

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره پنجاه و دوم، بهمن و اسفند ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

گسترش ساختارهای ریاضی از X به $P^*(X)$ ، و چند گزاره معادل با اصل انتخاب

حسین حسینی گیو

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۲/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۵/۰۵

چکیده

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی، و $P^*(X)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی X باشد. در این مقاله نشان می‌دهیم که وجود حداقل یک تابع انتخاب بر $P^*(X)$ ، که نتیجه‌ای از اصل انتخاب است، گسترش برخی از ساختارهای ریاضی تعریف شده بر X به ساختارهای مشابه بر $P^*(X)$ را ممکن می‌سازد. به عنوان نمونه، نشان می‌دهیم که هر عمل دوتایی بر X را می‌توان به یک عمل دوتایی بر $P^*(X)$ ، و هر متر تعریف شده بر X را می‌توان به یک شبه‌متر بر $P^*(X)$ گسترش داد. به این ترتیب، به چند گزاره معادل با اصل انتخاب می‌رسیم. چنین نتایجی برخلاف مشاهدات معمول ما در ریاضیات هستند، زیرا به طور معمول، ساختارها و خاصیت‌ها از یک مجموعه به زیرمجموعه‌های آن به ارث می‌رسند. به عنوان یکی از نتایج مهم این مقاله، گزاره‌ای ارائه می‌دهیم که ترکیب عطفی آن با اصل $C(\infty, 2)$ ، اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد. سرانجام، دو نتیجه توپولوژیک از اصل انتخاب به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: گزاره‌های معادل، عمل دوتایی، متر، ترتیب جزئی، رابطه هم‌ارزی

۱- مقدمه و پیش‌نیازها

اصل/انتخاب^۲ که نخستین بار در [۱] توسط ریاضی‌دان آلمانی/رنست تسرملو^۳ ارائه گردید، یکی از مهم‌ترین اصول ریاضیات نوین است. این اصل بیان می‌کند که برای یک مجموعه ناتهی Γ از مجموعه‌های ناتهی، تابع f تعریف شده بر Γ موجود است که در شرط $f(A) \in A$ برای هر $A \in \Gamma$ صدق می‌کند. در اینجا، واژه/انتخاب به درستی استفاده شده است. در حقیقت، وقتی چنین تابعی یافت شود، از هر مجموعه A در Γ ، عضوی از آن، یعنی $f(A)$ ، انتخاب شده است. در این وضعیت، تابع f را یک تابع/انتخاب^۴ بر Γ می‌نامیم.

بر خلاف ظاهر ساده و منطقی این اصل، یافتن مثال‌های ملموس از تابع انتخاب، حتی در بسیاری از ساده‌ترین حالت‌ها، دشوار است. برای درک این حقیقت، کفایت به یافتن یک تابع انتخاب بر مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) فکر کنید!

این ویژگی، راه را برای استفاده از اصل انتخاب برای ارائه/اثبات‌های غیرساختی^۵ باز می‌کند. یادآوری می‌شود که در یک اثبات غیرساختی، وجود یک شیء ریاضی بدون یافتن یا ارائه آن به صورت ملموس، به اثبات می‌رسد. به این دلیل، استفاده تسرملو از اصل انتخاب با بحث‌های فراوانی در جامعه ریاضی روزگار خود، همراه گردید. اما، پس از مدت کوتاهی آشکار گشت که اصل انتخاب و گزاره‌های معادل آن، مانند لم تسورن^۶، اصل ماکسیمال هاوسدورف^۷ و اصل خوش‌ترتیبی^۸ ابزارهایی ضروری برای توسعه شاخه‌های مهم ریاضی مانند جبر خطی، توپولوژی، و آنالیز تابعی هستند.

اهمیت این اصل، الهام‌بخش ریاضی‌دانان بسیاری برای یافتن گزاره‌های معادل بوده است. کتاب‌های [۲] و [۳] منابع ارزشمندی هستند که نتایج بسیاری از این نوع را شامل می‌شوند. در سال‌های اخیر، معادل‌های جدیدی برای اصل انتخاب پیدا شده‌اند. به عنوان نمونه می‌توانیم به معادل‌های توپولوژیک ارائه شده در [۴]، معادل نظریه مجموعه‌ای بیان شده در [۵]، و گزاره‌های معادل مختلفی که توسط کرم‌مدیس^۹ و همکارانش در [۶]، [۷] و [۸] به دست آمده‌اند، اشاره کنیم.

هدف این مقاله، ارائه معادل‌های جدیدی از اصل انتخاب است. برای ورود به بحث، فرض کنید X یک مجموعه ناتهی است، و $P^*(X)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی X را نشان می‌دهد. در این صورت، تابع $X \rightarrow \{X\}$ نشان می‌دهد که $P^*(X)$ یک کپی از X را شامل می‌شود. بنابراین، یک پرسش طبیعی به ذهن می‌رسد.

(۱) اگر یک ساختار ریاضی بر X تعریف شده باشد، آیا امکان گسترش آن به $P^*(X)$ وجود دارد؟

واضح است که پاسخ مثبت به این پرسش در هر زمینه‌ای، حصول یک نتیجه جالب و بر خلاف مشاهدات رایج در ریاضیات را در پی دارد. در واقع، آنچه به طور معمول در ریاضیات اتفاق می‌افتد این است که در بسیاری از موارد، یک ساختار یا خاصیت از یک مجموعه، به زیرمجموعه‌های آن به ارث می‌رسد. نکته مهم این است که با استفاده از اصل انتخاب می‌توانیم به پرسش (۱) در مورد برخی از ساختارهای رایج در ریاضیات، پاسخ مثبت بدهیم، و این، هدف اصلی ما از نوشتن مقاله حاضر است.

^۲The Axiom of Choice^۳Ernst Zermelo^۴Choice function^۵Nonconstructive proofs^۶Zorn's Lemma^۷Hausdorff's Maximal Principle^۸Well-Ordering Principle^۹Keremedis

قبل از شروع کار و پرداختن به نتایج اصلی، ساختار مقاله را تشریح می‌کنیم. در بخش ۲ نشان می‌دهیم که برای هر عدد طبیعی $n > 1$ ، گسترش یک تابع تعریف شده از X^n به X به تابعی از $P^*(X)^n$ به $P^*(X)$ با خاصیتی معین، منجر به یافتن گزاره‌ای معادل با اصل انتخاب می‌شود. حالت خاص $n = 2$ ، گسترش یک عمل دوتایی از X به $P^*(X)$ را نتیجه خواهد داد.

در بخش سوم، یک گزاره P معرفی می‌کنیم به طوری که ترکیب عطفی $P \wedge C(\infty, 2)$ ، اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد. گزاره $C(\infty, 2)$ یکی از نتایج مهم اصل انتخاب است که آنرا در ابتدای بخش ۳، یادآوری خواهیم کرد.

سپس، در بخش ۴، نشان می‌دهیم که وجود حداقل یک تابع انتخاب بر $P^*(X)$ ، گسترش مترها و ترتیب‌های جزئی را از X به $P^*(X)$ ممکن می‌سازد. این بخش، دو معادل جدید از اصل انتخاب را معرفی می‌کند.

سرانجام، در بخش پنجم، رابطه‌های هم‌ارزی را از X به $P^*(X)$ گسترش می‌دهیم، و یک معادل جدید دیگر برای اصل انتخاب به دست می‌آوریم. این مقاله با ارائه دو گزاره به پایان می‌رسد که از اصل انتخاب نتیجه می‌شوند و با هدف اصلی ما همسو هستند.

در پایان این بخش به معرفی نمادها، مفاهیم و گزاره‌هایی می‌پردازیم که در بخش‌های بعدی استفاده خواهند شد. اگر Y یک مجموعه باشد، یک شبه‌متر^۱ بر Y ، تابعی مانند $\rho: Y \times Y \rightarrow Y$ است که تمام خواص یک متر را دارد، جز اینکه از $\rho(x, y) = 0$ نتیجه شود x با y برابر است. اگر اعضای Y نیز مجموعه باشند، اجتماع تمام اعضای Y را با $\cup Y$ نمایش می‌دهیم. یک پیش‌ترتیب^۲ بر Y ، یک رابطه دوتایی بازتابی و متعدی بر Y است. اگر $\mathfrak{R}$ یک رابطه هم‌ارزی بر Y باشد، مجموعه تمام رده‌های هم‌ارزی اعضای Y به پیمانه $\mathfrak{R}$ را با $\frac{Y}{\mathfrak{R}}$ نشان می‌دهیم.

۲- نخستین قدم برای گسترش عمل‌های دوتایی

همانطور که در بخش اول بیان کردیم، در سراسر این مقاله، X یک مجموعه ناتهی و $P^*(X)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی X است. همچنین، اگر n یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، X^n حاصلضرب دکارتی $X \times \dots \times X$ را نشان می‌دهد که در آن، مجموعه X به تعداد n بار ظاهر شده است.

برای رسیدن به یک معادل جدید از اصل انتخاب، کار را با یک تعریف آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ است. همچنین، f تابعی از X^n به X ، و F تابعی از $P^*(X)^n$ به $P^*(X)$ است. می‌گوییم F تابعی f -وابسته^۳ است اگر برای هر $A \in P^*(X)$ ، عضو y از A ، موسوم به یک عضو ویژه^۴ A^r ، موجود باشد که برای هر $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in X^{n-1}$ ،

$$F(\{x_1\}, \dots, \{x_{n-1}\}, A) = \{f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)\}.$$

پیش از این بیان کردیم که با در نظر گرفتن تابع

$$x \mapsto \{x\},$$

^۱Quasi-metric

^۲Pre-orders

^۳ f -dependent

^۴Special element

می‌توانیم مجموعه X را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $P^*(X)$ در نظر بگیریم. بنابراین هر تابع f -وابسته، در حقیقت f را از X^n به $P^*(X)^n$ گسترش می‌دهد. این حقیقت، نتیجه‌ای از تساوی

$$F(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}) = \{f(x_1, \dots, x_n)\}$$

است که برای هر $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ معتبر می‌باشد.

اگر F تابعی f -وابسته بر $P^*(X)^n$ باشد، یک مجموعه $A \in P^*(X)$ می‌تواند بیش از یک عضو ویژه داشته باشد. این حقیقت را در مثال زیر نشان می‌دهیم. برای اینکه مثال را تا حد امکان ساده کنیم، دقت می‌کنیم که وقتی $n=2$ ، توابع f و F عمل‌های دوتایی هستند. لذا، در این حالت می‌توانیم از نمادهای $*$ و $\bullet$ به جای f و F استفاده کنیم.

مثال. فرض کنید $X = \{1, 2\}$ ، و عمل دوتایی $*$ را بر X با روابط

$$1 * 2 = 1 * 1 = 1$$

و

$$2 * 1 = 2 * 2 = 2$$

تعریف کنید. همچنین، عمل دوتایی $\bullet$ را بر $P^*(X)$ با $X \bullet X = X$ ، و

$$\{i\} \bullet X = X \bullet \{i\} = \{i\}$$

و

$$\{i\} \bullet \{j\} = \{i * j\}$$

برای $i, j \in X$ تعریف کنید. در این صورت، $\bullet$ یک عمل دوتایی $*$ -وابسته بر $P^*(X)$ است که ۱ و ۲، اعضای ویژه X هستند. در واقع، برای هر $i \in X$ ،

$$\{i\} \bullet X = \{i\} = \{i * 1\}$$

و

$$\{i\} \bullet X = \{i\} = \{i * 2\}.$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از تعریف ۱.۲، گزاره‌های اصلی این بخش را بیان کنیم. در گزاره زیر، n یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ است.

$\Omega(n)$: اگر X مجموعه‌ای ناتمامی باشد و f تابعی از X^n به X ، آنگاه حداقل یک تابع f -وابسته از $P^*(X)^n$ به $P^*(X)$ وجود دارد.

قضیه زیر، نتیجه اصلی این بخش است.

قضیه ۲.۲. برای هر عدد طبیعی $n > 1$ ، گزاره $\Omega(n)$ با اصل انتخاب معادل است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که اصل انتخاب، گزاره $\Omega(n)$ را نتیجه می‌دهد. برای این منظور، فرض کنید f تابعی از X^n به X باشد. اگر g یک تابع انتخاب بر $P^*(X)$ باشد، آنگاه

$$F(A_1, \dots, A_n) = \{f(g(A_1), \dots, g(A_n))\}$$

تابعی از $P^*(X)^n$ به $P^*(X)$ تعریف می‌کند. بعلاوه، برای مجموعه دلخواه $A \in P^*(X)$ ، عضو $g(A)$ از A ، یک عضو ویژه است. بنابراین، F یک تابع f -وابسته است، زیرا برای هر $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in X^{n-1}$

$$F(\{x_1\}, \dots, \{x_{n-1}\}, A)$$

با

$$\{f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(A))\}$$

برابر است.

حال نشان می‌دهیم که اصل انتخاب، از $\Omega(n)$ نتیجه می‌شود. فرض کنید Δ یک مجموعه از مجموعه‌های ناتهی باشد و قرار دهید $X = \bigcup \Delta$. تابع f را از X^n به X با ضابطه $f(x_1, \dots, x_n) = x_n$ تعریف کرده، فرض کنید F یک تابع f -وابسته از $P^*(X)^n$ به $P^*(X)$ باشد، و عضو ثابت z از X را در نظر بگیرید. اگر یک مجموعه $A \in \Delta$ ، دو عضو ویژه y و w داشته باشد، آنگاه

$$F(\{z\}, \dots, \{z\}, A)$$

برابر است با

$$\{f(z, \dots, z, y)\} = \{y\},$$

و

$$\{f(z, \dots, z, w)\} = \{w\}.$$

لذا $y = w$. بنابراین، هر عضو A از Δ ، دارای یک عضو ویژه یکتا مانند y_A است. اکنون، تابع $A \mapsto y_A$ یک تابع انتخاب بر Δ است، و اثبات به اتمام می‌رسد.

در حالت خاص، گزاره $\Omega(2)$ با اصل انتخاب معادل است. یادآور می‌شویم که حالت $n=2$ ، مربوط به عمل‌های دوتایی است. در واقع، یک عمل دوتایی $*$ بر X ، تابعی از X^2 به X ، و یک عمل دوتایی $\bullet$ بر $P^*(X)$ ، تابعی از $P^*(X)^2$ به $P^*(X)$ است. لذا، معادل زیر از اصل انتخاب را به دست آورده‌ایم.

$\Omega(2)$: اگر X یک مجموعه ناتهی و $*$ یک عمل دوتایی بر X باشد، آنگاه یک عمل دوتایی $\bullet$ -وابسته $\bullet$ بر $P^*(X)$ وجود دارد.

شرط $*$ -وابسته بودن $\bullet$ به این معناست که برای هر $A \in P^*(X)$ ، عضو y از A ، موسوم به یک عضو ویژه A ، موجود است به طوری که برای هر $x \in X$ ، $\{x\} \bullet A = \{x * y\}$. در حالت خاص، این شرط ایجاب می‌کند که برای هر $x, y \in X$

$$\{x\} \bullet \{y\} = \{x * y\}.$$

برقراری شرط اخیر را می‌توانیم به این صورت بیان کنیم که عمل دوتایی $\bullet$ ، توسیعی از $*$ به $P^*(X)$ است. بنابراین، اصل انتخاب به ما اجازه می‌دهد که یک عمل دوتایی را از مجموعه X ، به مجموعه بسیار بزرگ‌تر $P^*(X)$ گسترش دهیم.

۳- گسترش عمل‌های دوتایی و اصل $C(\infty, 2)$

یکی از موضوعات مهم تحقیقاتی در زمینه اصل انتخاب و گزاره‌های مرتبط با آن، یافتن گزاره‌هایی است که در ترکیب با گزاره‌های ضعیف‌تر از اصل انتخاب، این اصل را نتیجه می‌دهند.

اصل $C(\infty, 2)$ ، یکی از نتایج مهم اصل انتخاب است. این اصل بیان می‌کند که اگر Γ یک مجموعه ناتهی از مجموعه‌های دو عضوی باشد، آنگاه یک تابع انتخاب بر Γ وجود دارد. هدف بخش حاضر، ارائه گزاره‌ای مانند P است که ترکیب عطفی $P \wedge C(\infty, 2)$ ، اصل انتخاب را نتیجه دهد. کار را با بیان گزاره P مورد نظر، آغاز می‌کنیم.

(P) اگر $*$ یک عمل دوتایی بر مجموعه ناتهی X باشد، آنگاه عمل دوتایی $*$ -وابسته $\bullet$ بر $P^*(X)$ موجود است که، اگر x و y اعضاء ویژه‌ای از مجموعه ناتهی $A \subseteq X$ باشند، آنگاه

$$x * x = y * y. \quad (1)$$

اکنون می‌توانیم قضیه این بخش را بیان و اثبات کنیم.

قضیه ۱.۳. اصل انتخاب از گزاره $P \wedge C(\infty, 2)$ نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید Δ یک مجموعه از مجموعه‌های ناتهی باشد و قرار دهید $X = \cup \Delta$. فرض کنید Γ خانواده تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی X باشد. (توجه داشته باشید که برای ساختن Γ ، نیازی به استفاده از اصل انتخاب نداریم.) با توجه به اصل $C(\infty, 2)$ ، تابع انتخاب f بر Γ وجود دارد. اکنون، f یک عمل دوتایی بر X القا می‌کند:

$$x * y = f(\{x, y\})$$

اگر $x \neq y$ اعضایی از X باشند، و

$$x * x = x \quad (2)$$

برای هر $x \in X$ ، با توجه به (P)، عمل دوتایی $\bullet$ بر $P^*(X)$ موجود است که برای هر x و y در X ،

$$\{x\} \bullet \{y\} = \{x * y\}.$$

واضح است که اگر $A \in \Delta$ ، آنگاه $A \in P^*(X)$. بنابراین، با توجه به (P)، مجموعه A دارای یک عضو ویژه z است. از طرفی، تساوی (۲) و شرط (۱) در (P) نشان می‌دهند که این عضو ویژه، یکتاست. حال، تابعی که به هر $A \in \Delta$ ، عضو ویژه یکتای آن را نظیر می‌کند، یک تابع انتخاب بر Δ است.

۴- گسترش مترها و ترتیب‌های جزئی

در این بخش، به گسترش مترها و ترتیب‌های جزئی از X به $P^*(X)$ می‌پردازیم. برای شروع، ابتدا منظور از گسترش را به صورت دقیق، تشریح می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید d یک شبه‌متر، و $\leq$ یک پیش‌ترتیب بر مجموعه X باشد.

• شبه‌متر ρ بر $P^*(X)$ را توسیعی از d می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ ،

$$\rho(\{x\}, \{y\}) = d(x, y).$$

• پیش‌ترتیب $\prec$ بر $P^*(X)$ را توسیعی از $\leq$ می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ ، رابطه $\{x\} \prec \{y\}$ برقرار باشد اگر و تنها اگر $x \leq y$.

با استفاده از این تعریف، می‌توانیم نتیجه اصلی این بخش را بیان و اثبات کنیم.

قضیه ۲.۴. گزاره‌های زیر، با اصل انتخاب معادل هستند.

- (الف) اگر (X, d) یک فضای متریک باشد، آنگاه یک شبه‌متر ρ بر $P^*(X)$ موجود است که توسیعی از d بوده و برای هر $A \in P^*(X)$ ، عضو x از A وجود دارد که $\rho(\{x\}, A) = 0$.
- (ب) اگر $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه پیش‌ترتیب $\prec$ بر $P^*(X)$ موجود است که توسیعی از $\leq$ بوده و برای هر $A \in P^*(X)$ ، عضو x از A وجود دارد که $A \prec \{x\}$ و $\{x\} \prec A$.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که اصل انتخاب، گزاره (الف) را نتیجه می‌دهد. برای این منظور، فرض کنید f یک تابع انتخاب بر $P^*(X)$ باشد. برای $A, B \in P^*(X)$ تعریف کنید

$$\rho(A, B) = d(f(A), f(B)).$$

در این صورت، واضح است که ρ یک شبه‌متر بر $P^*(X)$ است، زیرا $\rho(A, B) = 0$ با شرط $A \neq B$ نیز امکان‌پذیر است. بعلاوه، ρ توسیعی از d است و اگر $A \in P^*(X)$ ، عضو $f(A)$ از A در تساوی $\rho(\{f(A)\}, A) = 0$ صدق می‌کند.

سپس نشان می‌دهیم که گزاره (الف)، اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد. فرض کنید Δ یک مجموعه از مجموعه‌های ناتهی باشد و قرار دهید $X = \bigcup \Delta$. فرض کنید d متر گسسته بر X بوده و ρ ، شبه‌متر متناظر با d طبق گزاره (الف) باشد. در این صورت، رابطه $\sim$ تعریف شده با $A \sim B$ اگر و تنها اگر $\rho(A, B) = 0$ یک رابطه هم‌ارزی بر $P^*(X)$ است. اکنون فرض کنید A عضو دلخواهی از $\Delta \subseteq P^*(X)$ باشد. با توجه به (الف)، عضو x از A وجود دارد که $\rho(\{x\}, A) = 0$ ، یعنی $\{x\}$ و A در یک رده هم‌ارزی به پیمانه $\sim$ قرار دارند. اگر $y \neq x$ عضوی از X باشد، آنگاه

$$\rho(\{y\}, \{x\}) = d(y, x) = 1.$$

بنابراین، $\{y\}$ در رده هم‌ارزی A و $\{x\}$ قرار ندارد. لذا، اگر $A \in \Delta$ دلخواه باشد، عضو یکتای x از A وجود دارد که $\{x\}$ در رده هم‌ارزی A به پیمانه رابطه $\sim$ قرار می‌گیرد. حال، تابعی که به هر عضو $A \in \Delta$ ، این عضو یکتا را نظیر می‌کند، یک تابع انتخاب بر Δ است.

اکنون نشان می‌دهیم که گزاره (ب)، از اصل انتخاب نتیجه می‌شود. فرض کنید f یک تابع انتخاب بر $P^*(X)$ باشد. برای $A, B \in P^*(X)$ بنویسید $A \prec B$ اگر و تنها اگر $f(A) \leq f(B)$. در این صورت، واضح است که $\prec$ هر دو خاصیت بازتابی بودن و تعدی را داراست، اما در حالت کلی در شرط پادمتقارن بودن صدق نمی‌کند. در واقع، از $A \prec B$ و $B \prec A$ نتیجه می‌گیریم $f(A) = f(B)$ ، که تساوی $A = B$ را تضمین نمی‌کند. بنابراین، $\prec$ یک پیش‌ترتیب بر $P^*(X)$ است. اینکه $\prec$ توسیعی از $\leq$ است، به آسانی از تعریف $\prec$ نتیجه می‌شود. همچنین، اگر $A \in P^*(X)$ دلخواه باشد، آنگاه $f(A)$ عضوی از A است که در شرایط $A \prec \{f(A)\}$ و $\{f(A)\} \prec A$ صدق می‌کند.

در پایان نشان می‌دهیم که گزاره (ب)، اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد. فرض کنید Δ یک مجموعه از مجموعه‌های ناتهی باشد و قرار دهید $X = \bigcup \Delta$. برای $x, y \in X$ بنویسید $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x = y$. واضح است که $\leq$ یک ترتیب جزئی بر X است. فرض کنید $\prec$ یک پیش‌ترتیب بر $P^*(X)$ باشد که مطابق گزاره (ب)، به $\leq$ نظیر می‌شود. رابطه $\Re$ را بر $P^*(X)$ با نوشتن $A \Re B$ اگر و تنها اگر $A \prec B$ و $B \prec A$ تعریف کنید. در این صورت،

$\mathfrak{R}$ یک رابطه هم‌ارزی بر $P^*(X)$ است. اگر A عضو دلخواهی از Δ باشد، رده هم‌ارزی یکتایی به پیمانه $\mathfrak{R}$ وجود دارد که شامل A است. با توجه به (ب)، عضو x از A وجود دارد که $\{x\}$ در رده هم‌ارزی A قرار دارد. اگر $y \neq x$ عضوی از X باشد، آنگاه تعریف ما از $\prec$ و اینکه توسیعی از $\leq$ است نتیجه می‌دهند که $\{y\}$ نمی‌تواند عضوی از رده هم‌ارزی A به پیمانه $\mathfrak{R}$ باشد. بنابراین، برای هر مجموعه A در Δ ، عضو یکتای x از A وجود دارد که $\{x\}$ در رده هم‌ارزی A به پیمانه $\mathfrak{R}$ قرار دارد. لذا، تابعی که به هر عضو $A \in \Delta$ این عضو یکتا را نظیر می‌کند، یک تابع انتخاب بر Δ است.

۵- توسیع رابطه‌های هم‌ارزی، و دو نتیجه توپولوژیک

همانطور که در بخش قبل دیدیم، وقتی یک متر d تعریف شده بر X به شبه‌متر ρ بر $P^*(X)$ گسترش می‌یابد، ارتباط ویژه‌ای بین ρ و d برقرار است. وقتی بخواهیم یک رابطه هم‌ارزی را از X به $P^*(X)$ توسیع بدهیم، ارتباط میان این دو رابطه هم‌ارزی باید به گونه‌ای باشد که در تعریف زیر تشریح می‌گردد.

تعریف ۱.۵. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد، $\tau \subseteq P^*(X)$ و $\Gamma \subseteq P^*(P^*(X))$ مجموعه Γ را τ -مقاطع^۴ (به طور یکتا τ -مقاطع^۴) می‌گوییم هرگاه برای هر $\mathfrak{I} \in \Gamma$ ، عضو (یکتای) U از τ موجود باشد که برای هر $A \in \mathfrak{I}$ ، شرط $A \cap U \neq \emptyset$ برقرار باشد.

اجازه دهید این مفهوم را با یک مثال ساده، توضیح دهیم.

مثال ۵.۲. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد. قرار دهید

$$\tau = \{\{\}, \{2, 3\}, \{5\}\} \subseteq P^*(\mathbb{N})$$

و

$$\Gamma = \{\{\{\}, \{1, 2\}\}, \{\{5\}\}\} \subseteq P^*(P^*(\mathbb{N})).$$

در این صورت، Γ به طور یکتا τ -مقاطع/است. با استفاده از تعریف ۵.۱، اکنون می‌توانیم معادل جدید دیگری برای اصل انتخاب ارائه کنیم.

قضیه ۵.۳. گزاره زیر، با اصل انتخاب معادل است.

اگر $\mathfrak{R}$ یک رابطه هم‌ارزی بر مجموعه ناتهی X باشد، رابطه هم‌ارزی $\wp$ بر $P^*(X)$ موجود است که $\frac{P^*(X)}{\wp}$ به طور یکتا $\frac{X}{\mathfrak{R}}$ -مقاطع است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که گزاره داده شده، از اصل انتخاب نتیجه می‌شود. برای این منظور، فرض کنید f یک تابع انتخاب بر $P^*(X)$ باشد و قرار دهید

$$\Gamma = \left\{ f^{-1}(V) : V \in \frac{X}{\mathfrak{R}} \right\},$$

^۴ τ – intersecting

^۴ Uniquely τ – intersecting

که در آن $f^{-1}(V)$ پیش‌نگاره $V \subseteq X$ تحت f است. چون f یک تابع انتخاب است، $f(V) \in V$. بنابراین، $f^{-1}(V)$ ناتهی است. چون مجموعه‌های عضو $\frac{X}{\mathfrak{R}}$ دو به دو مجزا هستند، اعضای Γ نیز دو به دو مجزا می‌باشند. بعلاوه، تساوی $X = \bigcup \frac{X}{\mathfrak{R}}$ نشان می‌دهد که $P^*(X) = \bigcup \Gamma$ ، لذا، Γ یک افزاز از $P^*(X)$ است. رابطه هم‌ارزی حاصل، که آنرا با $\wp$ نمایش می‌دهیم، رابطه هم‌ارزی مورد نظر ماست. در حقیقت، اگر $V \in \frac{X}{\mathfrak{R}}$ و

$$A \cap V \neq \emptyset, f(A) \in A \cap V, A \in \mathfrak{F}, \mathfrak{F} = f^{-1}(V) \in \frac{P^*(X)}{\wp} = \Gamma$$

حال نشان می‌دهیم که گزاره داده شده، اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد. لذا، فرض کنید Δ یک مجموعه از مجموعه‌های ناتهی باشد و قرار دهید $X = \bigcup \Delta$. همچنین، فرض کنید $\mathfrak{R}$ رابطه هم‌ارزی قطری بر X باشد، یعنی $x \mathfrak{R} y$ اگر و تنها اگر $x = y$ ، و $\wp$ رابطه هم‌ارزی متناظر با $\mathfrak{R}$ بر $P^*(X)$ مطابق گزاره داده شده باشد، به این معنی که $\frac{P^*(X)}{\wp}$ به طور یکتا $\frac{X}{\mathfrak{R}}$ -مقاطع است. در این صورت برای هر $A \in \Delta$ ، رده هم‌ارزی یکتای $\mathfrak{F}$ به پیمانه $\wp$ هست که شامل A می‌باشد. چون $\frac{P^*(X)}{\wp}$ به طور یکتا $\frac{X}{\mathfrak{R}}$ -مقاطع است، رده هم‌ارزی یکتایی در $\frac{X}{\mathfrak{R}}$ وجود دارد که با هر عضو $\mathfrak{F}$ ، و در نتیجه با مجموعه A ، اشتراک دارد. این رده هم‌ارزی فقط یک عضو دارد، که آنرا با $\{x_A\}$ نمایش می‌دهیم. اکنون، تابع $A \mapsto x_A$ یک تابع انتخاب بر Δ است.

در پایان، دو نتیجه توپولوژیک از اصل انتخاب را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۵. گزاره‌های زیر، از اصل انتخاب نتیجه می‌شوند.

(الف) اگر τ یک پایه برای یک توپولوژی بر مجموعه ناتهی X ، و $\mathfrak{R}$ یک رابطه هم‌ارزی بر X باشد، آنگاه پایه Γ برای یک توپولوژی بر $\frac{X}{\mathfrak{R}}$ وجود دارد که τ -مقاطع است.

(ب) اگر τ یک پایه برای یک توپولوژی بر مجموعه ناتهی X باشد، آنگاه پایه Γ برای یک توپولوژی بر $P^*(X)$ وجود دارد که τ -مقاطع است.

اثبات. اگر $f: \frac{X}{\mathfrak{R}} \rightarrow X$ یک تابع انتخاب باشد، آنگاه

$$\Gamma = \{f^{-1}(V) : V \in \tau\}$$

پایه‌ای برای یک توپولوژی بر $\frac{X}{\mathfrak{R}}$ است. اگر $\wp \in \Gamma$ ، آنگاه $\wp = f^{-1}(V)$ برای یک عضو V از τ . بنابراین برای هر $A \in \wp$ نتیجه می‌گیریم که $f(V) \in A \cap V$. این نشان می‌دهد که Γ ، مجموعه‌ای τ -مقاطع است، و اثبات اینکه (الف) از اصل انتخاب نتیجه می‌شود را به اتمام می‌رساند. اثبات اینکه (ب) از اصل انتخاب نتیجه می‌شود، به طور مشابه امکان‌پذیر است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان دادیم که اصل انتخاب، گسترش برخی ساختارهای ریاضی را از یک مجموعه ناتهی X به مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی آن، یعنی $P^*(X)$ ، ممکن می‌سازد. این ساختارها عبارت بودند از عمل‌های دوتایی، مترها، ترتیب‌های جزئی، و رابطه‌های هم‌ارزی. بنابراین، نتایج حاصل در این مقاله، نمونه‌های دیگری از نتایج شگفت‌انگیز اصل انتخاب محسوب می‌شوند.

یک ایده برای انجام کار تحقیقاتی جدید در این زمینه، بررسی امکان گسترش ساختارهای ریاضی دیگر از X به $P^*(X)$ با استفاده از اصل انتخاب، و رسیدن به معادل‌های جدید از این اصل بسیار مهم است.

فهرست منابع

- [۱] E. Zermelo, (۱۹۰۴). Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, Mathematische Annalen, ۵۹, ۵۱۴-۵۱۶.
- [۲] P. Howard and J. E. Rubin, (۱۹۹۸). Consequences of the Axiom of Choice, The American Mathematical Society.
- [۳] H. Rubin and J. E. Rubin, (۱۹۶۳). Equivalents of the Axiom of Choice, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- [۴] E. Schechter, (۱۹۹۲). Two topological equivalents of the axiom of choice, Mathematical Logic Quarterly, ۳۸, ۵۵۵-۵۵۷.
- [۵] H. Hosseini Giv, (۲۰۱۵). The axiom of choice, well-ordering, and well-classification, The American Mathematical Monthly, ۱۲۲, ۵۶-۵۹.
- [۶] H. Herrlich and K. Keremidis, (۲۰۱۱). Extending compact topologies to compact Hausdorff topologies in ZF, Topology and Its Applications, ۱۵۸, ۲۲۷۹-۲۲۸۶.
- [۷] K. Keremidis, (۱۹۹۸). Filters, antichains and towers in topological spaces and the axiom of choice, Mathematical Logic Quarterly, ۴۴, ۳۵۹-۳۶۶.
- [۸] K. Keremidis, (۲۰۰۱). The vector space Kinna-Wagner principle is equivalent to the axiom of choice, Mathematical Logic Quarterly, ۴۷, ۲۰۵-۲۱۰.