.

[6] Runde, V. (1774). Lectures on Amenability, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlage, Berlin, 2002

[7] Runde, V., 2004. Dual Banach algebras:Connes- amenability, normal, virtual diagonals, and injectivity of the predual bimodule. Math. Scand. 95, 124–144.

[8] Daws, M., 2007. Dual Banach algebras: representations and injectivity. Studia Math., 178, 231–275.